

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА: ТЕОРЕТИЧНЕ ТА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ВИЗНАЧЕННЯ КРИТИЧНОЇ СИЛИ ДЛЯ СТИСНУТОГО СТЕРЖНЯ

МЕТА РОБОТИ: вивчення процесу втрати стійкості при осьовому стиску гнучких стержнів.

Короткі теоретичні відомості

Пружна система може перебувати в стійкому і нестійкому станах рівноваги. Стан рівноваги пружної системи називається **стійким**, якщо малі зовнішні збурювання викликають малі відхилення системи від цього положення рівноваги, і після припинення дії цих збурень система повертається в початковий стан рівноваги. Стан рівноваги пружної системи називається **нестійким**, якщо малі зовнішні збурювання викликають великі відхилення системи від цього стану рівноваги і після припинення дії збурень система в початковий стан рівноваги не повертається.

Для багатьох деталей машин, елементів конструкцій і споруд розрахунки на міцність і жорсткість бувають недостатніми, щоб отримати повне уявлення про їх працездатність, виявити, чи знаходиться конструкція або її частина у стані стійкої рівноваги, тому для надійної роботи конструкції необхідно, щоб усі її елементи були як міцними так і стійкими.

Вперше Ейлером було досліджене питання стійкості ідеального стержня: з геометрією без початкових дефектів, ідеальними шарнірними закріпленнями на кінцях та з ідеально пружного матеріалу. Цю задачу він сформулював і розв'язав у 1744 році.

Леонард Ейлер – російський математик і механік, академік Петербурзької академії наук. Народився в Швейцарії, був запрошений до Росії в 20-ти річному віці, де прожив 14 років, потім переїхав до Берліна. Другий раз запрошений у Росію Катериною II, де і прожив до кінця життя. Ейлер зробив істотний внесок у становлення російської науки.

За Ейлером, під втратою стійкості розуміють процес переходу від початкової прямолінійної форми рівноваги між навантаженням і внутрішніми силами до нової зігнутої форми рівноваги. При цьому припускається, що при збільшенні стискаючого статичного навантаження настає такий стан пружної системи (байдужа форма рівноваги), коли в той самий час можуть існувати і вихідна і суміжна з нею форма рівноваги. Такий стан пружної системи характеризується роздвоєнням форм рівноваги (біфуркацією).

Критичною силою за Ейлером вважається максимальна стискаюча сила, при якій настає роздвоєння форм рівноваги пружної системи. Якщо навантаження перевищує критичну силу, то відбувається перехід до нової, зігнутої форми рівноваги (втрата стійкості). Процес втрати стійкості супроводжується розвитком досить великих переміщень пружної системи за короткий час. Лінійна залежність між приростом навантаження і переміщенням, що виникає – відсутня. В інженерних конструкціях втрата стійкості унеможливорює їх подальшу експлуатацію.

Розглянемо прямолінійний стержень, що знаходиться під дією центрально-прикладеної стискаючої сили F , лінія дії якої співпадає з віссю стержня (рис. 3.24, а). Враховуючи умови закріплення можна прийняти схему стержня з шарнірно-закріпленими кінцями (рис. 3.24, б).

Якщо стержень стиснути силою F , то із зростанням цієї сили стержень спочатку тільки вкорочується, зберігаючи свою прямолінійну форму, а потім настає явище втрати стійкості – **стержень викривляється** (рис. 3.24, в).

Отже можна знайти таке значення стискаючої сили $F_{кр}$, при якому прямолінійна форма рівноваги стає нестійкою.

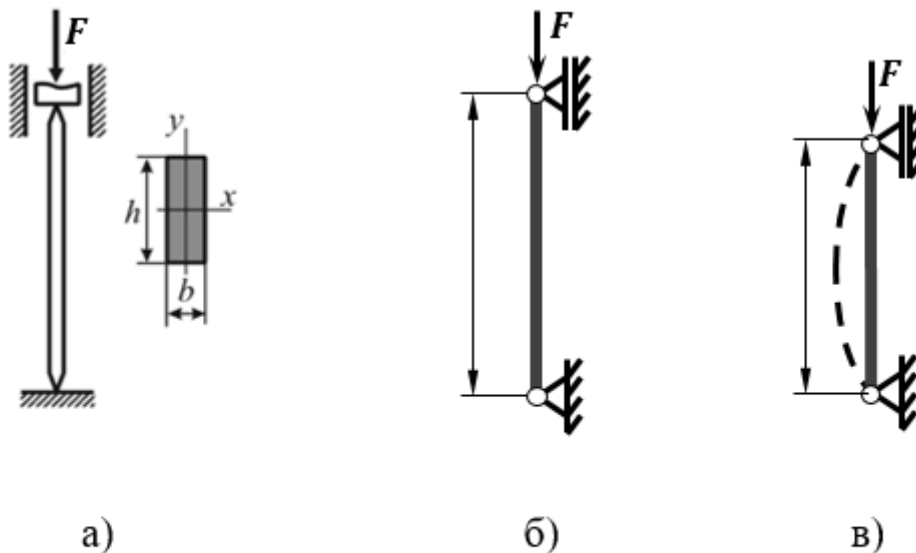


Рисунок 3.24 – Схема навантаження стержня (а),
розрахункова схема (б) і схема деформації (в).

Якщо $F < F_{кр}$, то прямолінійна форма рівноваги стержня стійка. При $F > F_{кр}$, прямолінійна форма рівноваги нестійка. Зміна стійкої форми рівноваги відбувається при $F = F_{кр}$.

Відповідно до теорії Ейлера критична сила $F_{кр}$ для окремого центрально-стиснутого стержня визначається за формулою:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{\ell^2}, \quad (3.36)$$

де E – модуль пружності І-го роду, МПа;

J_{min} – мінімальний момент інерції перерізу, мм⁴;

ℓ – довжина стержня, мм.

Якщо умови закріплення стержня однакові у всіх поздовжніх площинах, то втрата стійкості відбувається в площині найменшого опору. А це означає, що у формулі (3.37) використовується найменша величина осьового момента інерції J_{min} . Наприклад, стержень прямокутного перерізу (рис. 3.23, а) втрачає стійкість (згинається) в площині OXZ. У цьому випадку значення мінімального момента інерції, при $h > b$, визначиться так:

$$J_y = \frac{h \cdot b^3}{12}. \quad (3.37)$$

Пізніше, досліджуючи питання втрати стійкості формула Ейлера (3.37) була удосконалена Феліксом Ясинським (XIX сторіччя), російським ученим-механіком і інженером, фахівцем у галузі будівельної механіки, професором Петербурзького інституту інженерів шляхів сполучення. Ним було досліджено стійкість за границею пропорційності і встановлена залежність гнучкості стержня від способів закріплення його кінців. На сьогодні формула Ейлера має вигляд:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{(\mu \cdot \ell)^2}. \quad (3.38)$$

де μ – коефіцієнт приведеної довжини, який для стержня на шарових опорах (рис.

3.24, б) дорівнює $\mu = 1$;

$\mu \cdot l$ – приведена (розрахункова) довжина стержня.

Значення коефіцієнта приведеної довжини μ залежить від умов закріплення стержня і визначається як:

$$\mu = \frac{1}{n}. \quad (3.39)$$

де n – число, що показує кількість довжин півхвиль синусоїди, яка відповідає формі втрати рівноваги стержня (формі зігнутої осі стержня). Для стержня на рисунку 3.24, б: $n = 1$, а отже .

Фелікс Ясинський також ввів поняття **критичних напружень** $\sigma_{кр}$ та критичної гнучкості, або **граничної гнучкості** $\lambda_{гр}$.

Отримавши значення критичної сили за формулою Ейлера, можемо визначити критичне напруження, що виникає в момент втрати стійкості:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{(\ell)^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\ell/i_{min}\right)^2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{(\lambda_{гр})^2}, \quad (3.40)$$

де i_{min}^2 – мінімальний осьовий радіус інерції стержня, мм²:

$$i_{min}^2 = \frac{J_{min}}{A},$$

де A – площа поперечного перерізу стержня, мм².

$\lambda_{гр}$ – гнучкість стержня.

Із формули 3.40 легко знайти граничну гнучкість. Її значення залежить від властивостей матеріалу і характеристик міцності – границі пропорційності $\sigma_{пц}$:

$$\lambda_{гр} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{пц}}} \quad (3.41)$$

Деякі значення граничної гнучкості:

- для звичайної конструкційної сталі – $\lambda_{гр} > 100$,
- для чавуну – $\lambda_{гр} > 80$,
- для дюралюмініу – $\lambda_{гр} > 76$,
- для сосни – $\lambda_{гр} > 110$.

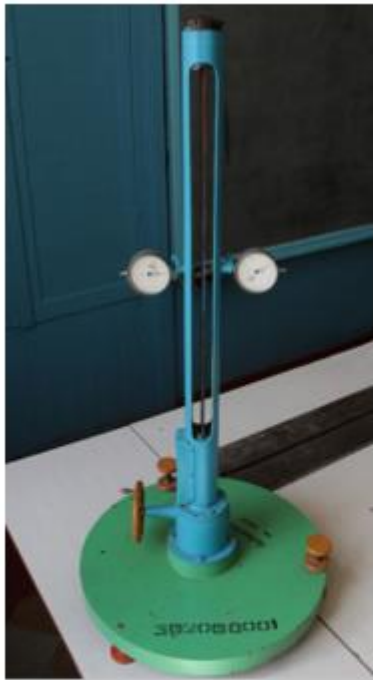
Розрахункову гнучкість стержня λ можна визначити по формулі:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}}, \quad (3.42)$$

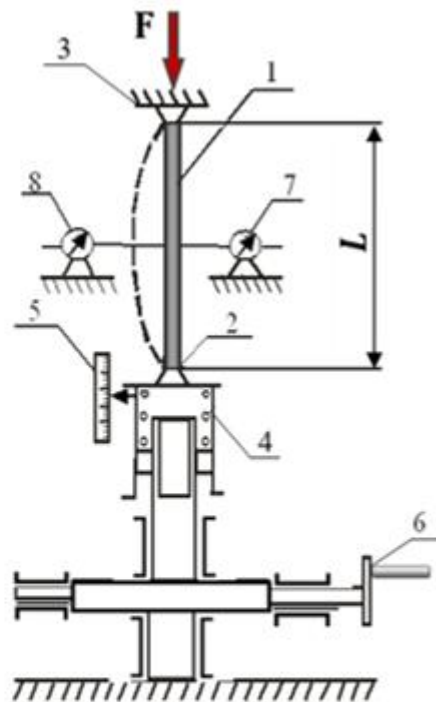
де i_{min} – мінімальний радіус інерції перерізу стержня, мм:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}}.$$

Експериментальна установка. Для проведення досліджень використовуємо лабораторну установку для визначення критичної сили, загальний вигляд якої зображено на рисунку 3.25 (а). Дослідний стержень 1 встановлюємо на шарнірні опори 2 і 3. При чому опора 2 – рухома, а опора 3 – нерухома. По середині зразка, де у наслідок прикладення сили буде максимальний прогин, встановлюємо індикатори годинникового типу 7 і 8. При проведенні дослідження стискання стержня здійснюється за допомогою навантажувального пристрою через еластичну пружину 4. Обертаючи маховик черв'ячного редуктора 6, повільно навантажуюмо балку. Кожні **10 обертів** маховика відповідають навантаженню у **22 Н**.



а)



б)

Рисунок 3.25 – Лабораторна установка для визначення критичної сили: а) загальний вигляд, б) принципова схема.

В процесі навантаження необхідно слідкувати за індикаторами доки не відбудеться втрата стійкості (стрілка індикатора почне дуже швидко обертатися).

Оснащення робочого місця

- v установка, підготовлена до проведення експерименту;
- v 2 індикатори годинникового типу;
- v сталний призматичний зразок прямокутного перерізу (матеріал – сталь 65Г-Ш ГОСТ 1050-88);
- v методичні вказівки до виконання лабораторної роботи;
- v калькулятор, олівець, лінійка;
- v журнал лабораторних робіт.

Порядок виконання роботи

Для експериментального визначення критичної сили використовують сталю балку прямокутного перерізу довжиною $\ell = 500\text{мм}$, яка встановлена вертикально на двох шарнірних опорах (рис. 3.25).

Балка має наступні дані:

- ширина перерізу $b = 2\text{ мм}$;
- висота перерізу $h = 35\text{ мм}$;
- матеріал балки - 65Г-Ш ГОСТ 1050-88;
- модуль пружності матеріалу $E = 2 \cdot 10^5\text{ МПа}$.

Лабораторна робота проводиться у такій послідовності:

1. Перевірити готовність установки до експерименту, виставити індикатори на нульову відмітку.
2. Визначити геометричні характеристики перерізу – момент інерції відносно осі Y (рис. 3.24) за формулою 3.38.
3. Визначити гнучкість стержня та граничну гнучкість за формулами (3.42) та (3.43) і порівняти їх значення між собою.
4. Визначити значення критичної сили за формулою Ейлера (3.39).
5. Провести експеримент: ступенево навантажити балку, кожного разу на 22Н , ретельно слідкуючи за показниками індикаторів.
6. Записати показання індикаторів на кожному етапі навантаження в журнал спостережень до того моменту, поки не відбудеться втрата стійкості (табл. 3.7).
7. За отриманими даними будуємо діаграму прогинів у координатах $F-f$. Провівши дотичну до отриманого графіка проєціюємо її на вертикальну вісь і визначаємо значення критичної сили $F_{кр}$ (рис. 3.26).

Таблиця 3.7 – Результати експериментальних спостережень.

№	Навантаження F, Н	Значення абсолютного поперечного прогину f, мм
1	22	
2	44	
3	66	
4	88	
5	110	
6	132	
7	154	
8	176	
9	198	
10	220	
11	242	

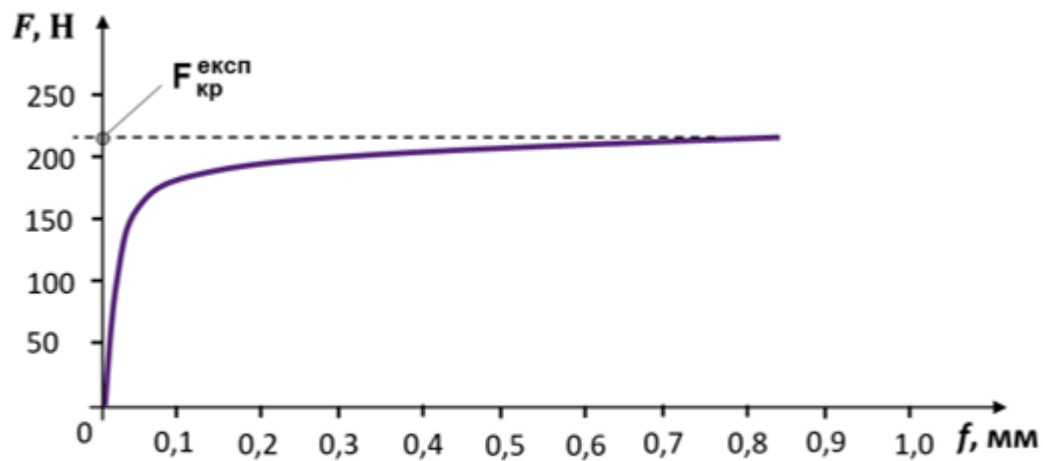


Рисунок 3.26 – Приблизний вигляд діаграми прогинів.

8. Порівняти отримані результати, визначаючи розбіжність:

$$\Delta F = \frac{F_{кр}^T - F_{кр}^{експ}}{F_{кр}^T} \cdot 100\% \leq [5\%]$$

9. Зробити висновки та відповісти на контрольні запитання.
10. Захистити лабораторну роботу у викладача.

Тестові запитання для самоконтролю

1. Які зразки використовують при випробуванні матеріалів на стійкість?
прямокутного перерізу;
круглого перерізу;
трубчастого перерізу;
квадратного перерізу.
2. Відхилення стержня від свого положення рівноваги називається:
втратою стійкості;
згином;
крученням;
стиском.
3. Найменша центрально-прикладена стискаюча сила, що виводить стержень з прямолінійної рівноваги називається:
критичною силою;
зовнішньою силою;
поперечною силою;
внутрішньою силою.
4. Як позначається критична сила?
 $F_{кр}$;
 Q ;
 $\sigma_{кр}$;
 $I_{кр}$.
5. Які геометричні характеристики використовують при розрахунку стержнів на стійкість:
площа перерізу A та момент інерції J_{min} ;
момент опору $W_{н.л.}$ та площа перерізу A ;
момент опору $W_{н.л.}$ та момент інерції $J_{н.л.}$;
статичний момент площі перерізу S та полярний момент опору W_p
6. Прямолінійна форма рівноваги гнучкого стержня буде стійкою, якщо:
сила, що стискає F менше критичної $F_{кр}$ ($F < F_{кр}$);
сила, що стискає F більше критичної $F_{кр}$ ($F > F_{кр}$);
сила, що стискає F дорівнює критичній $F_{кр}$ ($F = F_{кр}$);
сила, що стискає F дорівнює внутрішній силі N ($F = N$).
7. За формулою Ейлера і Ясинського розраховують силу:
критичну;
допустиму;
внутрішню;
розрахункову.

8. Здатність стержнів, під дією поперечного навантаження, відхилятися від свого рівноважного положення, а при знятті навантаження приймати свою первісну форму рівноваги називається:

гнучкістю;

згином;

крученням;

стиском.

9. Як позначається гнучкість стержня?

I ;

F ;

τ ;

σ .

10. Як позначають критичні напруження при стиску?

$\sigma_{кр}$;

$\tau_{кр}$;

$F_{кр}$;

$I_{кр}$.

11. Для заданого матеріалу критичні напруження, що виникають у момент втрати стійкості можна визначити за формулою:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2};$$

$$\sigma_{кр} = \frac{F}{A};$$

$$\tau_{кр} = \frac{M_{max}}{W_p};$$

$$\sigma_{кр} = \frac{M_{зг}}{W_x}.$$

~

12. Як позначається коефіцієнт, що залежить від способів закріплення кінців стержня?

m ;

l ;

φ ;

ℓ .

13. В яких одиницях вимірюється гнучкість стержня ?

безрозмірна величина;

Н;

м;

МПа.

14. Що означає величина i_{min} :

мінімальний радіус інерції;

мінімальний момент інерції;

мінімальний статичний момент перерізу;

мінімальний момент опору.

15. Граничну гнучкість стержня можна визначити за формулою:

$$\lambda_{гр} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{пц}}};$$

$$\sigma_{гр} \leq \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2};$$

$$\lambda_{гр} = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}};$$

$$\sigma_{гр} \leq \frac{F}{A}.$$

16. Як записати формулу Ейлера для розрахунку критичної сили?

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{(\mu \cdot \ell)^2};$$

$$F_{кр} = (a - b \cdot \lambda) \cdot A;$$

$$F_{кр} = \sigma \cdot A;$$

$$F_{кр} = \frac{F}{n_{ст}}.$$

17. Діапазон застосування формули Ейлера:

$$\lambda_{кр} \geq 100;$$

$$\lambda_{кр} > 100;$$

$$\lambda_{кр} = 100;$$

$$\lambda_{кр} < 100.$$

18. Як визначити розрахункову гнучкість стержня?

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}};$$

$$\tau = \frac{M_{кр}}{W_p};$$

$$\sigma_{кр} \leq \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2};$$

$$\sigma = \frac{F}{A}.$$

19. За допомогою якого приладу експериментально визначають значення відхилень стержня від положення рівноваги?

індикаторами годинникового типу;

вимірювачем деформацій;

за допомогою тарирувального графіка;

лінійкою.

20. Який спосіб закріплення кінців стержня використовують під час експериментального визначення критичної сили?

коли коефіцієнт приведеної довжини стержня $m = 1$;

коли коефіцієнт приведеної довжини стержня $m = 2$;

коли коефіцієнт приведеної довжини стержня $m = 0,7$;

коли коефіцієнт приведеної довжини стержня $m = 0,5$.

21. За допомогою чого визначають значення критичної сили експериментальним шляхом?

за допомогою діаграми прогинів;

за допомогою діаграми розтягу;

за допомогою тарирувального графіка;

за допомогою діаграми напружень.

22. В яких координатах будують діаграму прогинів?

$F-f$;

$F-\Delta l$;

$M-\varphi$;

$\sigma-\varepsilon$.

23. Яка фізична суть критичної сили?

максимальна сила, при якій стержень втрачає стійкість;

максимальна сила, при якій стержень здобуває стійкість;

мінімальна сила взаємодії між частками;

мінімальна сила тиску.

24. Якій величині дорівнює гранична гнучкість для сталі?

$\lambda_{cr} \approx 100$;

$\lambda_{cr} \approx 80$;

$\lambda_{cr} \approx 110$;

$\lambda_{cr} \approx 76$.

25. Що іноді називають поздовжнім згином?

втрату стійкості;

згин;

кручення;

стиск.