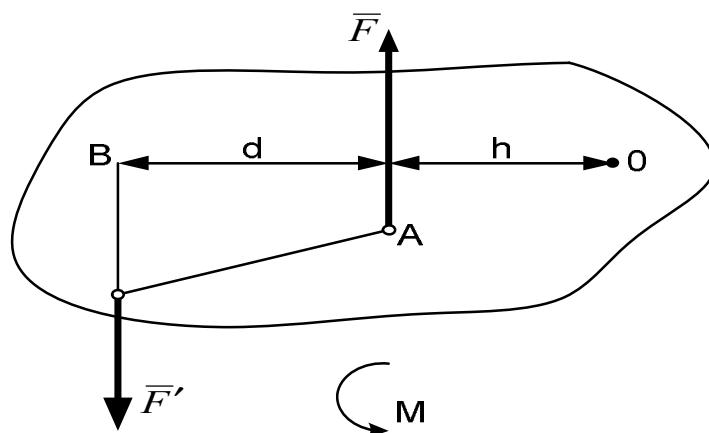


**Методичні вказівки**  
*до практичних занять та виконання  
розрахунково-графічних робіт з дисципліни  
“Будівельна механіка”.*

(для підготовки молодших спеціалістів спеціальності  
5.092110 “Будівництво та експлуатація будівель і споруд”.)



Методичні вказівки до практичних занять та виконання розрахунково-графічних робіт з дисципліни “Будівельна механіка”. Індивідуальні завдання до розрахунково-графічних робіт з дисципліни для підготовки молодших спеціалістів спеціальності 5.092110 “Будівництво та експлуатація будівель і споруд”. Укл.: Похилюк В.В. – Рівне, 2010. –82 с.

**Укладач:    Похилюк В.В.**

Обговорено та схвалено на засіданні методичної комісії викладачів груп підготовки молодших спеціалістів

Протокол \_\_\_\_\_ від \_\_\_\_\_

Голова методичної комісії \_\_\_\_\_ М.Д. Сірко

## Зміст

1	Порядок та основні вимоги до виконання розрахунково-графічних робіт.	4
2	Теоретичні відомості до розв'язування задач	5-27
	Завдання до розрахунково-графічної роботи №1	
3	Тема: “ <i>Розрахунок шарнірно-консольних балок.</i> <i>Побудова епюр Q, M</i> ”.	28-29
4	Приклади розв'язання задач з теми “ <i>Розрахунок шарнірно-консольних балок. Побудова епюр Q, M</i> ”	30-33
5	Завдання до розрахунково-графічної роботи №2	34-37
	Тема: “ <i>Побудова епюр Q, M i N для статично визначеної рами</i> ”.	
6	Приклади розв'язання задач з теми “ <i>Побудова епюр Q, M i N для статично визначеної рами</i> ”	38-46
7	Завдання до розрахунково-графічної роботи №3	47-49
	Тема: “ <i>Розрахунок плоскої статично визначеної ферми</i> ”.	
8	Приклади розв'язання задач з теми “ <i>Розрахунок плоскої статично визначеної ферми</i> ”	50-57
9	Завдання до розрахунково-графічної роботи №4	58-61
	Тема: “ <i>Побудова епюр Q, M i N для статично невизначеної рами</i> ”.	
10	Приклади розв'язання задач з теми “ <i>Побудова епюр Q, M i N для статично невизначеної рами</i> ”	62-72
11	Список літератури	73
12	Додаток №1	74
13	Додаток №2	75-76
14	Додаток №2	77-80
15	Додаток №2	81-82

## **Порядок та основні вимоги до виконання розрахунково-графічних робіт.**

Під час вивчення курсу будівельна механіка дані методичні вказівки використовуються викладачем при проведенні практичних занять і контрольних робіт, а студентами в процесі самостійної роботи при виконанні розрахунково-графічних робіт.

Терміни здачі завдань і номери варіантів вказуються викладачем у плані-графіку виконання самостійних робіт. При розв'язувані задачі, що поставлена в завдані, слід використовувати конспект лекцій, рекомендовану літературу і відповідні методичні вказівки.

При виконані розрахунково-графічної роботи, необхідно твердо засвоїти основні визначення, положення і відповідні теореми.

Під час захисту кожної роботи студент повинен пояснити порядок виконання задачі, знати і чітко формулювати теоретичний матеріал пов'язаний з розрахунком, вміти розв'язувати подібну задачу.

Розрахунково-графічну роботу треба оформляти на стандартних аркушах паперу А4 (розмір 210x297 мм) з полями зліва 20 мм, справа, зверху і знизу по 5 мм. Писати тільки з одного боку аркушу. На першому аркуші(титульний аркуш) вказується назва роботи, тема роботи, а також прізвище, група і номер варіанта (дивись додаток №1). На другому аркуші записати повністю умову задачі, викреслити розрахункову схему. Розв'язання задачі з короткими поясненнями виконати на наступних аркушах. Зробити перевірку результатів.

Роботу виконувати кульковою ручкою, а всі малюнки та допоміжні побудови – олівцем під лінійку.

# Теоретичні відомості до розв'язування задач

## 1. Кінематичний аналіз споруджень

### 1.1. Основні види опор

Будівельна механіка розглядає *геометрично незмінні системи* (спорудження), тобто такі, переміщення точок яких можливі тільки в результаті деформації системи. Нерухомість таких систем (іхня геометрична незмінюваність) щодо землі забезпечується опорними зв'язками (опорами). Реакції, що виникають в опорах, разом з діючими навантаженнями, утворять урівноважену систему зовнішніх сил.

Технічне виконання опорних закріплень досить різноманітне, але при виборі розрахункової схеми опори найчастіше приходять до декількох їхніх типів (рис.1.1): а – циліндрична рухома, або *шарнірно рухома*; б – циліндрична нерухома, або *шарнірно нерухома*; в – защімлююча нерухома, або *жорстке закладення*; г – защімлююча рухома, або *ковзне закладення*.

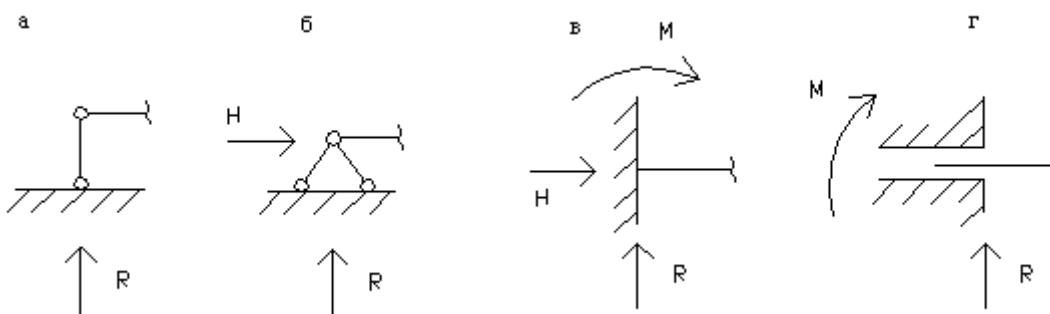


Рис. 1.1

Показані опори (Рис.1.1) еквівалентні відповідно одному, двом, трьом і двом опорним стержням, у кожному з яких діє опорна реакція (опорний момент).

Жорсткому й ковзному закладенню можна поставити у відповідність їхні шарнірно-стержневі еквіваленти (Рис.1.2). При цьому відстань  $l_0$  називається *глибиною закладення*, а добуток  $M = R_2 l_0$  – *опорним моментом*, або моментом у закладенні.



Рис.1.2

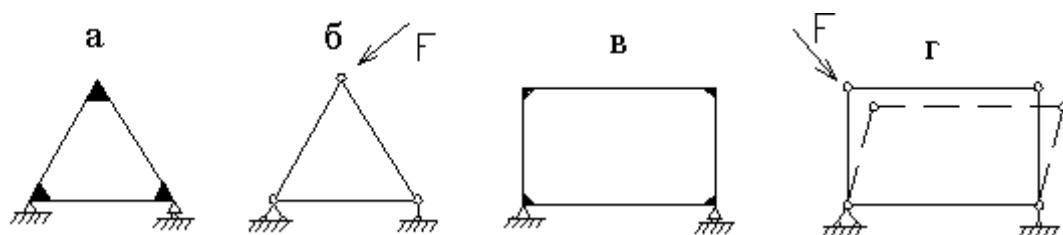
### 1.2 Умови геометричної незмінюваності стержневих систем

З'ясування того, чи є система геометрично незмінною, умов, що забезпечують цю незмінюваність, а також ролі окремих елементів у роботі всього спорудження становить суть *кінематичного аналізу*, що завжди повинен передувати розрахунку.

*Стержневими системами* називаються системи, що складаються з окремих, частіше прямолінійних, стержнів, з'єднаних між собою у вузлах (за допомогою зварювання, болтів, заклепок і т.д.).

Одним з видів таких систем є *плоскі ферми*. У більшості випадків з'єднання стержнів у вузлах ферми є жорсткими; точний розрахунок такої системи досить складний через те, що вона є багаторазово статично невизначену системою. Однак експериментальні й теоретичні дослідження показують, що при достатній довжині стержнів заміна жорстких з'єднань шарнірними істотно не впливає на величини зусиль у стержнях. Розрахунок же при цьому різко спрощується й за певних умов може бути виконаний за допомогою одних лише рівнянь статики.

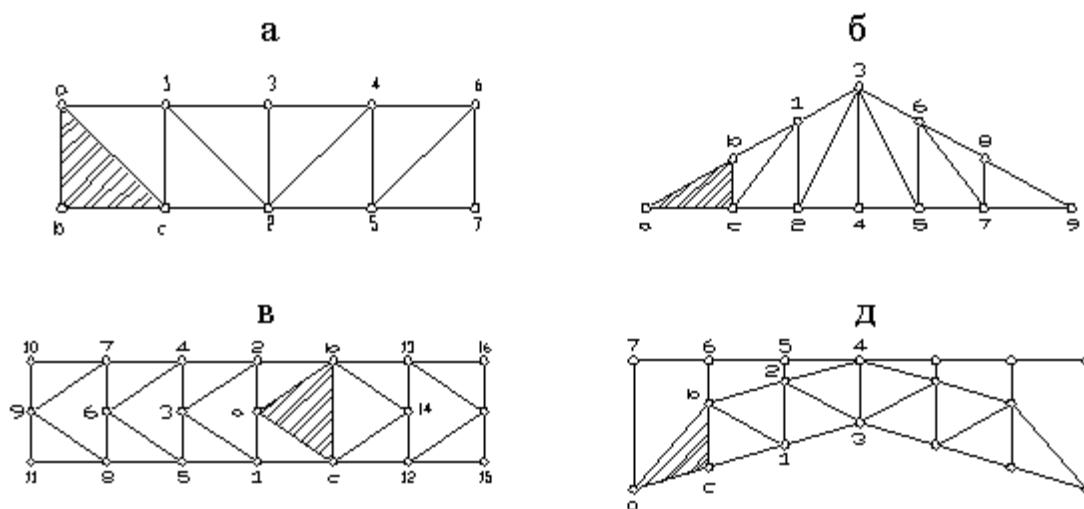
Якщо замінити жорсткі вузли системи, що складається із трьох стержнів (*Рис. 1.3, а*), шарнірними (*Рис. 1.3, б*), то система залишиться геометрично незмінною. Але якщо теж саме виконати із системою, що складається із чотирьох стержнів (*Рис. 1.3, в*), то отримана система (*Рис. 1.3, г*) стане геометрично змінюваною, тому що її форма може змінюватися й без деформації елементів.



*Рис. 1.3*

Система, що складається із трьох стержнів, з'єднаних шарнірами в трикутник, є найпростішою геометрично незмінною системою (*Рис. 1.3, б*).

Системи, отримані з такого шарнірного трикутника шляхом послідовного приєднання вузлів, причому кожного двома стержнями, що не лежать на одній прямій, також будуть геометрично незмінними (*Рис. 1.4*).



*Рис. 1.4*

Встановимо залежність між числом вузлів і числом стержнів, необхідних для одержання найпростішої геометрично незмінної ферми.

Нехай  $S$  – число стержнів ферми, а  $K$  – число вузлів. Основний трикутник, на базі якого побудована ферма (заштриховані області на Рис.1.4), має три вузли й три стержні, а кожний з інших вузлів, що приєднуються, у  $K - 3$  кількості прикріплюється двома стержнями. Отже, повне число стержнів у найпростішій геометрично незмінній фермі

$$S = 3 + 2(K - 3)$$

або

$$S = 2K - 3 \quad (1.1)$$

Якщо  $S < 2K - 3$ , то система геометрично змінювана; якщо  $S > 2K - 3$ , то система може бути геометрично незмінною. Це варто розуміти так, що співвідношення  $S \geq 2K - 3$  є необхідним, але недостатньою умовою геометричної незмінюваності ферми. Наприклад, ферми на Рис.1.5, є геометрично змінюваними, хоча для правої з них (Рис.1.5,а)  $S = 2K - 3$ , а для другої (Рис.1.5,б)  $- S > 2K - 3$ . Змінюваність цих ферм пояснюється тим, що праві їхні частини – шарнірні чотирикутники.



Рис. 1.5

Слід також зазначити, що стержневі системи, що задовольняють умові  $S = 2K - 3$ , можуть бути миттєво змінюваними.

Розглянемо приєднання геометрично незмінної системи до землі за допомогою опор. Найчастіше спорудження (диск) опирається на дві шарнірні опори (рухому й нерухому, Рис.1.6,а), але можливе обпирання й на три шарнірно рухомі опори (Рис.1.6,б). Таке обпирання можливо лише в тому випадку, коли осі цих стержнів не перетинаються в одній точці й не паралельні один одному.

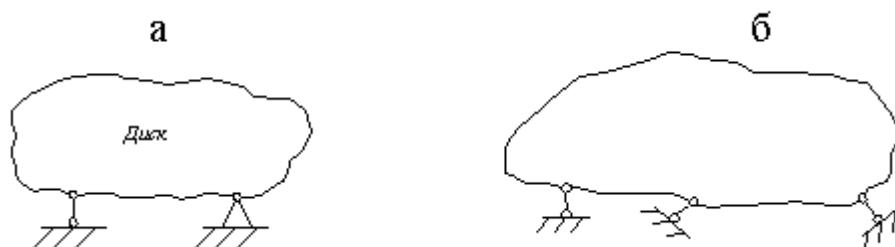


Рис. 1.6

Стосовно до випадку з'єднання двох будь-яких геометрично незмінних систем (дисків) можна сформулювати правило: два диски утворять геометрично незмінну систему, якщо вони зв'язані між собою трьома стержнями, осі яких не перетинаються в одній точці й не паралельні один одному.

До диска можна також геометрично незмінно приєднати інший диск за допомогою загального для обох дисків шарніра й стержня, напрямок якого не повинен проходити через цей шарнір.

З'єднання трьох дисків в одну загальну геометрично незмінну систему можна здійснити, з'єднавши їх у трикутник за допомогою трьох шарнірів, не розташованих на одній прямій (Рис.1.7,а), або за допомогою шести стержнів

(Рис.1.7,б), тому що кожний шарнір можна замінити двома стержнями, що перетинаються в цьому шарнірі.

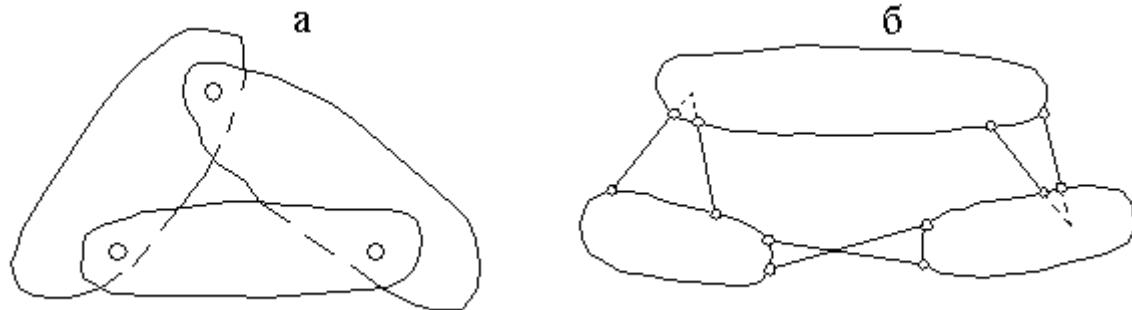


Рис.1.7

### 1.3. Статична визначеність геометрично незмінних стержневих систем

Спорудження статично визначене щодо опорних закріплень тільки в тому випадку, коли число параметрів, що визначають реакції цих закріплень, дорівнює трьом. Цій умові задовольняють наступні три системи опорних закріплень:

1. Комбінація шарнірно-рухомої й шарнірно-нерухомої опор (Рис.1.8,а);
2. Комбінація трьох шарнірно-рухомих опор (Рис.1.8,б) за умови, що напрямки реакцій цих опор не перетинаються в одній точці й не паралельні один одному;
3. Жорстко затиснена система (Рис.1.8,в).

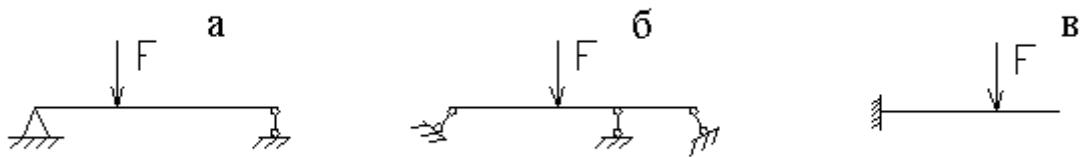


Рис. 1.8

Наявність у геометрично незмінної системи чотирьох і більше опорних стержнів, серед яких є три стержні з напрямками реакцій, що не перетинаються в одній точці й не паралельними один одному, говорить про те, що спорудження статично невизначене.

Розглянемо умови, яким повинні задовольняти самі статично визначені стержневі системи (ферми), тобто такі системи, зусилля в елементах яких можуть бути знайдені за допомогою одних лише рівнянь статики.

При дії на шарнірну ферму зосереджених сил, прикладених у вузлах, у її прямолінійних стержнях виникають тільки повздовжні (стискаючі або розтягуючі) сили. Якщо ферма має криволінійні стержні, то в поперечних перерізах цих стержнів крім повздовжніх сил виникають і згинальні моменти, що викликають у них додаткові напруги.

Якщо ферма в цілому (Рис.1.9,а) перебуває в рівновазі під дією сил, прикладених до її вузлів, то й будь-який її вузол (Рис.1.9,б) також перебуває в рівновазі, тобто зовнішнє навантаження, що діє на вузол, і внутрішні зусилля в стержнях, що сходяться в цьому вузлі, взаємно врівноважуються.

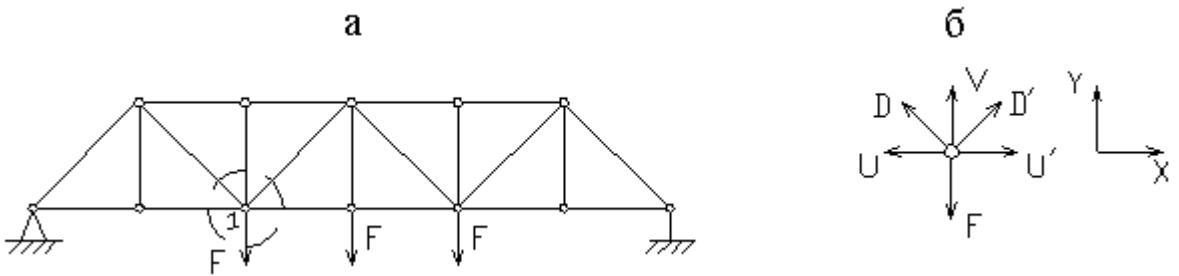


Рис.1.9

На кожний вузол ферми діє система сил, що перетинаються в одній точці. Для такої системи сил можна записати два рівняння рівноваги:

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0.$$

Якщо ферма має  $K$  вузлів, то для них можна записати  $2K$  рівнянь рівноваги, з яких можна визначити зусилля у всіх стержнях ферми й три невідомі опорні реакції. Будь-які інші рівняння рівноваги для окремих частин ферми або для всієї ферми в цілому можуть бути отримані із цих рівнянь, тому вони не є новими незалежними умовами для визначення незалежних зусиль. Таким чином, ферма буде статично визначена, якщо число її стержнів  $S$  дорівнює подвоєному числу вузлів мінус 3:

$$S = 2K - 3 \quad (1.2)$$

Залежність (1.2) між числом вузлів і числом стержнів статично визначеної ферми збігається з умовою (1.1) її геометричної незмінюваності.

Отже, усяка найпростіша ферма, тобто ферма, утворена на базі шарнірного трикутника послідовним приєднанням вузлів (кожного за допомогою двох стержнів, що не лежать на одній прямій), є одночасно геометрично незмінною й статично визначеною системою.

Всі стержні статично визначеної системи є безумовно необхідними з погляду геометричної незмінюваності, тобто в такій системі немає ні одного зайвого зв'язку; якщо ж число стержнів геометрично незмінної системи перевищує мінімально необхідне, то вона є статично невизначеною.

## 2. Статично визначені плоскі рами

### 2.1. Побудова епюр для плоских рам

*Плоскою рамою* називається стрижнева система, елементи якої жорстко або шарнірно з'єднані між собою, навантажена у своїй площині.

Вертикально (або під нахилом) розташовані стрижні рами називаються *стійками*, а горизонтальні - *ригелями*. Жорсткість вузлів усуває можливість взаємного повороту скріплених стрижнів, тобто у вузловій крапці кути між їхніми осями залишаються незмінними.

Як і багато інших систем, рами діляться на статично визначені й статично невизначені (Рис.2.1, б, в, д, е).

Проміжний шарнір знижує ступінь статичної невизначеності рами на величину  $m - 1$ , де  $m$  - число стрижнів, що сходяться в шарнірі. Якщо  $m > 2$ , то шарнір називається *кратним* (Рис.2.1, д).

Для визначення ступеня статичної невизначеності плоскої рами можна скористатися формулою:

$$n = 3 \text{ ДО-Ш},$$

де  $n$  - ступінь статичної невизначеності;  $DO$  - число замкнутих контурів у припущені повної відсутності шарнірів;  $W$  - число шарнірів у перерахуванні на одиночні.

Підстава (земля) розглядається як стрижень. Для рами (Рис.2.1,б) маємо:

$DO=1$ ;  $W=0$ ;  $n = 3 \cdot 1 - 0 = 3$ . Для рами (рис.10,д):  $DO=3$ ;  $W=3$   $n = 3 \cdot 3 - 3 = 6$ .

У більш простих випадках, коли відсутні замкнуті контури й проміжні шарніри, тобто коли використовуються комбінації тих же опор, що й у балках (жорстке закладення, шарнірно-рухлива й шарнірно-нерухлива опори), для визначення ступеня статичної невизначеності використовується "балкова" формула:

$$n = r - s,$$

де  $r$  - число невідомих реакцій;  $s$  - число рівнянь статики (для плоскої рами  $s=3$ ).

У даної розділі обмежимося розглядом найпростіших статично визначених рам трьох видів:

1. Із жорстким закладенням;
2. На двох шарнірних опорах (нерухливої й рухливої);
3. На двох шарнірно нерухливих опорах із простим проміжним шарніром.

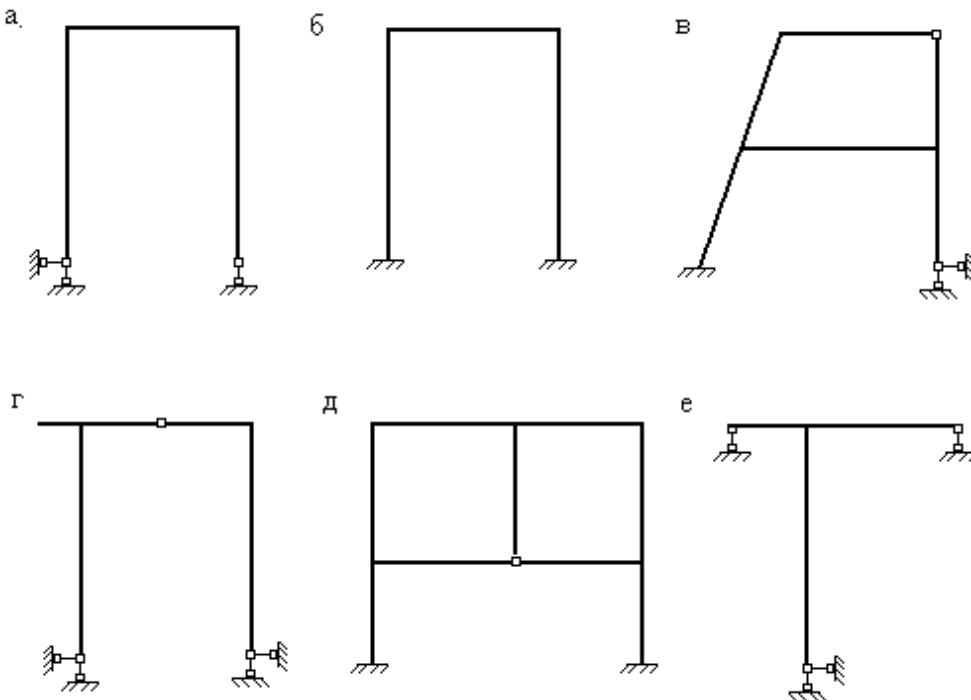


Рис.2.1

Із шести внутрішніх силових факторів у перерізах плоскої рами в загальному випадку виникають три: поздовжні сили  $N_z$ , поперечна сила  $Q_y$ , згинальний момент  $M_x$ .

*Правила знаків.* Для  $N_z$  і  $Q_y$  зберігаються раніше прийняті правила знаків.

$N_z > 0$ , якщо зовнішнє навантаження, прикладене до розглянутої відсічененої частини, викликає в даному перерізі розтягання й  $N_z < 0$  - у протилежному випадку.

$Q_y > 0$ , якщо зовнішнє навантаження, прикладене до розглянутої відсічененої частини, прагне повернути даний переріз за годинниковою стрілкою й  $Q_y < 0$  - у протилежному випадку.

Ординати епюор  $N_z$  і  $Q_y$  (як, втім і  $M_x$ ) відкладають, як і звичайно, перпендикулярно до осі елементів рами. Іноді позитивні ординати  $N_z$  і  $Q_y$

відкладають із зовнішньої сторони рами, а негативні – із внутрішньої, але рама часто має таку конфігурацію, при якій неможливо виділити внутрішню й зовнішню сторони, тому *надалі вмовимося*: ординати епюр  $N_z$  і  $Q_y$  відкладаються в довільну сторону, але обов'язково вказується знак.

Для згинальних моментів спеціального правила знаків немає, а при обчисленні моменту в будь-якому перерізі знак приймається довільно. Але результат обчислень *завжди відкладається з боку розтягнутого волокна* елемента рами. При цьому знак на епюрі  $M_x$  ніколи не вказується. Така умова повністю відповідає характеру побудови епюр  $M_x$ .

## 2.2. Правила контролю епюр $Q_y$ й $M_x$

Диференціальні залежності між  $Q_y$  визначають ряд закономірностей, яким підкоряються епюри  $Q_y$  і  $M_x$ .

1. Епюра  $Q_y$  є прямолінійною на всіх ділянках; епюра  $M_x$  - криволінійна (квадратна парабола) на ділянці під рівномірно розподіленим навантаженням, причому, опуклість кривої завжди звернена назустріч навантаженню  $q$ , і прямолінійна на всіх інших ділянках.
2. Під крапкою додатка зосередженої сили (реакції) на епюрі  $Q_y$  обов'язково повинен бути стрибок на величину цієї сили (реакції). Аналогічно, під крапкою додатка зосередженого моменту на епюрі  $M_x$  обов'язковий стрибок на величину моменту.
3. Якщо на ділянці під розподіленим навантаженням епюра  $Q_y$  перерізає вісь ( $Q_y = 0$ ), то епюра  $M_x$  у цьому перерізі має екстремум.
4. На ділянках з поперечною силою одного знака епюра  $M_x$  має однакову монотонність. Так, при  $Q_y > 0$  епюра  $M_x$  зростає ліворуч праворуч; при  $Q_y < 0$  - убуває.

Порядок лінії на епюрі  $Q_y$  завжди на одиницю менше, ніж на епюрі  $M_x$ .

Наприклад, якщо епюра  $M_x$  - квадратна парабола, то епюра  $Q_y$  на цій ділянці - похила пряма; якщо епюра  $M_x$  - похила пряма, то епюра  $Q_y$  на цій ділянці - пряма, паралельна осі; якщо  $M_x = \text{const}$  (пряма, паралельна осі), та на цій ділянці  $Q_y = 0$ .

## 3. Статично невизначені системи. Метод сил.

### 3.1. Особливості статично невизначених систем і методи їхнього розрахунку.

*Статично невизначену* називається така система, що не може бути розрахована за допомогою одних тільки рівнянь статики, тому що має зайдіти зв'язки. Для розрахунку таких систем складаються додаткові рівняння, що враховують деформації системи.

Обмовимося, що тут і далі поняття “розрахунок” має на увазі тільки побудову епюр внутрішніх силових факторів, що виникають в елементах системи, а не розрахунок на міцність, жорсткість і т.д.

Статично невизначені системи володіють рядом характерних рис:

1. Статично невизначені конструкції є більш жорсткими, чим відповідні статично визначені, тому що мають додаткові зв'язки.
2. У статично невизначених системах виникають менші внутрішні зусилля, що визначає їхню економічність у порівнянні зі статично визначними системами при однакових зовнішніх навантаженнях.

3. Порушення зайдих зв'язків у статично невизначеній системі не завжди приводить до руйнування, у той час як утрата зв'язку в статично визначній системі робить її геометрично змінюваною.
4. Для розрахунку статично невизначених систем необхідно попередньо задаватися геометричними характеристиками поперечних перерізів елементів, тобто фактично їхньою формою і розмірами, тому що їхня зміна приводить до зміни зусиль у зв'язках і новому розподілі зусиль у всіх елементах системи.
5. При розрахунку статично невизначених систем необхідно заздалегідь вибрати матеріал конструкції, тому що необхідно знати його модулі пружності.
6. У статично невизначених системах температурний вплив, осідання опор, неточності виготовлення і монтажу викликають появу додаткових зусиль.

Основними методами розрахунку статично невизначених систем є:

1. *Метод сил.* Тут у якості невідомих розглядаються зусилля – сили і моменти.
2. *Метод переміщень.* Невідомими є деформаційні фактори – кути поворотів і лінійні зсуви.
3. *Змішаний метод.* Тут частина невідомих являє собою зусилля, а інша частина – переміщення.
4. *Комбінований метод.* Використовується при розрахунку симетричних систем на несиметричні навантаження. Виявляється, що на симетричну складову заданого навантаження системи доцільно розраховувати методом переміщень, а на зворотно симетричну складову – методом сил.

Крім зазначених аналітичних методів при розрахунку особливо складних систем використовуються різні чисельні методи.

### 3.2. Канонічні рівняння методу сил

Для одержання додаткових рівнянь, про які говорилося в попередньому параграфі, потрібно, насамперед, перетворити задану  $n$  раз статично невизначену систему в статично визначну, видаливши з неї зайді зв'язки. Отримана статично визначена система називається *основною*. Відзначимо, що перетворення заданої системи в статично визначну не є обов'язковим. Іноді використовується модифікація методу сил, у якій основна система може бути статично невизначеною, однак виклад цього питання виходить за рамки цього посібника. Усунення яких-небудь зв'язків не змінює внутрішні зусилля і деформації системи, якщо до неї прикласти додаткові сили і моменти, що представляють собою реакції відкинутих зв'язків. Виходить, якщо до основної системи прикласти задане навантаження і реакції вилучених зв'язків, то основна і задана системи стануть *еквівалентними*.

У заданій системі по напрямках наявних жорстких зв'язків, у тому числі і тих зв'язках, що відкинуті при переході до основної системи, переміщення бути не може, тому ї в основній системі переміщення по напрямках відкинутих зв'язків повинні дорівнювати нулеві. А для цього реакції відкинутих зв'язків повинні мати строго визначені значення.

Умова рівності нулеві переміщення по напрямку будь-якої  $i$ -го зв'язку з  $n$  відкинутих на підставі принципу незалежності дії сил має вигляд

$$\Delta_i = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \dots + \Delta_{in} + \Delta_{iF} = 0, \quad (3.1)$$

де перший індекс означає напрямок переміщення і номер відкинутого зв'язку, а другий указує на причину, що викликала переміщення, тобто  $\Delta_{ik}$  — це переміщення по напрямку  $i$ -го зв'язку, викликане реакцією  $k$ -го зв'язку;  $\Delta_{iF}$  — переміщення по напрямку  $i$ -го зв'язку, викликане одночасною дією всього зовнішнього навантаження.

У методі сил реакцію  $k$ -го зв'язку прийнято позначати через  $X_k$ . З урахуванням цього позначення і у силу справедливості закону Гука переміщення  $\Delta_{ik}$  можна представити у вигляді

$$\Delta_{ik} = d_{ik} x_k, \quad (3.2)$$

де  $d_{ik}$  — одиничне (або питоме) переміщення по напрямку  $i$ -го зв'язку, викликане реакцією  $\vec{X}_k = 1$ , тобто реакцією, що збігається по напрямку з  $X_k$ , але рівне одиниці.

Підставляючи (6.2) у (6.1), одержимо

$$\Delta_i = d_{i1} X_1 + d_{i2} X_2 + \dots + d_{in} X_n + \Delta_{iF} = 0. \quad (3.3)$$

*Фізичний зміст рівняння (3.3):* переміщення в основній системі по напрямку  $i$ -го відкинутого зв'язку дорівнює нулеві.

Записуючи вирази, аналогічні (3.3), для всієї сукупності відкинутих зв'язків, одержимо *систему канонічних рівнянь* методу сил

$$\begin{cases} d_{11} X_1 + d_{12} X_2 + \dots + d_{1n} X_n + \Delta_{1F} = 0; \\ d_{21} X_1 + d_{22} X_2 + \dots + d_{2n} X_n + \Delta_{2F} = 0; \\ \dots \\ d_{n1} X_1 + d_{n2} X_2 + \dots + d_{nn} X_n + \Delta_{nF} = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Вид рівняння (3.4), тобто кількість доданків у кожному з них і їхнє загальне число, визначається тільки ступенем статичної невизначеності системи і не залежить від її конкретних особливостей.

Коефіцієнти системи канонічних рівнянь (3.4) визначаються методом Мора-Верещагіна шляхом перемножування відповідний епюр. Усі ці коефіцієнти, як вказувалося вище, являють собою переміщення; коефіцієнти, що знаходяться при невідомих — одиничні переміщення, а вільні члени — *вантаажні*. Одиничні переміщення поділяються на *головні*, розташовані по головній діагоналі й однакові індекси, що мають ( $d_{ii}$ ),  $i$  побічні ( $d_{ik}, i \neq k$ ). Головні переміщення завжди позитивні, на відміну від побічних. Симетрично розташовані переміщення відповідно до теореми про взаємність переміщень рівні один одному, тобто

### 3.3. Алгоритм розрахунку методом сил

Незалежно від особливостей розглянутої конструкції, можна виділити наступну *послідовність розрахунку* статично невизначеніх систем методом сил:

1. Визначити ступінь статичної невизначеності.
2. Вибрати основну систему.
3. Сформувати еквівалентну систему.
4. Записати систему канонічних рівнянь.

5. Побудувати одиничні і вантажні епюри внутрішніх силових факторів, що виникають в елементах розглянутої конструкції.
6. Обчислити коефіцієнти при невідомих і вільних члени системи канонічних рівнянь.
7. Побудувати сумарну одиничну епюрові.
8. Виконати універсальну перевірку коефіцієнтів при невідомих і вільних членах.
9. Вирішити систему (3.4), тобто визначити реакції зайдих зв'язків.
10. Побудувати епюри виникаючих внутрішніх силових факторів для заданої системи (інакше кажучи, остаточні епюри).
11. Виконати статичну і кінематичну перевірки.

Відзначимо, що пункти 7, 8, 11 приведеного алгоритму не є безумовно необхідними, хоча і дозволяють контролювати правильність виконання розрахунку. А для систем з одним зайдим зв'язком пункти 7 і 8 просто позбавлені змісту, тому що в цьому випадку сумарна одинична епюра збігається з одиничної.

Зупинимося докладніше на деяких з перерахованих вище етапів розрахунку.

### ***3.4. Обчислення коефіцієнтів і вільних членів канонічних рівнянь***

Цьому етапові розрахунку передує побудова одиничних і вантажних епюр внутрішніх силових факторів (для балок і рам — епюр згинальних моментів). Одиничні епюри будуються від дії безрозмірної одиничної сили або безрозмірного одиничного моменту, що збігаються по напрямку з напрямком відповідної зайдової невідомої в еквівалентній системі, і позначаються через  $\bar{X}_i$ , а одинична епюра — через  $\bar{M}_i$ .

Вантажна епюра будується від зовнішнього навантаження, прикладеного до основної системи. При цьому можна будувати одному епюрові від одночасної дії всіх зовнішніх навантажень або три епюри, окремо від кожного з прикладених навантажень. Така розбивка однієї вантажної епюри на три більш простих, як правило, доцільно тільки тоді, коли серед діючих навантажень є рівномірно розподілена, і епюра моментів на відповідній ділянці під нею є знакозмінною. При цьому в кожному канонічному рівнянні число вільних членів буде дорівнювати числу побудованих вантажних епюр.

Одиничні і вантажні переміщення (коефіцієнти і вільні члени канонічних рівнянь) у загальному випадку можна обчислити методом Мора. Для балок і рам це можна зробити за допомогою правила Верещагіна.

### ***3.5. Основні варіанти перемноження епюр***

Очевидно, що розмаїтість прикладених навантажень і геометричних схем конструкцій приводить до різних, з погляду геометрії, епюр, що перемножуються. Для реалізації правила Верещагіна потрібно знати площини геометричних фігур і координати їхніх центрів тяжіння.

Для перемноження епюр складної форми їх необхідно розбивати на найпростіші. Наприклад, для перемноження двох епюр, що мають вид трапеції, потрібно одну з них розбити на трикутник і прямокутник, помножити площину кожного з них на ординату другої епюри, розташовану під відповідним центром тяжіння, і результати скласти. Аналогічно роблять і для множення криволінійної трапеції на будь-яку лінійну епюру.

Якщо зазначені вище дії проробити в загальному виді, то одержимо для таких складних випадків формули, зручні для використання в практичних розрахунках (Рис. 3.1.). Так, результат перемноження двох трапецій (Рис. 3.1.,а)

$$M_m \times M_n = \frac{L}{6}(2ac + 2bd + ad + bc). \quad (3.5)$$

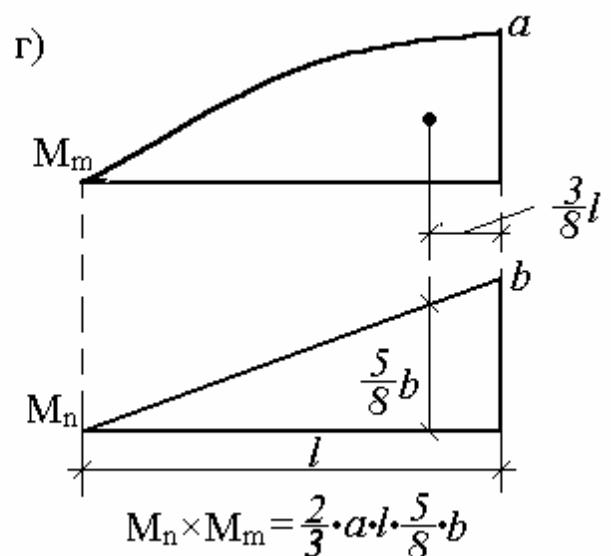
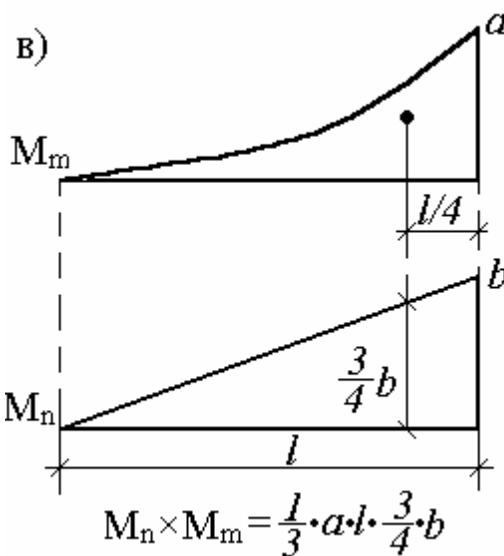
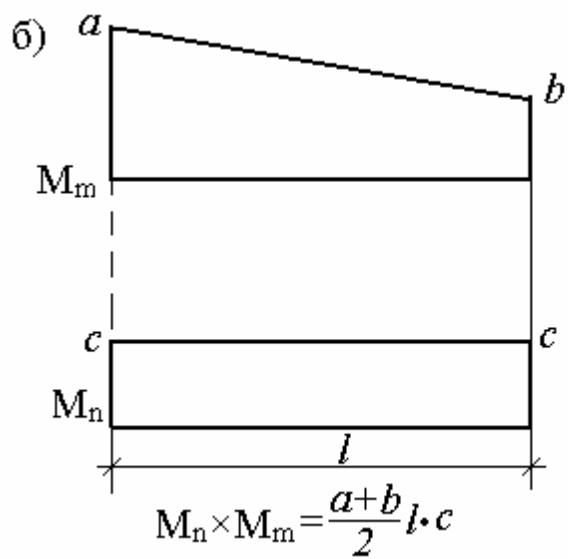
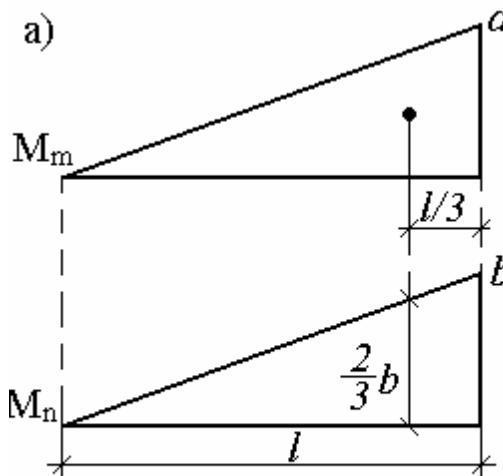


Рис. 3.1.

По формулі (3.5.) можна перемножити й епюри, що мають вид "перекрученіх" трапецій (Рис. 3.2.,б), але при цьому добуток ординат, розташованих по різні сторони від осей епюр, враховується зі знаком мінус.

Якщо одна з епюр, що перемножуються обрислена по квадратній параболі (що відповідає навантаженню рівномірно розподіленим навантаженням), то для перемноження з другою (обов'язково лінійною) епюрою її розглядають як суму (Рис. 3.2.,в) або різницю (Рис. 3.2.,г) трапецеїальної і параболічної епюр. Результат перемноження в обох випадках визначається формулою

$$M_m \times M_n = \frac{L}{6}(ac + 4fg + bd), \quad (3.6.)$$

але значення  $f$  при цьому визначається по-різному (Рис. 3.2., в, г).

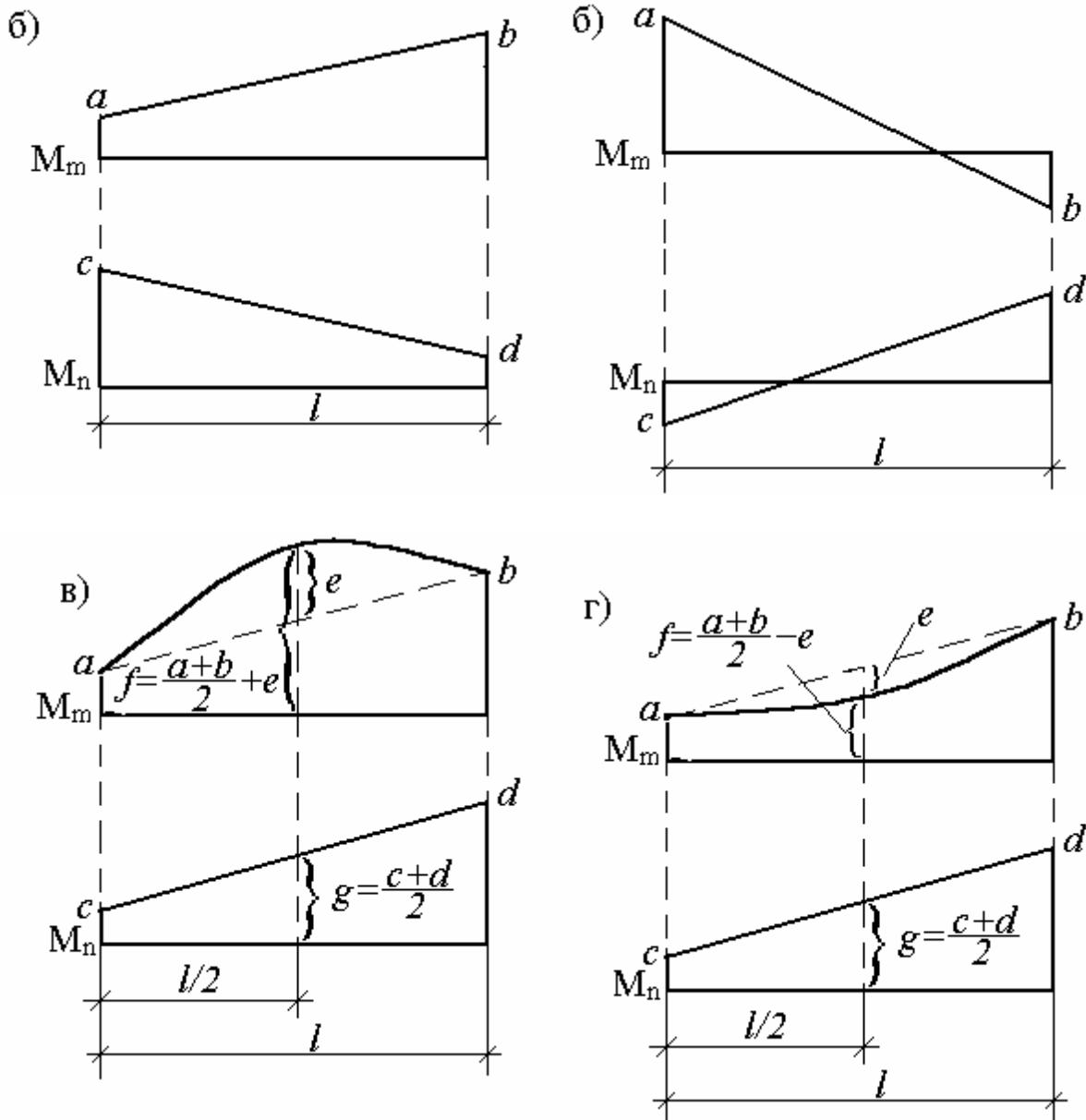


Рис. 3.2.

Можливі випадки, коли жодна з епюр, що перемножуються не є прямолінійною, але хоча б одна з них обмежена ламаними прямыми лініями. Для перемноження таких епюр їх попередньо розбивають на ділянки, у межах кожної з яких принаймні одна епюра є прямолінійною.

### 3.6 Універсальна перевірка коефіцієнтів і вільних членів канонічних рівнянь

Для виконання універсальної перевірки необхідно побудувати сумарну одиничну епюрові  $\overrightarrow{M}_s$  — епюрові моментів від одночасної дії всіх одиничних сил, прикладених до основної системи:

$$\overline{M}_s = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \dots + \overline{M}_n = \sum_{i=1}^n \overline{M}_i.$$

Перемножимо сумарну одиничну епюрові з епюрою  $\overline{M}_i$ :

$$\begin{aligned} \int_S \frac{\bar{M}_i \cdot \bar{M}_S}{EI} ds &= \int_S \frac{1}{EI} \bar{M}_i (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) ds = \\ &= \int_S \frac{1}{EI} \bar{M}_i \bar{M}_1 ds + \int_S \frac{1}{EI} \bar{M}_i \bar{M}_2 ds + \dots + \int_S \frac{1}{EI} \bar{M}_i \bar{M}_n ds = d_{i1} + d_{i2} + \dots + d_{in}. \end{aligned}$$

Таким чином, результат перемноження сумарної і  $i$ -ої одиничної епюри — це переміщення по напрямку  $i$ -го зв'язку від спільної дії одиничних зливих невідомих. Це переміщення дорівнює сумі коефіцієнтів  $i$ -го канонічного рівняння:

$$d_{is} = \int_S \frac{\bar{M}_i \bar{M}_S}{EI} ds = \sum_{i=1}^n d_{ik}. \quad (3.7)$$

Така перевірка називається *порядковою* і виконується для кожного канонічного рівняння.

Замість  $n$  порядкових перевірок найчастіше виконується одна — *універсальна перевірка*, що полягає в перемноженні сумарної одиничної епюри самої на себе і перевірці умови:

$$d_{ss} = \int_S \frac{\bar{M}_s \bar{M}_s}{EI} ds = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n d_{ik}. \quad (3.8)$$

Якщо універсальна перевірка виконується, виходить, одиничні переміщення обчислені правильно; якщо ні — необхідно виконати порядкові перевірки, що дозволить уточнити переміщення, при обчисленні якого допущена помилка.

Для виконання перевірки вантажних переміщень необхідно перемножити сумарну одиничну і вантажну епюри згинальних моментів:

$$\begin{aligned} \int_S \frac{\bar{M}_s M_F}{EI} ds &= \int_S \frac{M_F}{EI} (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) ds = \int_S \frac{\bar{M}_1 M_F}{EI} ds + \\ &+ \int_S \frac{\bar{M}_2 M_F}{EI} ds + \dots + \int_S \frac{\bar{M}_n M_F}{EI} ds = \Delta_{1F} + \Delta_{2F} + \dots + \Delta_{nF}. \end{aligned}$$

Таким чином, перевірка вільних членів системи канонічних рівнянь (3.4) складається у виконанні умови

$$\Delta_{SF} = \int_S \frac{\bar{M}_s M_F}{EI} ds = \sum_{i=1}^n \Delta_{if} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

### 3.7. Побудова кінцевих епюр внутрішніх силових факторів

Остаточні епюри можна побудувати двома способами.

Тому що при знайдених значеннях зливих невідомих  $X_i$  виконуються умови спільноті деформацій, то з розрахунку основної системи можна одержати всі шукані внутрішні зусилля заданої системи. На підставі принципу незалежності дії сил для згинальних моментів одержимо

$$M = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n + M_F,$$

або, враховуючи що

$$M_1 = \bar{M}_1 X_1; M_2 = \bar{M}_2 X_2, \dots, M_n = \bar{M}_n X_n,$$

приходимо до виразу

$$M = \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2 + \dots + \overline{M}_n X_n + M_F = \sum_{i=1}^n \overline{M}_i X_i + M_F. \quad (3.9)$$

Аналогічно визначаються повздовжні і поперечні сили:

$$Q = \overline{Q}_1 X_1 + \overline{Q}_2 X_2 + \dots + \overline{Q}_n X_n + Q_F = \sum_{i=1}^n \overline{Q}_i X_i + Q_F, \quad (3.10)$$

$$N = \overline{N}_1 X_1 + \overline{N}_2 X_2 + \dots + \overline{N}_n X_n + N_F = \sum_{i=1}^n \overline{N}_i X_i + N_F. \quad (6.10)$$

Другий спосіб базується на тому, що в результаті обчислення реакцій зв'язків  $X_i$  вихідна статично невизначена система приведена до статично визначеної системи, завантаженої зовнішніми навантаженнями і реакціями зв'язків. Тому остаточні епюри внутрішніх силових факторів можна побудувати для еквівалентної системи, обчисливши попередньо (і то не завжди) з умов рівноваги опорні реакції останньої.

Недоліком першого способу є та обставина, що для його реалізації необхідно додатково побудувати епюри  $\overline{Q}_i$ ,  $\overline{N}_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ),  $Q_F$ ,  $N_F$ , які не використовуються в розрахунку методом сил і тому не були побудовані раніше.

У зв'язку з цим для побудови остаточних епюр більш раціональним представляється другий спосіб, а умову (3.9) можна використовувати як додаткову перевірку.

### 3.8. Перевірка кінцевої епюри згинальних моментів

Ця перевірка виконується в двох варіантах: *статична* і *кінематична*.

При статичній перевірці, виконуваної звичайно для рам, вирізують вузли і записуються умови їхньої рівноваги під дією вузлових зосереджених моментів і згинальних моментів на кінцях стержнів. Ця перевірка є допоміжною і виконується автоматично при правильних епюрах згинальних моментів в основній системі і при виконанні кінематичної перевірки.

Статична перевірка епюр  $Q$  і  $N$  полягає в тому, що для будь-якої відсіченої частини рами сума проекцій на дві осі усіх діючих сил — зовнішніх навантажень і внутрішніх зусиль — повинна бути дорівнювати нулеві.

Основною перевіркою кінцевої епюри моментів у методі сил є кінематична перевірка, що може бути *порядковою* або *універсальною*.

При порядковій перевірці кожна одинична епюра моментів  $\overline{M}_i$  перемножується з остаточною епюрою моментів  $M$ :

$$\begin{aligned} \int_S \frac{\overline{M}_i M}{EI} ds &= \int_S \frac{\overline{M}_i}{EI} (\overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2 + \dots + \overline{M}_n X_n + M_F) ds = \\ &= \int_S \frac{\overline{M}_i \overline{M}_1 X_1}{EI} ds + \int_S \frac{\overline{M}_i \overline{M}_2 X_2}{EI} ds + \dots + \int_S \frac{\overline{M}_i \overline{M}_n X_n}{EI} ds + \int_S \frac{\overline{M}_i M_F}{EI} ds = \\ &\quad d_{i1} X_1 + d_{i2} X_2 + \dots + d_{in} X_n + \Delta_{iF} = 0. \end{aligned}$$

Таким чином, у результаті перемноженняожної одиничної епюри з кінцевою епюрою моментів одержимо нуль:

$$\Delta_i = \int_S \frac{\bar{M}_i M}{EI} ds = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.11)$$

Варіантом порядкової перевірки є *перевірка по замкнутому контурові*, що складається в тому, що сума приведених (тобто розподілених на жорсткість відповідного стрижня або його ділянки) площ епюри  $M$ , що знаходяться усередині кожного замкнутого безшарнірного контуру, повинна бути дорівнює сумі приведених площ, що знаходяться зовні цього контуру.

Підсумовуючи вираз типу (3.11) для всіх  $n$ , одержимо вираз, що служить для *універсальної кінематичної перевірки* остаточної епюри згинальних моментів:

$$\Delta_s = \int_S \frac{\bar{M}_s M}{EI} ds = 0, \quad (3.12)$$

тобто результат перемноження сумарної одиничної й остаточної епюр моментів повинний бути дорівнює нулеві.

Формулу (3.12) можна інтерпретувати в такий спосіб: умовне переміщення еквівалентної, або, що те ж саме, заданої системи по напрямку всіх невідомих від дії всіх невідомих і зовнішніх навантажень, дорівнює нулеві.

### 3.9. Визначення переміщень у статично невизначеніх системах

Для визначення переміщення в статично невизначеній системі використовується тотожність заданої й еквівалентної систем в тому сенсі, що якщо умови спільноті деформацій виконуються, тобто справедливі рівняння (6.4), того переміщення в еквівалентній системі відповідають переміщенням заданої системи. Тоді, побудувавши для основної системи епюру згинальних моментів  $\bar{M}$  від одиничної сили (або одиничного моменту), прикладеної в напрямку шуканого переміщення, величину переміщення знаходимо по формулі

$$\Delta = \int_S \frac{\bar{M} M}{EI} ds, \quad (3.13)$$

де  $M$  — епюра згинальних моментів від зовнішнього навантаження, побудована для статично невизначененої системи.

Відзначимо, що при обчисленні переміщення  $\Delta$  можна вчинити і навпаки: одиничну епюру моментів  $\bar{M}$  побудувати в статично невизначеній заданій системі, а епюру моментів від зовнішніх навантажень  $M$  — в основній (статично визначній) системі.

## 4. Плоскі ферми

### 4.1. Класифікація ферм

*Фермою* називається стержнева система, що залишається геометрично незмінною після умовної заміни її жорстких вузлів шарнірними. Як правило, ферми використовують для перекриття більших прольотів, коли застосування суцільних балок стає економічно невигідним внаслідок неповного використання матеріалу стінки, де напруги істотно менші, ніж у полках (Рис. 4.1.), і необхідності створення вертикальної стінки у зв'язку з можливістю її випучування.

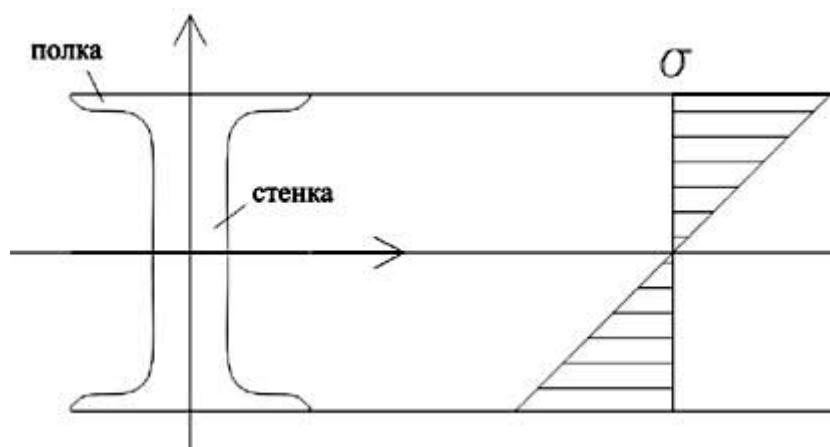


Рис. 4.1.

У таких випадках суцільну балку заміняють стержневою системою - фермою, елементи якої (стержні) при дії зосереджених навантажень, прикладених у вузлах, працюють, в основному, на центральне розтягування-стиск, що дає можливість істотно краще використовувати матеріал конструкції, тому що напруги розподіляються практично рівномірно. Ферма легше балки із суцільною стінкою при однакових прольоті й висоті.

Іноді використовуються *просторові ферми*, розрахунок яких звичайно зводиться до розрахунку декількох плоских ферм.

Відстань між осями опор ферми називається її *прольотом*. Стержні, розташовані по зовнішньому контурі, називаються *поясами* й утворять пояси. Вертикальні стержні, що з'єднують пояси, називаються *стійками*, похилі – *розкосами*. Стійки й розкоси утворять *грати* ферми. Відстань між сусідніми вузлами пояса ферми називається *панеллю*.

Класифікацію ферм звичайно проводять по *n'яти* ознаках:

- 1) характеру обрису зовнішнього контуру; 2) типу грат; 3) типу обпирання ферми;
- 4) призначенню; 5) рівню їзди.

По характеру обрису розрізняють ферми з паралельними поясами й з ламаним, або полігональним розташуванням поясів (Рис. 4.2.).

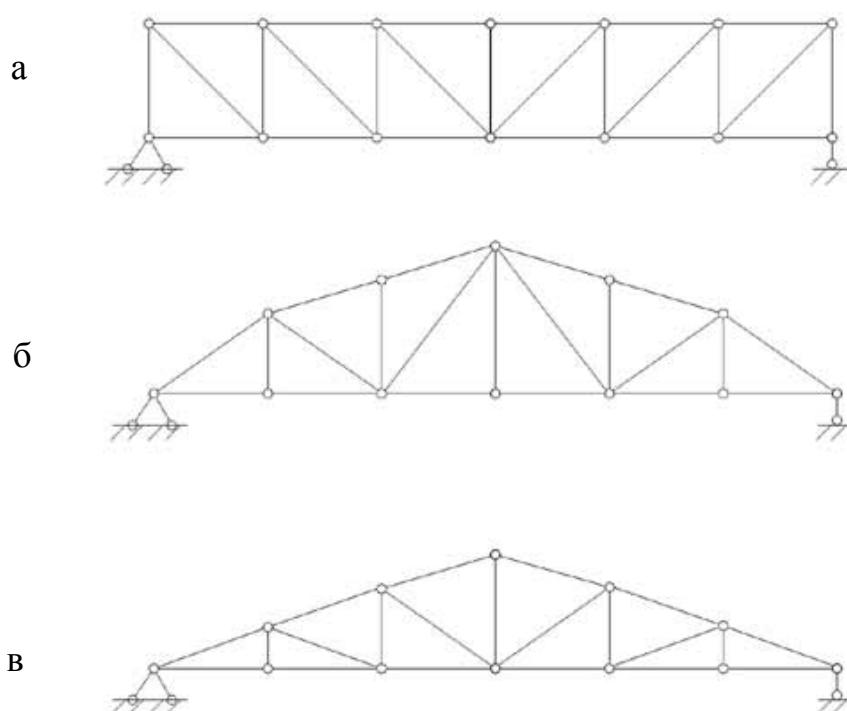


Рис. 4.2.

По типу грат розрізняють ферми із трикутними гратами (Рис. 4.3.,а), з розкісними (Рис. 4.3.,б), з напіврозкісними (рис.3.3,в), і з ромбічними (Рис. 4.3.,г).

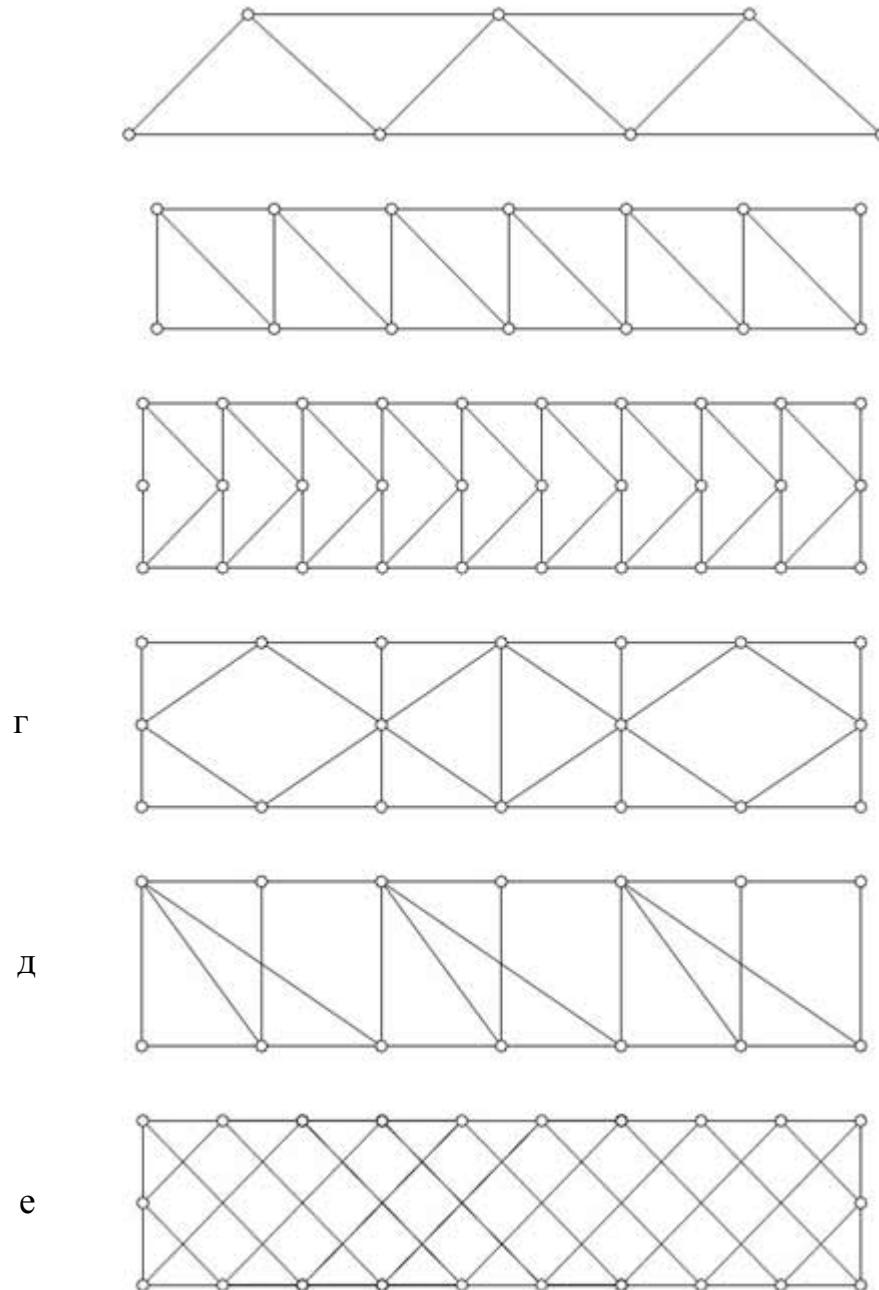
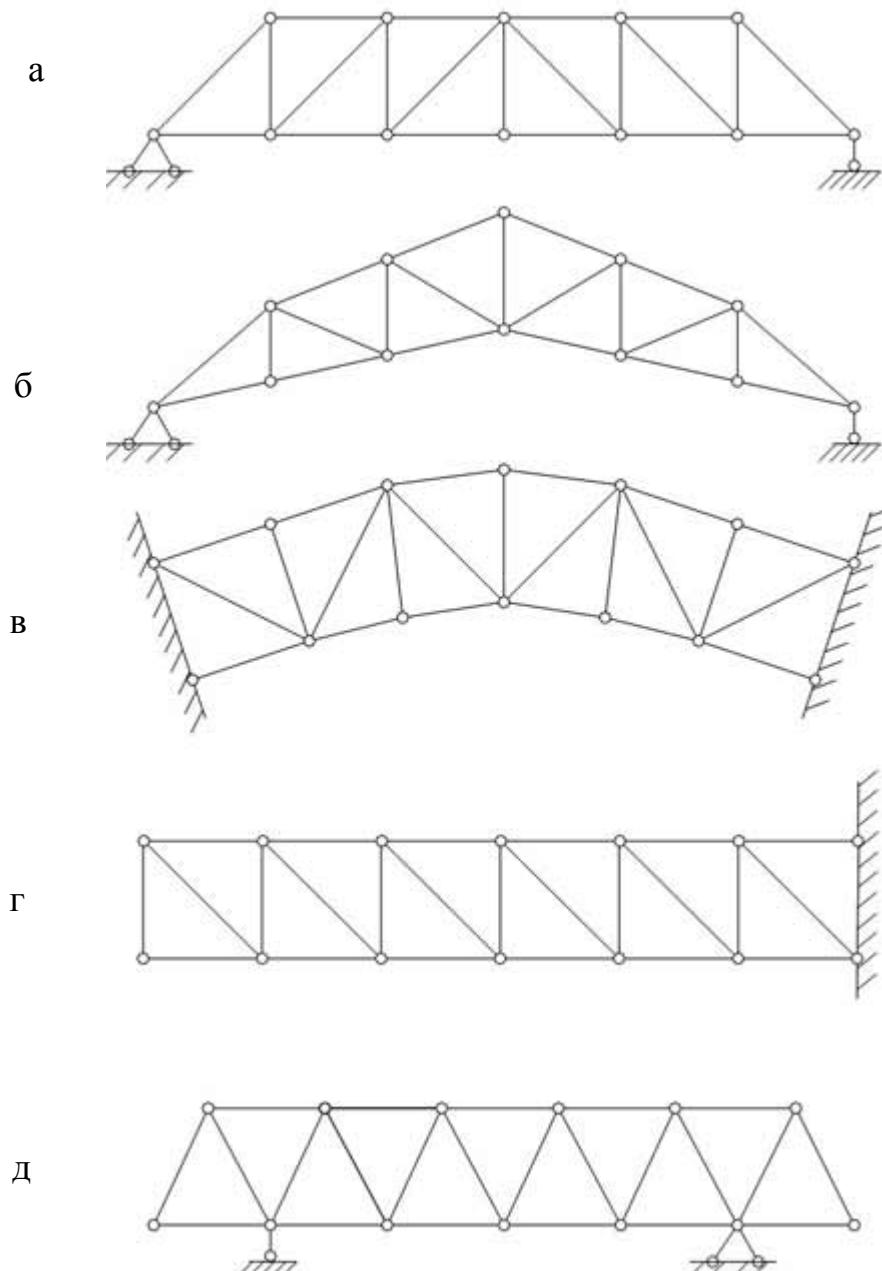


Рис. 4.3.

По типу обпирання ферми можуть бути закріпленими з обох кінців – балковими (Рис. 4.4.,а) або арковими (Рис. 4.4.,б,в), консольними (Рис. 4.4.,г), балочно-консольними (Рис. 4.4.,д).

Залежно від призначення розрізняють ферми стропильні, кранові, баштові, мостові.



*Рис. 4.4.*

Мостові ферми залежно від *рівня їзди* діляться на ферми з їздою понизу, з їздою поверху й з їздою посередині.

#### **4.2. Визначення зусиль у стержнях найпростіших ферм**

*Найпростішими* називаються ферми, утворені із шарнірного трикутника шляхом послідовного приєднання вузлів, причому, кожного за допомогою двох стержнів, що не лежать на одній прямій.

Такі ферми завжди будуть геометрично незмінними й статично визначеними.

Для визначення опорних реакцій такої ферми можна скласти три рівняння рівноваги.

Внутрішні зусилля (повздовжні сили) визначають, виділяючи перетинами вузли або окремі частини ферми й розглядаючи умови їхньої рівноваги під дією зовнішніх навантажень і зусиль у розсічених стержнях. Якщо  $K$  - число вузлів

ферми, то можна скласти 2К-3 незалежних рівнянь рівноваги. Визначення внутрішніх зусиль можна виконувати різними способами: 1) *способом моментної точки*; 2) *способом проекцій*; 3) *способом заміни стержнів* (звичайно використовується при розрахунку складних ферм); 4) *графічним способом*.

#### **4.2.1. Спосіб моментної точки**

Цей спосіб звичайно використовується в тих випадках, коли вдається провести перетин ферми так, щоб перерізаними виявилися три її стержні, напрямки осей яких не перетинаються в одній точці.

Формуючи послідовно рівняння сум моментів всіх зовнішніх сил, що діють на відсічену частину ферми, щодо кожної з моментів них точок (точок перетинання осей перерізаних стержнів), будемо одержувати щораз рівняння з одним невідомим - зусиллям у розсіченому стержні, вісь якого не проходить через розглянуту моментну точку.

При складанні рівнянь рівноваги всі невідомі зусилля в стержнях умовно приймаються позитивними, тобто розтягуючи ми ї, отже, спрямованими від вузлів. Якщо в результаті розрахунку зусилля виявиться негативним, виходить, воно є стискаючим і спрямованим до вузла.

Зусилля в елементах ферми звичайно прийнято позначати так:

$U_{mn}$  – в елементах нижнього пояса:

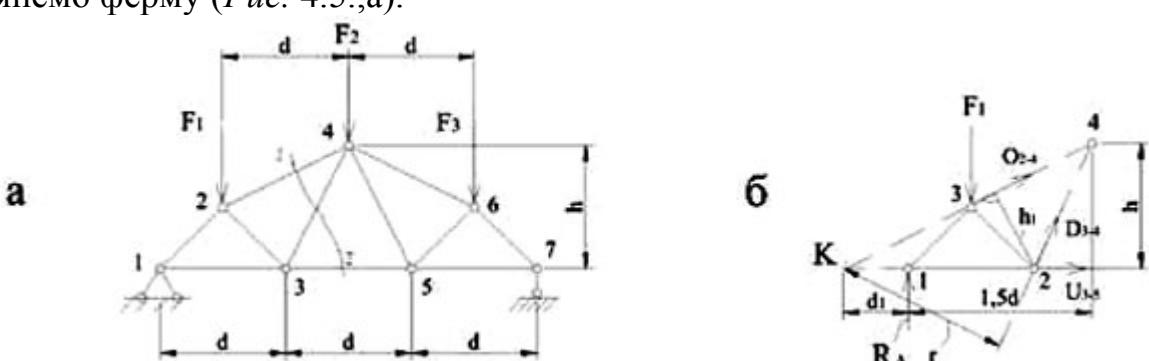
$O_{mn}$  – в елементах верхнього пояса:

$D_{\text{мн}}$  – зусилля в розкосах:

## *V*иснулля в стійках:

де  $m$ ,  $n$  — номера вузлів, що з'єднуються стержнем.

Розглянемо ферму (Рис. 4.5 а).



Pyc. 4.5.

Для визначення зусиль у стержнях 2-4, 3-4, 3-5 розсічмо ферму перетином  $I - I$ , що перетинає всі ці стержні. Як видно (Рис. 4.5.,а), перетин  $I - I$  повністю розсікає ферму на дві частини (“наскрізь”), тому в літературі іноді зустрічається інша назва способу моментної точки – *спосіб наскрізних перетинів*.

Для визначення зусилля  $U_{3-5}$  складемо суму моментів всіх сил, що діють на ліву частину ферми, щодо точки перетинання стержнів 2-4 і 3-4 – точки 4. Ця точка є *моментною* при визначенні зусилля  $U_{3-5}$ :

$$\sum M_4^{leg} = 0: \quad R_a \cdot 1,5d - F_1 \cdot d - U_{3-5} \cdot h = 0;$$

$$U_{3-5} = \frac{R_a \cdot 1,5d - F_1 \cdot d}{h} = \frac{M_4^0}{h};$$

де  $M_4^0$  — момент всіх сил, прикладених до лівої відсіченої частини ферми, щодо вузла 4, дорівнює згинаючому моменту у звичайній шарнірній балці в перетині, що відповідає по розташуванню моментній точці 4. Звідси слідує *висновок*: зусилля в елементі нижнього поясу ферми дорівнює відношенню згинаючого (балкового) моменту у відповідному перетині простої балки до плеча (у цьому випадку -  $h$ ).

При визначенні зусилля в елементі 2-4 моментною буде точка 3 (*Рис. 4.4.,б*). Запишемо суму моментів всіх сил, прикладених до лівої відсіченої частини, щодо цієї точки:

$$\sum M_3^{\text{лев}} = 0 : R_a \cdot d - F_1 \cdot 0,5d + O_{2-4} \cdot h = 0;$$

$$O_{2-4} = -\frac{R_a \cdot d - F_1 \cdot 0,5d}{h} = -\frac{M_3^0}{h_1}.$$

Тому що балковий момент  $M_3^0$  при заданому навантаженні позитивний, то зусилля  $O_{24} < O$ , тобто стержень 2-4 стиснутий.

При визначенні зусилля в розкосі 3-4 моментна точка (точка  $K$ ) лежить поза контуром ферми (*Рис. 4.5.,б*):

$$\sum M_K^{\text{лев}} = 0 : R_a \cdot d_1 - F_1(d_1 + 0,5d) + D_{3-4} \cdot r = 0,$$

$$D_{3-4} = \frac{-R_a \cdot d + F_1(d_1 + 0,5d)}{r} = \frac{M_K^0}{r}.$$

Спосіб моментної точки можна використовувати не тільки при розрахунку найпростіших ферм, але й при визначенні зусиль у деяких стержнях складних ферм (відповідні приклади розрахунку будуть розглянуті нижче).

Можна рекомендувати наступні *межі застосовності способу моментної точки*:

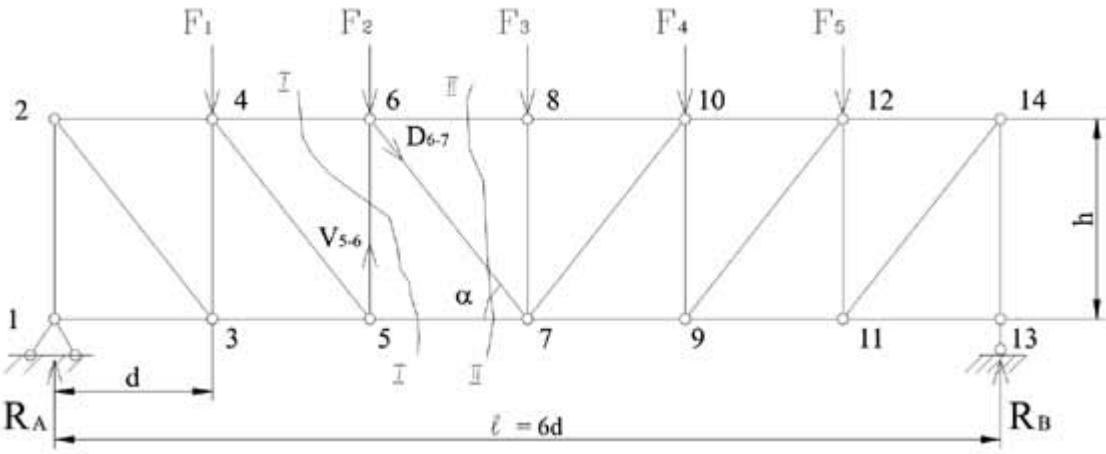
1. Коли вдається провести перетин, що розсікає крім розглянутого стержня будь-яке число стержнів, що сходяться в одній загальній точці, що не лежить на осі даного стержня (моментна точка).
2. Коли розріз перетинає більше трьох стержнів, що не сходяться в одній точці якщо зусилля у всіх стержнях, крім трьох, відомі.
3. Коли можна провести перетини, що перетинають будь-яке число стержнів більше трьох, якщо при цьому кожний з додаткових (понад три) стержнів перетинається двічі (при цьому виділені перетином такі стержні будуть урівноважені зусиллями, покладеними по їхніх кінцях).

#### 4.2.2. Спосіб проекцій

Цей спосіб застосовується у двох варіантах:

- 1) розглядається рівновага відсіченої частини ферми, коли два з розсічених стержнів паралельні один одному; 2) розглядається рівновага виділеного вузла (*спосіб вирізання вузлів*).

Для ілюстрації першого варіанта розглянемо ферму (*Рис. 4.6.*) і визначимо зусилля в стійці 5-6 і розкосі 6-7.



Ruc. 4.6.

Для визначення зусилля  $V_{5-6}$  розріжемо ферму перерізом 1-2. Так як стержні 4-5 і 5-7 паралельні один одному, то моментна точка перебуває в нескінченості й спосіб моментної точки не можна застосовувати. Складемо умову рівноваги - суму проекцій всіх сил, прикладених до лівої відсіченої частини, на вертикальну вісь:

$$\sum Y = 0 : R_a - F_1 + V_{5-6} = 0 \Rightarrow V_{5-6} = -(R_a - F_1) = -Q^0,$$

де  $Q^0$  – балкова поперечна сила.

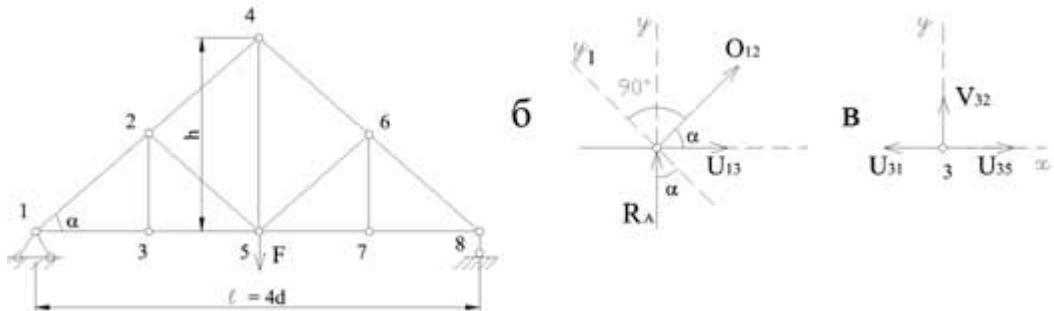
Для визначення зусилля  $D_{6-7}$  проведемо перетин 2-2. З розгляду лівої відсіченої частини:

$$\sum Y = 0 : R_a - F_1 - F_2 - D_{6-7} \sin \alpha = 0;$$

$$D_{6-7} = \frac{R_a - F_1 - F_2}{\sin \alpha} = \frac{Q^0}{\sin \alpha}.$$

Тепер розглянемо другий варіант способу проекцій – *спосіб вирізання вузлів*. Застосовуючи його послідовно до кожного вузла, можна визначити зусилля у всіх стержнях ферми, причому, починати потрібно з вузла, у якому сходяться два стержні (Ruc. 4.7.,а).

Визначимо зусилля в стержнях 1-2, 1-3, 2-3, 3-5. Виріжемо вузол 1 і розглянемо умови його рівноваги (рис. 4.7,б).



Ruc. 4.7.

Для визначення зусилля  $O_{12}$  спроектуємо всі сили на вертикальну вісь:

$$\sum Y = 0 : R_a + O_{12} \sin \alpha = 0 \Rightarrow O_{12} = -\frac{R_a}{\sin \alpha}.$$

Для визначення зусилля  $U_{13}$  проведемо допоміжну вісь  $y$ , перпендикулярну напрямку  $O_{12}$ :

$$\sum Y_1 = 0 : R_a \cos \alpha - U_{13} \sin \alpha = 0 \Rightarrow U_{13} = R_a \operatorname{ctg} \alpha.$$

Зусилля  $U_{13}$  можна визначити й з умови  $\sum X = 0$ , але тоді воно буде виражено через знайдене раніше зусилля  $O_{12}$ :

$$\sum X = 0: U_{13} + O_{12} \cos\alpha = 0 \Rightarrow U_{13} = -O_{12} \cos\alpha.$$

Для визначення зусиль у стержнях 2-3 і 3-5 виріжемо вузол 3 (рис.3.7,в):

$$\sum X = 0: -U_{13} + U_{35} = 0 \Rightarrow U_{35} = U_{13};$$

$$\sum Y = 0; V_{32} = 0.$$

Останній результат дозволяє зробити висновок про те, що якщо у вузлі сходяться три стержні, два з яких лежать на одній прямій, то зусилля в цих двох стержнях при відсутності у вузлі зовнішнього навантаження рівні один одному, а зусилля в третьому стержні при будь-якому його розташуванні (стійка, розкіс) дорівнюють нулю.

Якщо продовжити визначення зусиль у стержнях фермах, вирізивши, наприклад, вузол 2 (рис.3.7,а), то вони будуть визначатися через обчислені раніше зусилля, отже, при розрахунку ферми способом вирізання вузлів зусилля в деяких стержнях можна знайти, тільки визначивши попередньо зусилля в інших стержнях, а це означає нагромадження погрішностей у процесі розрахунку.

На закінчення відмітимо, що якщо до кута, у якому сходяться два стержні, що не лежать на одній прямій, не прикладене зовнішнє навантаження, то зусилля в обох стержнях дорівнюють нулю. Такі стержні звичайно називаються нульовими.

#### 4.2.3 Графічний спосіб визначення зусиль (діаграма Максвелла-Кремони)

Цей спосіб заснований на графічному прийомі розкладання сили на два напрямки й полягає в наступному: буквами або цифрами позначають полігони (поля), тобто площині, обмежені з усіх боків стержнями або примикаючі до зовнішнього контуру ферми, і відділені один від одного зовнішніми силами, включаючи опорні реакції (Рис. 4.8.).

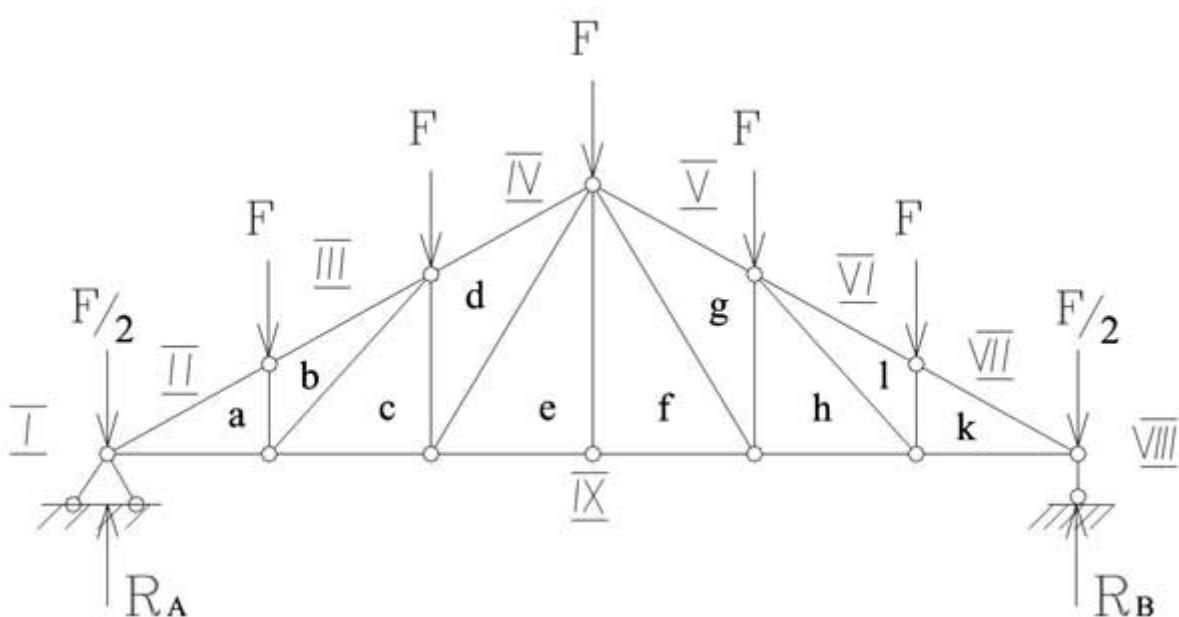


Рис. 4.8.

У результаті кожне внутрішнє зусилля й кожна зовнішня сила позначаються двома значками, що відповідають назвам тих полігонів, границею яких ця зовнішня сила або зусилля є. Будують багатокутник сил на зовнішніх силах, включаючи опорні реакції. Кожна із сил цього багатокутника позначається буквами або цифрами, поставленими на її кінцях, при цьому зберігається напрямок сил.

Потім вибирають вузол, у якому сходяться два стержні. Прикладену у вузлі силу розкладають по напрямках цих стержнів, у результаті чого визначають значення й напрямки діючих у них зусиль (напрямки визначають розтягання-стиск). Розкласти сили на дві складові можна побудовою силового трикутника. Такий трикутник повинен бути замкнутим, тому що вузол, для якого він будується, перебуває в рівновазі. Якщо до вузла прикладені дві й більше відомі сили, то будують багатокутник рівноваги відомих і невідомих сил. Після цього переходять до наступного вузла й для нього проводять аналогічні побудови. У такий спосіб визначають зусилля в усіх стержнях ферми.

# Завдання до розрахунково-графічної роботи №1

**Тема:** “Розрахунок шарнірно-консольних балок. Побудова епюор  $Q$ ,  $M$ ”.

**Задача:** Для багатопролітної балки необхідно побудувати епюри внутрішніх силових факторів.

На схемах (Рис. 1.1-1.2) наведені варіанти шарнірно-консольних балок.

Вихідні дані для розрахунку наведені в таблиці 1.1.

*Таблиця 1.1*

Позначення	№ групи I	№ групи II
$l$ , м	2	3
$M$ , кНм	10	8
$F$ , кН	6	7
$q$ , кН/м	4	3

Схеми шарнірно-консольних балок

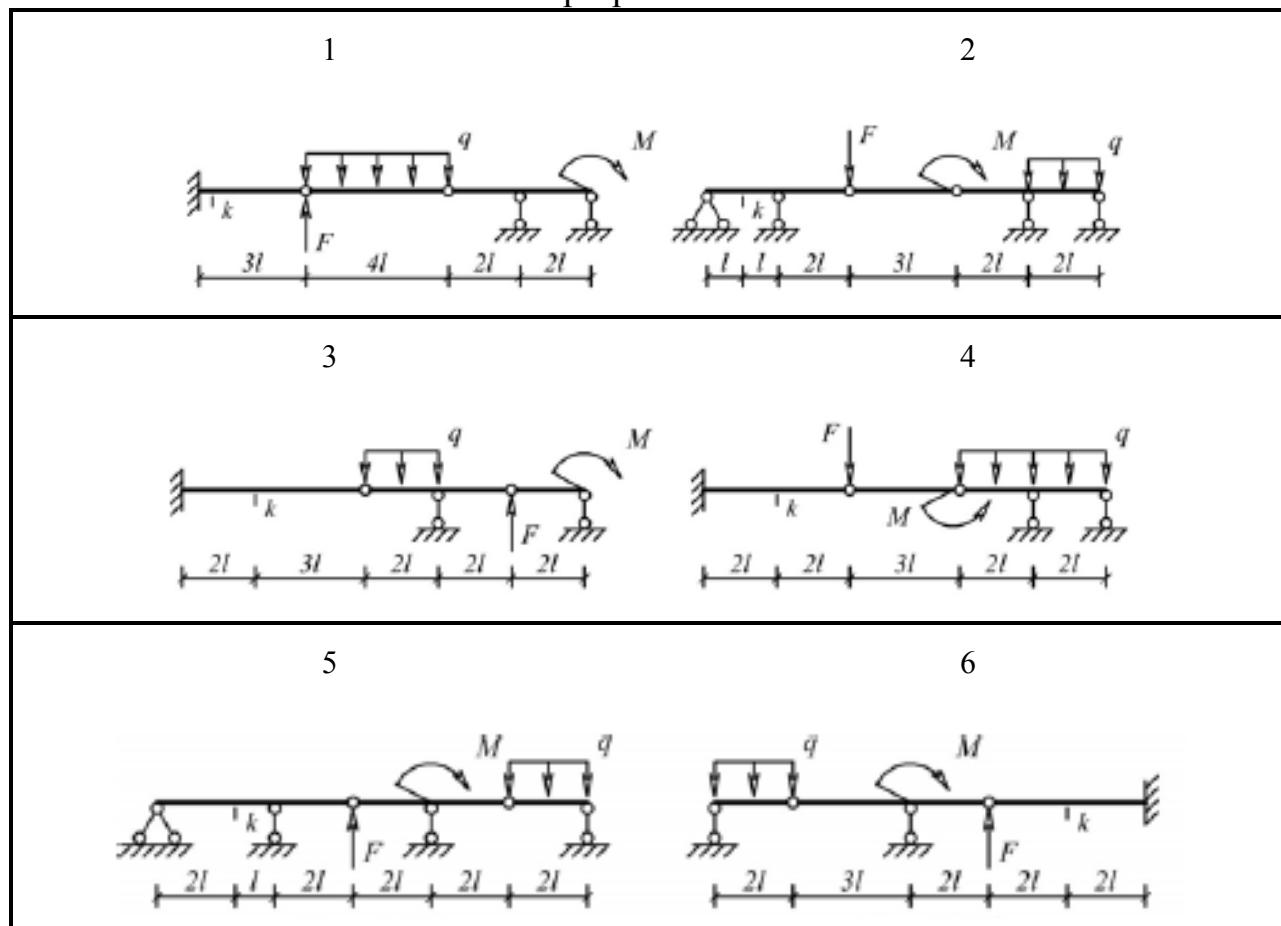
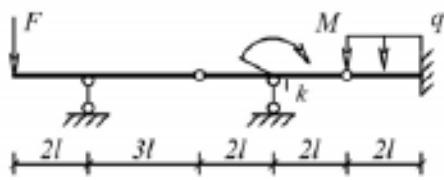
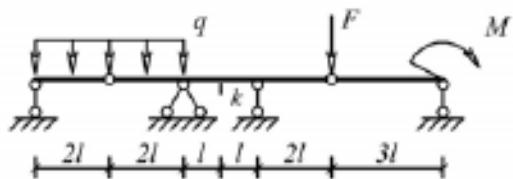


Рис. 1.1

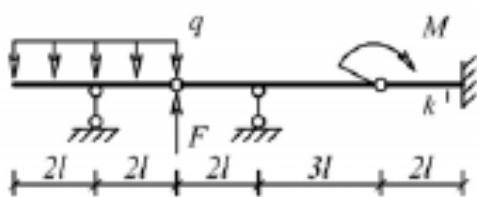
7



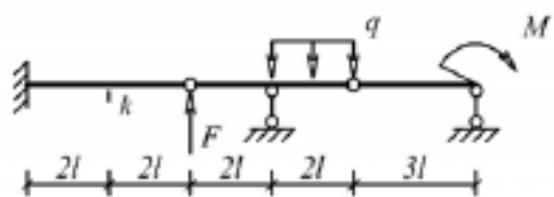
8



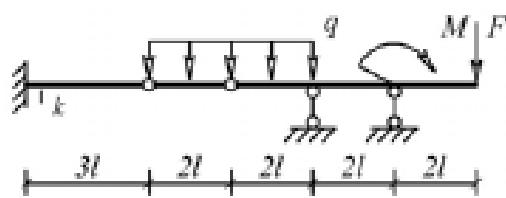
9



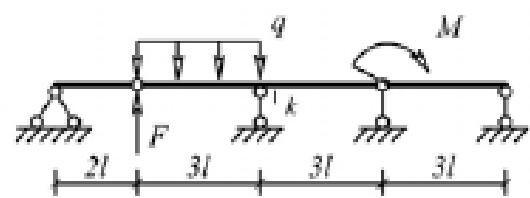
10



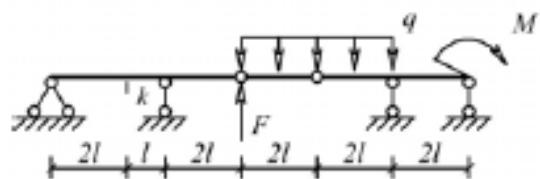
11



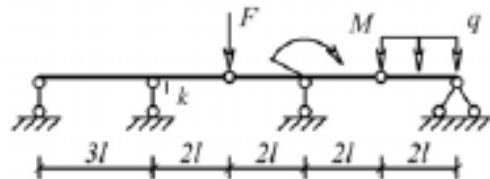
12



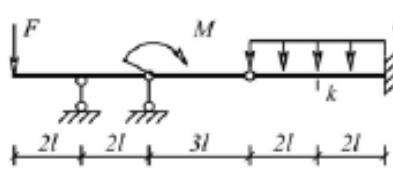
13



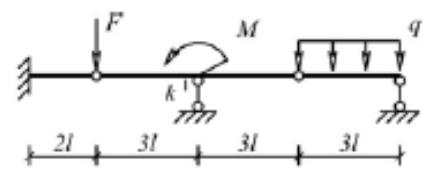
14



15



16



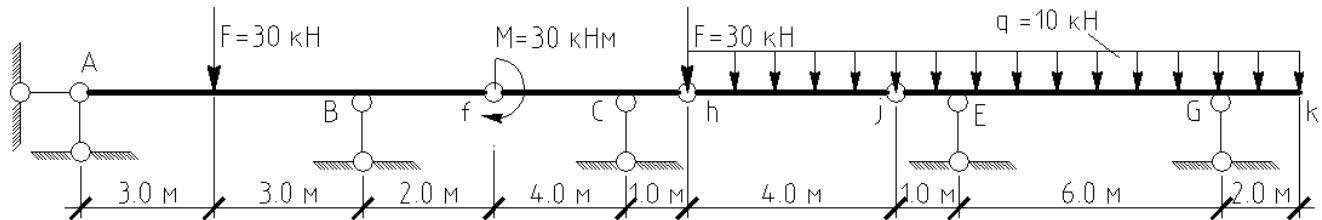
Puc. 1.2

**Приклади розв'язання задач з  
теми: “Розрахунок шарнірно-консольних балок. Побудова епюр Q, M ”.**

## ПРИКЛАД 1

Для заданої шарнірно–консольної балки, яка зображена на малюнку необхідно:

- виконати кінематичний та структурний аналіз;
- визначити реакції в'язей;
- побудувати епюри згидаючих моментів та поперечних зусиль;



*Rис. 1.1*

### 1. Кінематичний системи

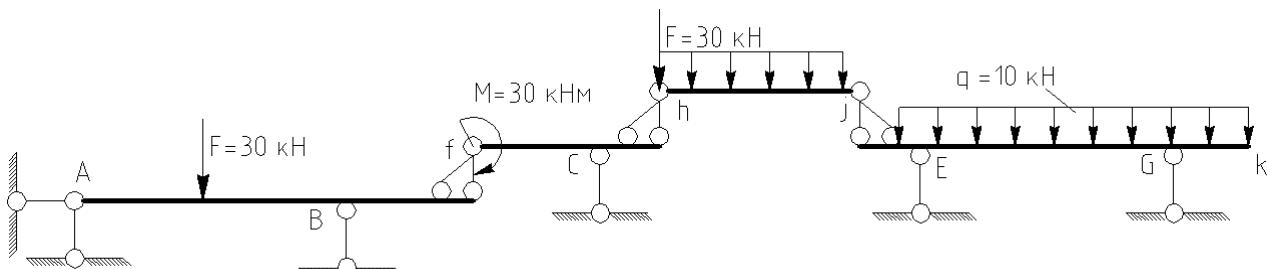
Викреслюємо в масштабі шарнірно–консольну балку, виконуємо для неї кінематичний аналіз.

Перевіримо задану систему на зовнішню статичну невизначеність за формулою:

$$W = 3D - (2III + C) = 3 \cdot 4 - (2 \cdot 3 + 6) = 0, \text{ звідси випливає, що система статично визначна.}$$

Геометрична незмінність багатопролітної балки випливає з аналізу її “по етажної” схеми показаної на рис. *Рис. 1.2*. Всі диски на цій схемі мають необхідну кількість правильно встановлених в'язів. Звідси випливає що багатопролітна балка статично визначна система ( $W = 0$ ) і геометрично незмінна.

Послідовність розрахунку балки починаємо з верхньої балки  $hj \rightarrow fh \rightarrow Af, jk$ .



*Rис. 1.2*

## 2. Визначаємо опорні реакції

- a) Визначаємо опорні реакції балки  $hj$  та побудуємо для даної ділянки епюри згинаючих моментів та поперечних зусиль.

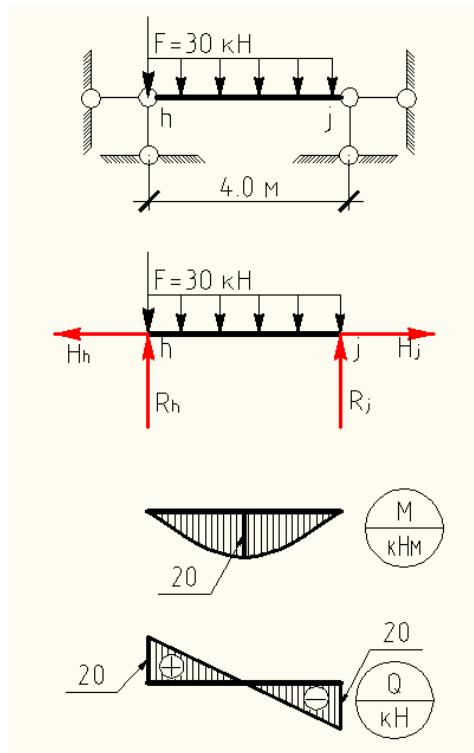


Рис. 1.3

- б) Визначаємо опорні реакції балки  $fjh$  та побудуємо для даної ділянки епюри згинаючих моментів та поперечних зусиль.

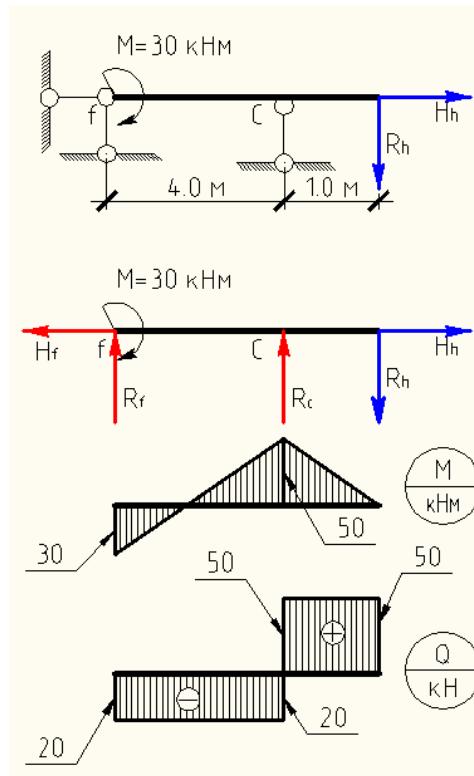


Рис. 1.4

Покажемо складові реакцій опор та визначимо їх Рис. 1.3.

$$\sum m_h = 0; -q \cdot 4 \cdot 2 + R_j \cdot 4 = 0$$

$$R_j = \frac{q \cdot 4 \cdot 2}{4} = \frac{10 \cdot 4 \cdot 2}{4} = \frac{80}{4} = 20,0 \text{ kH}$$

$$\sum m_j = 0; F \cdot 4 + q \cdot 4 \cdot 2 - R_h \cdot 4 = 0$$

$$R_h = \frac{F \cdot 4 + q \cdot 4 \cdot 2}{4} = \frac{30 \cdot 4 + 10 \cdot 4 \cdot 2}{4} = 50,0 \text{ kH}$$

$$\sum F_{ix} = 0; -H_h + H_j = 0$$

$$H_h = H_j$$

**Перевірка:**

$$\sum F_{iy} = R_h - F - q \cdot 4 + R_j = 50 - 30 - 10 \cdot 4 + 20 = 0$$

**Перевірка виконується.**

Покажемо складові реакцій опор та визначимо їх Рис. 1.4.

Сили  $R_h$ ,  $H_h$  визначені в балці  $hj$

$$\sum m_f = 0; -M - R_h \cdot 5 + R_C \cdot 4 = 0$$

$$R_C = \frac{M + R_h \cdot 5}{4} = \frac{30 + 50 \cdot 5}{4} = \frac{80}{4} = 70,0 \text{ kH}$$

$$\sum m_C = 0; -M - R_h \cdot 1 - R_f \cdot 4 = 0$$

$$R_f = \frac{-M - R_h \cdot 1}{4} = \frac{-30 - 50 \cdot 1}{4} = -20,0 \text{ kH}$$

$$\sum F_{ix} = 0; -H_f + H_h = 0$$

$$H_f = H_h$$

**Перевірка:**

$$\sum F_{iy} = R_f + R_C - R_h = -20 + 70 - 50 = 0.$$

**Перевірка виконується.**

в) Визначаємо опорні реакції балки  $Af$  та побудуємо для даної ділянки епюри згидаючих моментів та поперечних зусиль.

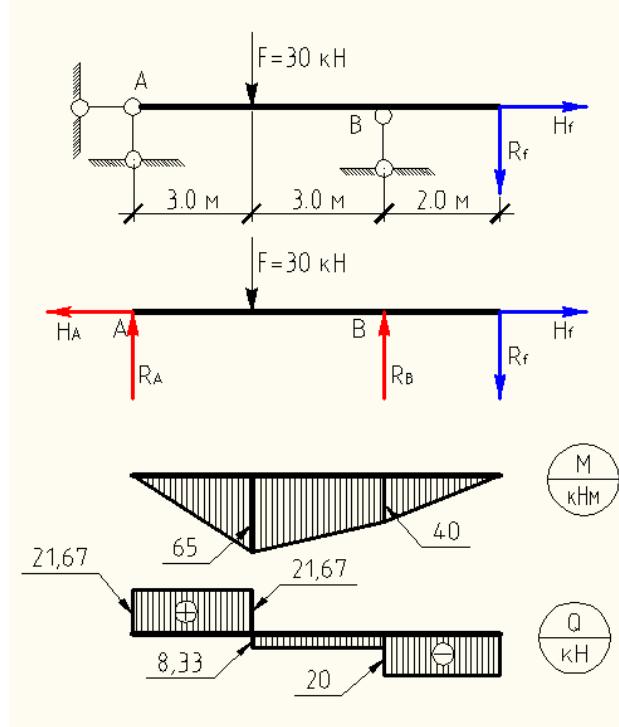


Рис. 1.5

Покажемо складові реакцій опор та визначимо їх Рис. 1.5. Сили  $R_f$ ,  $H_f$  визначені в балці  $fh$ .

$$\sum m_A = 0; -F \cdot 3 - R_f \cdot 8 + R_B \cdot 6 = 0$$

$$R_B = \frac{F \cdot 3 + R_f \cdot 8}{6} = \frac{30 \cdot 3 - 20 \cdot 8}{6} = \\ = \frac{90 - 160}{6} = \frac{70}{6} = -11,67 \text{ kH}$$

$$\sum m_B = 0; F \cdot 3 - R_f \cdot 2 - R_A \cdot 6 = 0$$

$$R_A = \frac{F \cdot 3 - R_f \cdot 2}{6} = \frac{30 \cdot 3 + 20 \cdot 2}{6} = 21,67 \text{ kH}$$

$$\sum F_{ix} = 0; -H_A + H_f = 0; H_A = H_f$$

**Перевірка:**

$$\sum F_{iy} = R_A + R_B - R_h = 21,67 - 11,67 - 20 = 0$$

**Перевірка виконується.**

г) Визначаємо опорні реакції балки  $jk$  та побудуємо для даної ділянки епюри згидаючих моментів та поперечних зусиль.

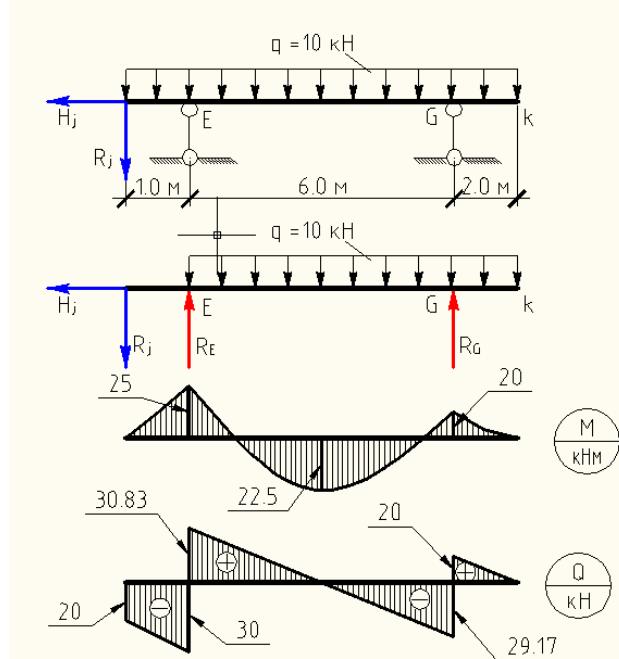


Рис. 1.6

Покажемо складові реакцій опор та визначимо їх Рис. 1.6. Сили  $R_j$ ,  $H_j$  визначені в балці  $hj$ .

$$\sum m_E = 0; R_j \cdot 1 - q \cdot 9 \cdot 3,5 + R_G \cdot 6 = 0$$

$$R_G = \frac{-R_j \cdot 1 + q \cdot 9 \cdot 3,5}{6} = \frac{-20 \cdot 1 + 10 \cdot 9 \cdot 3,5}{6} = \\ = \frac{-20 + 315}{6} = \frac{295}{6} = 49,17 \text{ kH}$$

$$\sum m_G = 0; R_j \cdot 7 + q \cdot 9 \cdot 2,5 - R_E \cdot 6 = 0$$

$$R_E = \frac{R_j \cdot 8 + q \cdot 9 \cdot 2,5}{6} = \frac{20 \cdot 7 + 10 \cdot 9 \cdot 2,5}{6} = \\ = \frac{140 + 225}{6} = 60,83 \text{ kH}$$

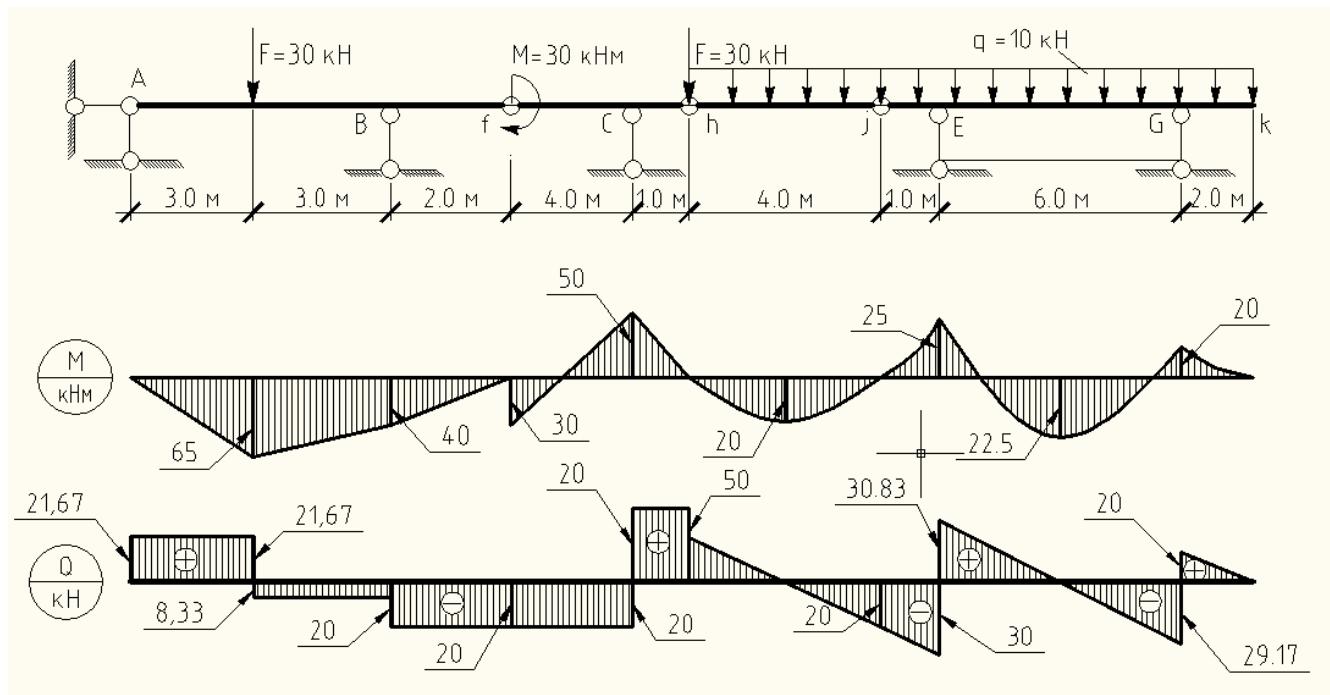
$$\sum F_{ix} = 0; H_j = 0 \rightarrow H_h = H_f = H_A = 0;$$

**Перевірка:**

$$\sum F_{iy} = -R_j + R_E - q \cdot 9 + R_G = \\ = -20 + 60,83 - 10 \cdot 9 + 49,17 = 0$$

**Перевірка виконується.**

**3. Будуємо епюри згинаючих моментів та  
поперечних зусиль для всієї багатопролітної балки**



*Puc. 1.7*

## Завдання до розрахунково-графічної роботи №2

**Тема:** “Побудова епюор Q, M і N для статично визначеній рами”.

**Задача:** Для статично визначеній рами необхідно побудувати епюри внутрішніх силових факторів.

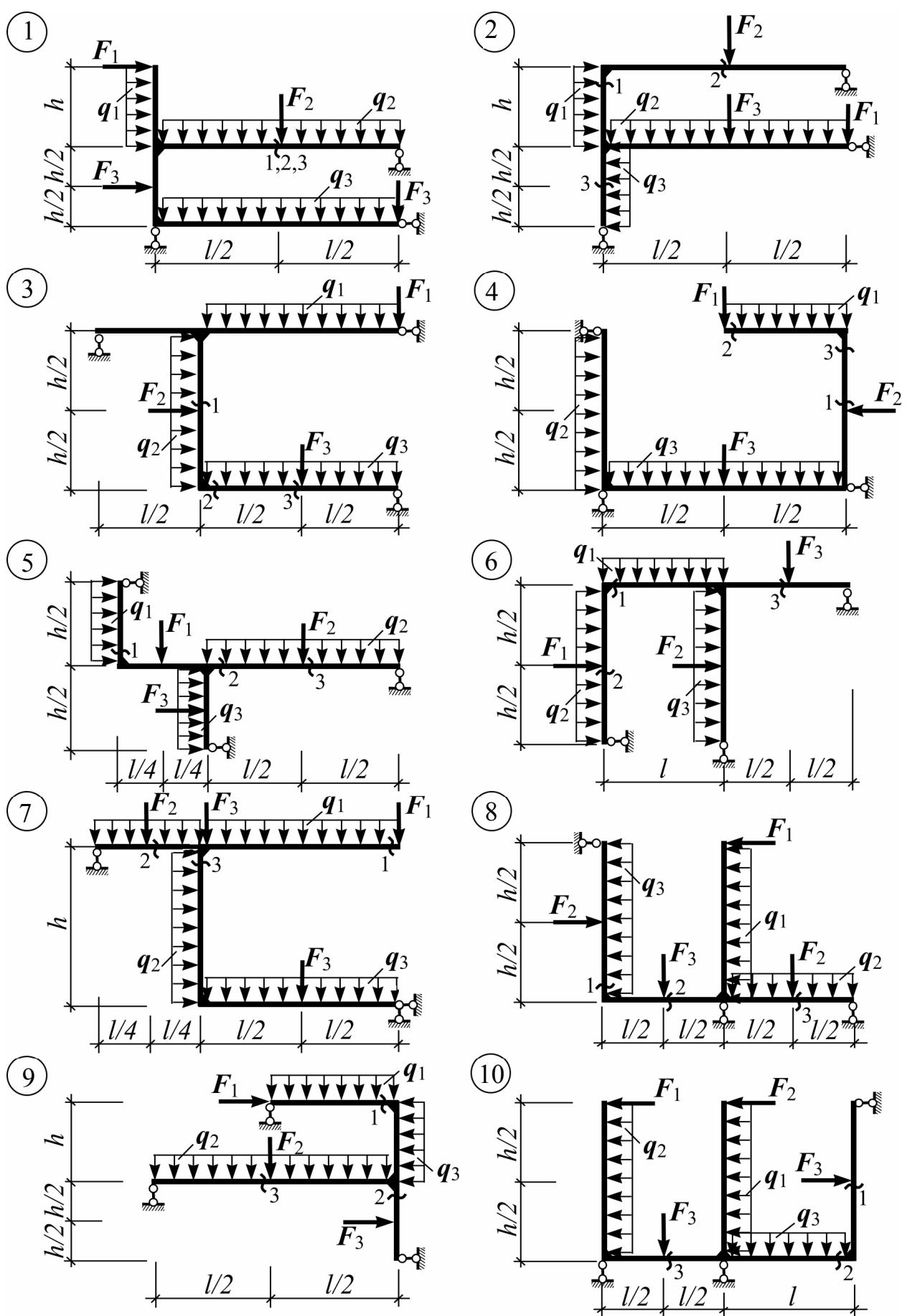
На схемах (Рис. 2.1-2.3) наведені варіанти статично визначених рам. Вихідні дані для розрахунку наведені в таблиці 2.1 та 2.2

Таблиця 2.1

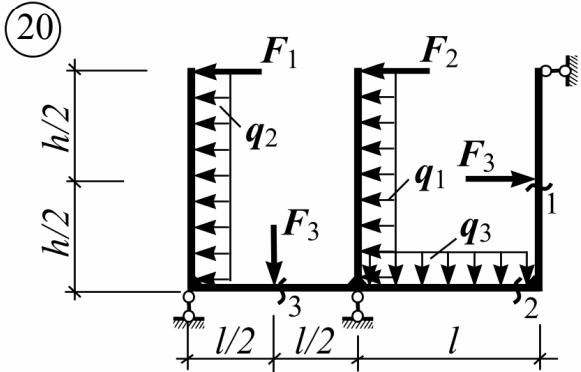
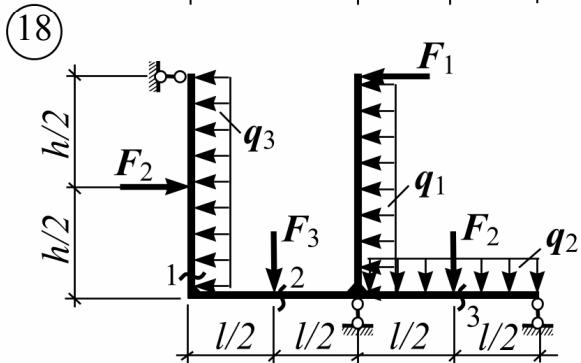
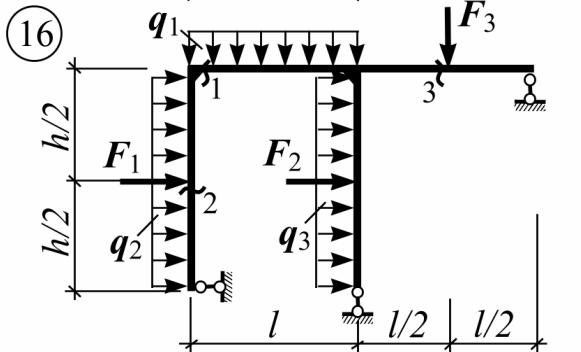
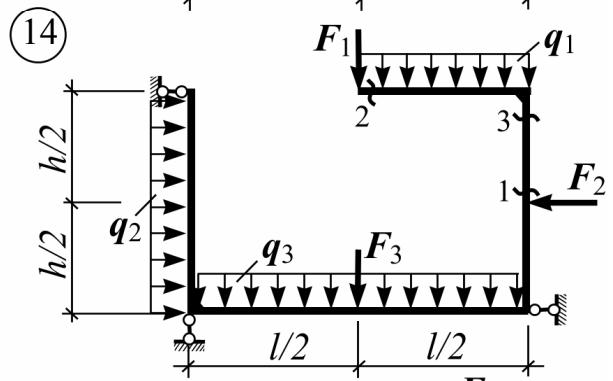
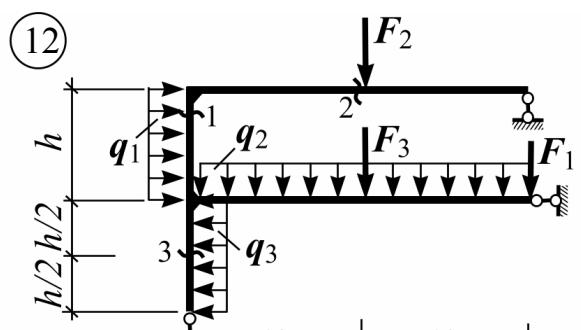
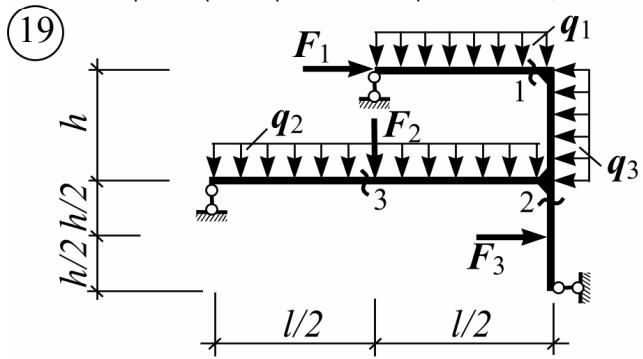
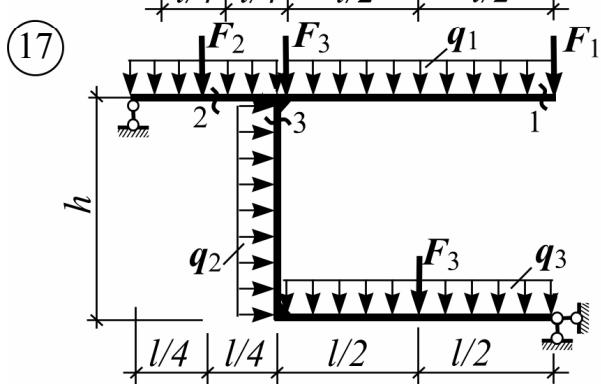
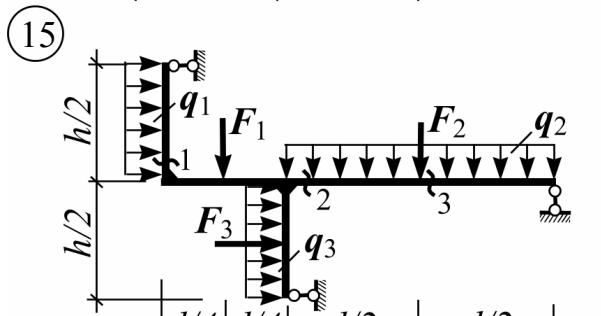
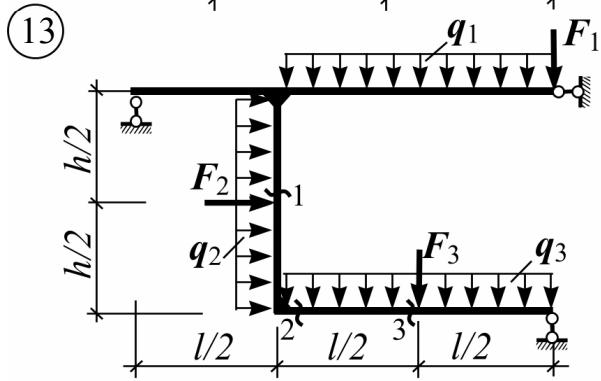
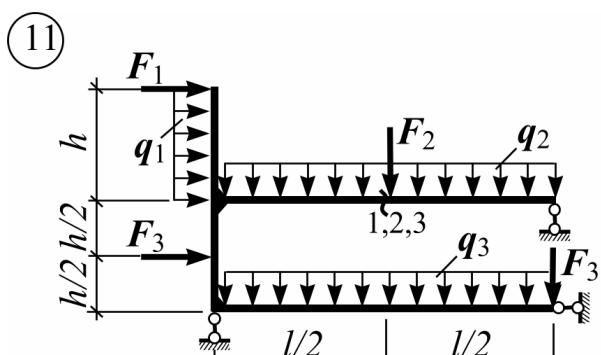
Передостання цифра шифру	Зосереджене навантаження (кН)			Висота поверху рами $h$ , м	Співвідношення жорсткостей ригеля і стояків $EI_p/EI_c$
	$F_1$	$F_2$	$F_3$		
1	12	-	10	3	1/2
2	-	14	-	4	1/3
3	10	-	12	5	1/4
4	-	16	-	6	1/2
5	18	-	22	8	1/4
6	-	20	-	4	1/3
7	22	-	15	5	1/4
8	-	16	-	6	2/1
9	14	-	10	3	3/1
0	-	18	-	8	1/2

Таблиця 2.2

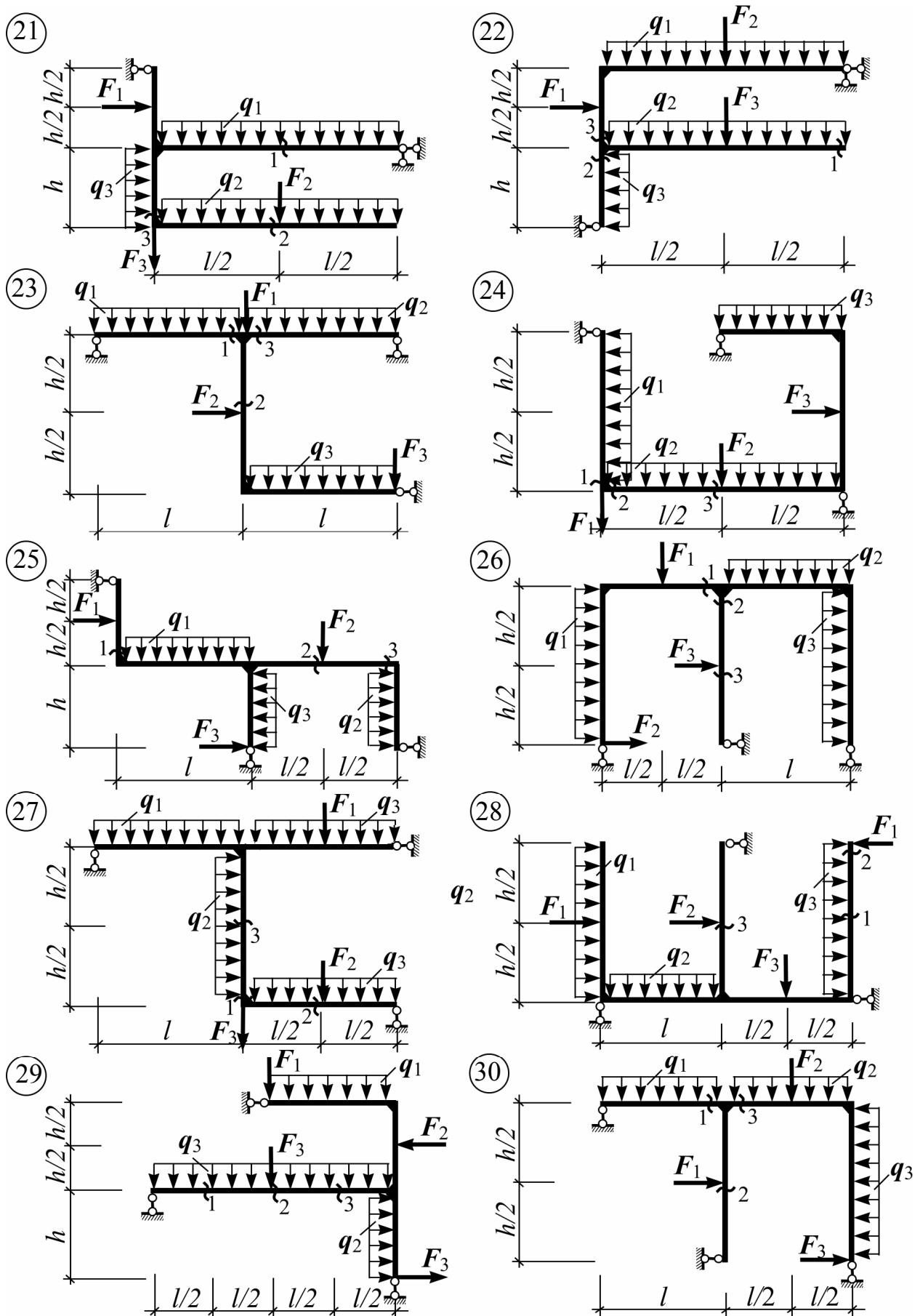
Остання цифра шифру	$q$ (кН/м)			Проліт рами $l$ , м	Переміщення та № перерізу		
	$q_1$	$q_2$	$q_3$		Горизон- тальне	Верти- кальне	кутове
1	-	6	-	3	1	-	-
2	8	-	4	4	-	1	-
3	-	4	-	5	-	-	1
4	6	-	5	6	1	-	-
5	-	8	-	8	2	-	-
6	3	-	4	4	-	2	-
7	-	8	-	5	-	-	2
8	6	-	3	6	3	-	-
9	-	4	-	5	-	3	-
0	2	-	4	8	-	-	3



Puc. 2.1



Puc. 2.2



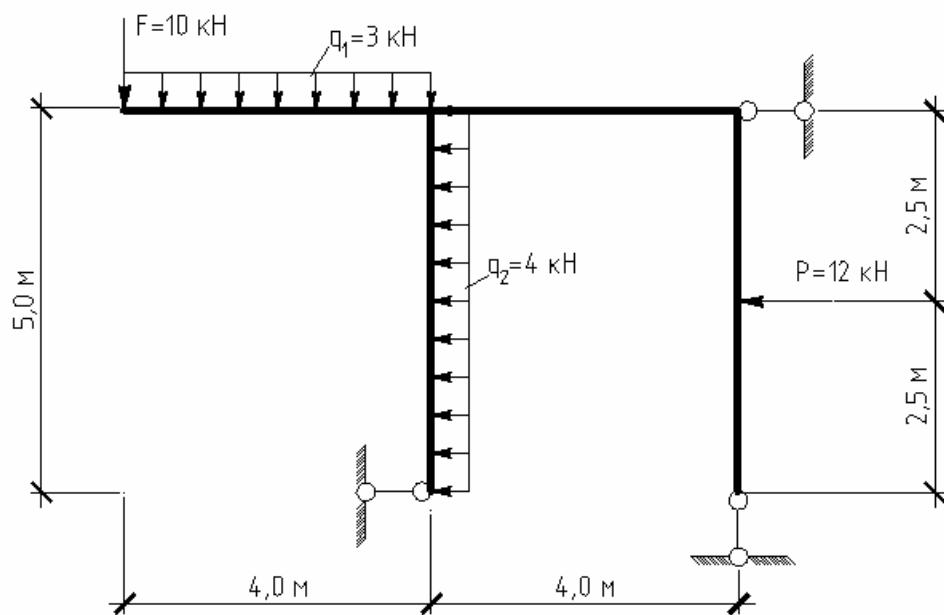
Puc. 2.3

**Приклади розв'язання задач з  
теми: “Побудова епюр  $Q$ ,  $M$  і  $N$  для статично визначені рами.”**

### ПРИКЛАД 1

Для заданої рами, яка зображена на малюнку необхідно:

- виконати кінематичний та структурний аналіз;
- визначити реакції в'язей;
- побудувати епюри згидаючих моментів, поперечних та поздовжніх зусиль;
- визначити переміщення вказаного перерізу



*Rис. 2.1*

#### 4. Кінематичний аналіз рами

Викреслюємо в масштабі раму, виконуємо для неї кінематичний аналіз.

Перевіримо раму на геометричну незмінність:

- a)  $n = 3 \text{ к} - \text{ш} = 3 \cdot 2 - 6 = 0$ ,  $n$  - число зайвих в'язей,  $k$  - число контурів,  $\text{ш}$  - число простих шарнірів.
- б) виконуємо аналіз структури. Рама є системою з найпростішою структурою, так як вона утворена з одного диска. До основи рама прикріплена 3-ма стержнями, які не перетинаються в одній точці і не паралельні один одному. Звідси випливає, що вона статично визначна ( $n = 0$ ) і геометрично незмінна.

## 2. Визначаємо опорні реакції

Покажемо складові реакцій опор та визначимо їх.

$$\sum F_{iy} = 0; -F - q_1 \cdot 4 + R_B = 0;$$

$$R_B = F + q_1 \cdot 4 = 10 + 3 \cdot 4 = 10 + 12 = 22 \text{ kH} . \text{Рис. 2.2}$$

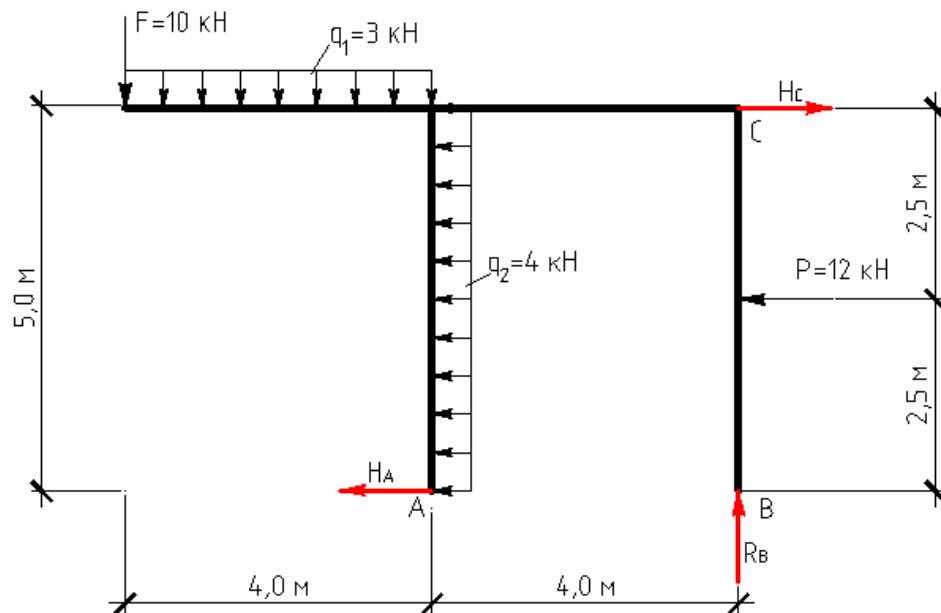


Рис. 2.2

$$\sum m_C = 0; F \cdot 8 + q_1 \cdot 4 \cdot 6 - q_2 \cdot 5 \cdot 2,5 - H_A \cdot 5 - P \cdot 2,5 = 0;$$

$$H_A = \frac{F \cdot 8 + q_1 \cdot 4 \cdot 6 - q_2 \cdot 5 \cdot 2,5 - P \cdot 2,5}{5} = \frac{10 \cdot 8 + 3 \cdot 4 \cdot 6 - 4 \cdot 5 \cdot 2,5 - 12 \cdot 2,5}{5} = \\ = \frac{80 + 72 - 50 - 30}{5} = \frac{72}{5} = 14,4 \text{ kH}$$

$$\sum m_B = 0; F \cdot 8 + q_1 \cdot 4 \cdot 6 + q_2 \cdot 5 \cdot 2,5 + P \cdot 2,5 - H_C \cdot 5 = 0;$$

$$H_C = \frac{F \cdot 8 + q_1 \cdot 4 \cdot 6 + q_2 \cdot 5 \cdot 2,5 + P \cdot 2,5}{5} = \frac{10 \cdot 8 + 3 \cdot 4 \cdot 6 + 4 \cdot 5 \cdot 2,5 + 12 \cdot 2,5}{5} = \\ = \frac{80 + 72 + 50 + 30}{5} = \frac{232}{5} = 46,4 \text{ kH}$$

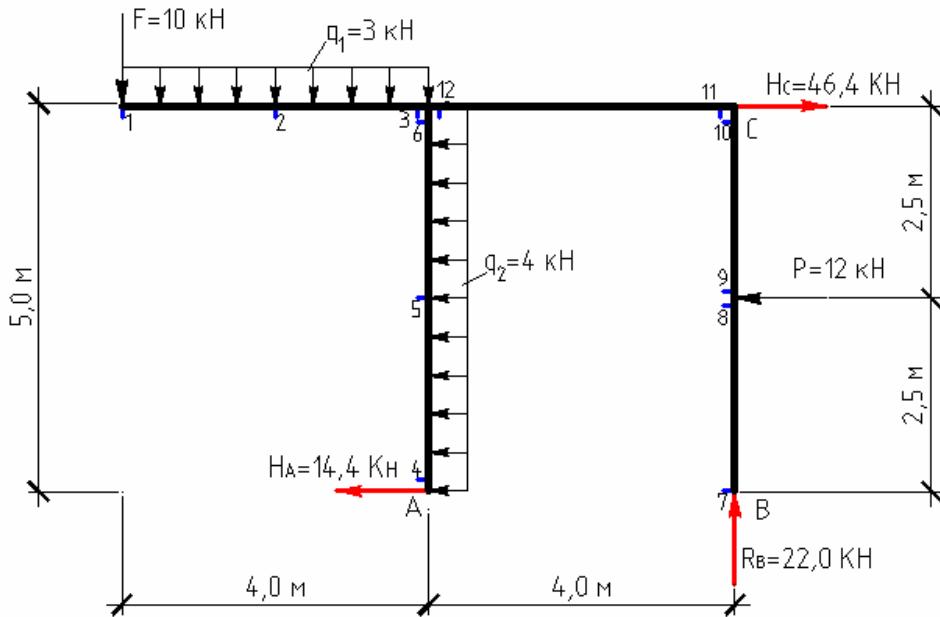
$$\text{Перевірка: } \sum F_{ix} = -H_A - q_2 \cdot 5 + H_C = -14,4 - 4 \cdot 5 + 46,4 - 12 = 0.$$

**Перевірка виконується.**

## 3. Позначаємо характерні перерізи на рамі

Для побудови епюор вибираємо характерні перерізи, в яких внутрішні зусилля слід визначати обов'язково. Їх ставимо в шарнірах, на кінцях стержнів, у вузлах –

на кожному стержні, на кінцях і посередині ділянок рівномірно розподілених навантажень, по два перерізи поблизу зосереджених сил і моментів.



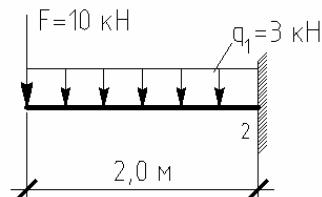
*Rис. 2.3*

#### 4. Будуємо епюру моментів.

Нагадаємо, що плече сили відносно точки – це найкоротша відстань від точки до лінії дії сили, яка перпендикулярна цій лінії. Момент сили відносно точки рівний добутку сили на плече. Щоб знайти момент від рівномірно розподіленого навантаження, слід помножити її рівнодіючу на плече.

Моменти, з обертанням за годинниковою стрілкою, будемо вважати від'ємними. При згині на випуклій стороні стержня волокна розтягнуті, на ввігнутій – стиснуті. Ординати епюри відкладаються зі сторони розтягнутих волокон. Обчислимо, наприклад, згидаючий момент в перерізі 2 і знайдемо, які волокна (верхні чи нижні) розтягнуті в 2 перерізі.

Для цього уявимо переріз 2 і відрізок стержня, який прилягає до розглядуваної частини 1-2. Відкинемо подумки праву частину рами, і поставимо замість неї защемлення, в якому шукатимемо момент  $M_2$ .



*Rис. 2.4*

Момент  $M_2$  – додатній, він направленний проти годинникової стрілки. Легко помітити, що розтягнуті верхні волокна.

$$M_1 = 0;$$

$$M_2 = +10 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = +20 + 6 = +26 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = +10 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 2 = +40 + 24 = +64 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = 0;$$

$$M_5 = -14,4 \cdot 2,5 - 4 \cdot 2,5 \frac{2,5}{2} = -36 - 12,5 = -48,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_6 = -14,4 \cdot 5 - 4 \cdot 5 \cdot 2,5 = -72 - 50 = -122 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_7 = 0;$$

$$M_8 = 0;$$

$$M_9 = 0;$$

$$M_{10} = -12 \cdot 2,5 = -30 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{11} = -12 \cdot 2,5 = -30 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{12} = -12 \cdot 2,5 + 22 \cdot 4 = -30 + 88 = +58 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Епюра згидаючих моментів матиме вид.

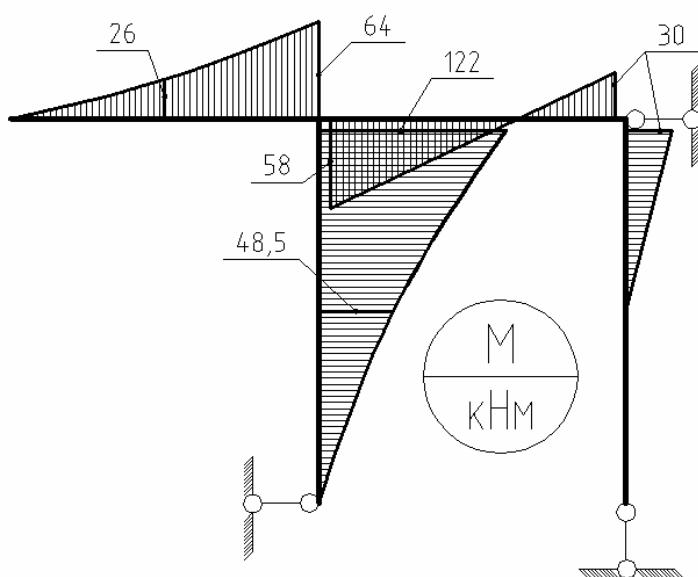
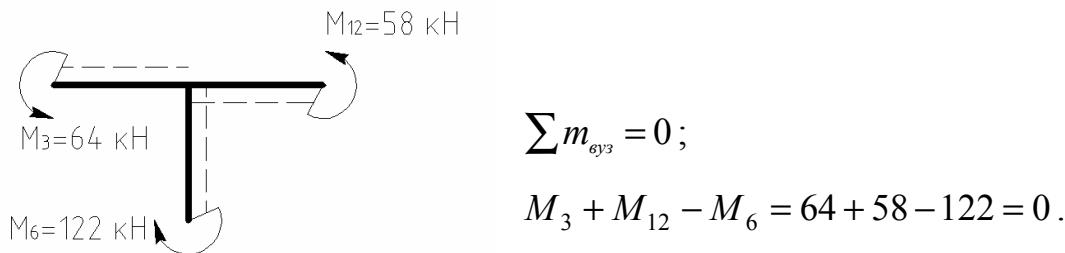


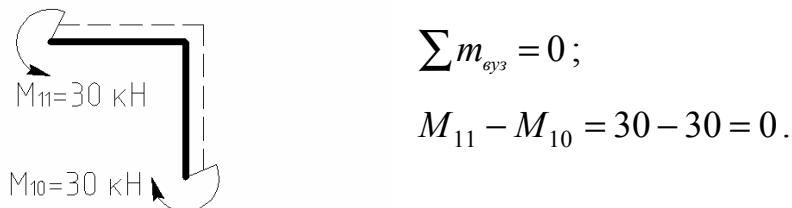
Рис. 2.5

Знаки на епюрі моментів не проставляються.

Кожний вузол рами повинен знаходитись у рівновазі по моментах. Перевіримо жорсткі вузли. Для цього малюємо вузли, по епюрі моментів визначаємо, які волокна стержнів розтягнуті і відповідним чином направляємо моменти. Рівновага очевидна.



*Перевірка виконується.*



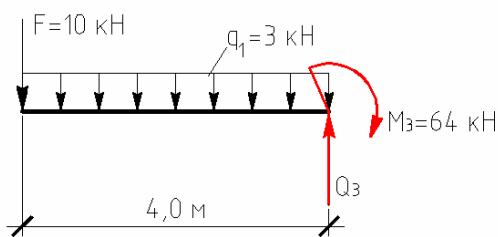
*Перевірка виконується.*

### 5. Будуємо епюру поперечних сил.

На прямолінійних ділянках I-III величину поперечної сили визначаємо за

формулою:  $Q = \left| \frac{M_{np} - M_{li\delta}}{L} \right|$ , - де  $M_{np}$  та  $M_{li\delta}$  моменти на правому та лівому кінцях

ділянки,  $L$  – довжина ділянки. Знак  $Q$  легко визначити за напрямком обертання осі стержня для суміщення його з дотичною до епюри  $M$  в перерізах біля кінців. Якщо обертати необхідно за годинниковою стрілкою на кут  $\alpha \leq 90^\circ$ , поперечна сила має знак (+), якщо проти – знак (-).



*Рис. 2.6*

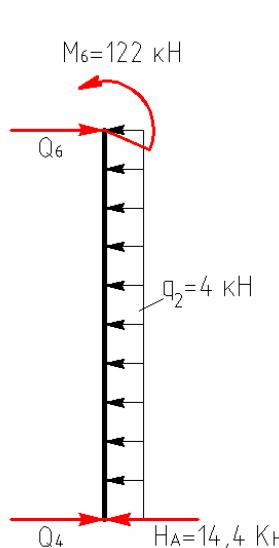
$$Q_I = \left| \frac{-58 - 30}{4} \right| = \frac{88}{4} = 22 \text{ kH};$$

$$Q_{II} = \left| \frac{30 - 0}{2,5} \right| = \frac{30}{2,5} = 12 \text{ kH};$$

$$Q_{III} = \left| \frac{0 - 0}{2,5} \right| = 0;$$

На ділянці де епюра  $M$  криволінійна, епюру  $Q$  будуємо вирізуючи цей стержень і розглядаючи його як балку на 2-х опорах, завантажену рівномірно розподіленим навантаженням і моментами на кінцях, які прикладаються із епюри  $M$  з урахуванням розтягнутих волокон. Опорні реакції такої балки дадуть величини поперечних сил на границях ділянки  $Q$  буде змінюватись лінійно.  $\sum m_1 = 0; \quad 3 \cdot 4 \cdot 2 - Q_3 \cdot 4 + 64 = 0; \quad Q_3 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 2 + 64}{4} = 22 \text{ kH};$

**Перевірка:**  $\sum F_{iy} = 0; \quad -10 - 3 \cdot 4 + 22 = 0.$



$$\sum m_6 = 0;$$

$$4 \cdot 5 \cdot 2,5 + 14,4 \cdot 5 - Q_4 \cdot 5 - 122 = 0;$$

$$Q_4 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 2,5 + 14,4 \cdot 5 - 122}{5} = \frac{50 + 72 - 122}{5} = 0;$$

$$\sum m_4 = 0;$$

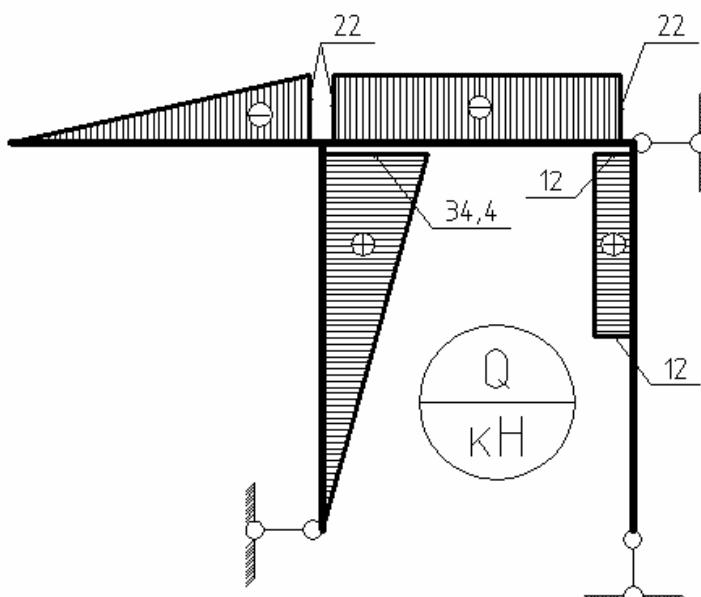
$$Q_6 \cdot 5 - 4 \cdot 5 \cdot 2,5 - 122 = 0;$$

$$Q_6 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 2,5 + 122}{5} = \frac{50 + 122}{5} = 34,4 \text{ kH}.$$

Rис. 2.7

**Перевірка:**  $\sum F_{ix} = 0; \quad 34,4 - 4 \cdot 5 - 14,4 = 0.$

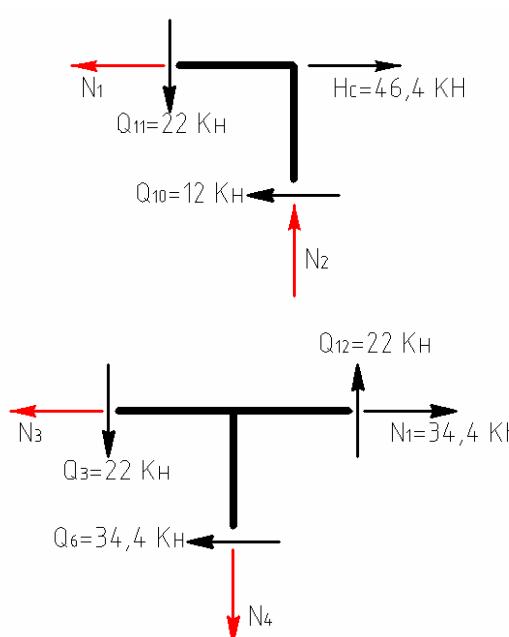
Епюра  $Q$  буде мати такий вид.



Rис. 2.8

## 6. Будуємо епюру поздовжніх сил.

Для побудови епюри  $N$ , вирізуємо жорсткі вузли з епюри  $Q$  і розглядаємо їх рівновагу. Прикладаємо із епюри  $Q$  величини поперечних сил з урахуванням знаків, і невідомі поздовжні сили. З рівнянь рівноваги знаходимо величини поздовжніх сил. Для побудови епюри  $N$ , вирізуємо вузли 1, 2 з епюри  $Q$  і розглядаємо їх рівновагу.



$$\sum F_{ix} = 0; 46,4 - 12 - N_1 = 0;$$

$$N_1 = 46,4 - 12 = 34,4 \text{ kN}.$$

$$\sum F_{iy} = 0; N_2 - 44 = 0; N_2 = 44 \text{ kN}.$$

$$\sum F_{ix} = 0;$$

$$34,4 - 34,4 - N_3 = 0;$$

$$N_3 = 34,4 - 34,4 = 0 \text{ kN}.$$

$$\sum F_{iy} = 0; 44 - 22 - N_4 = 0;$$

$$N_4 = 22 - 22 = 0 \text{ kN}.$$

Якщо сила направлена до вузла, то має місце стиск, якщо від вузла - розтяг.

Епюра поздовжніх сил буде мати вид.

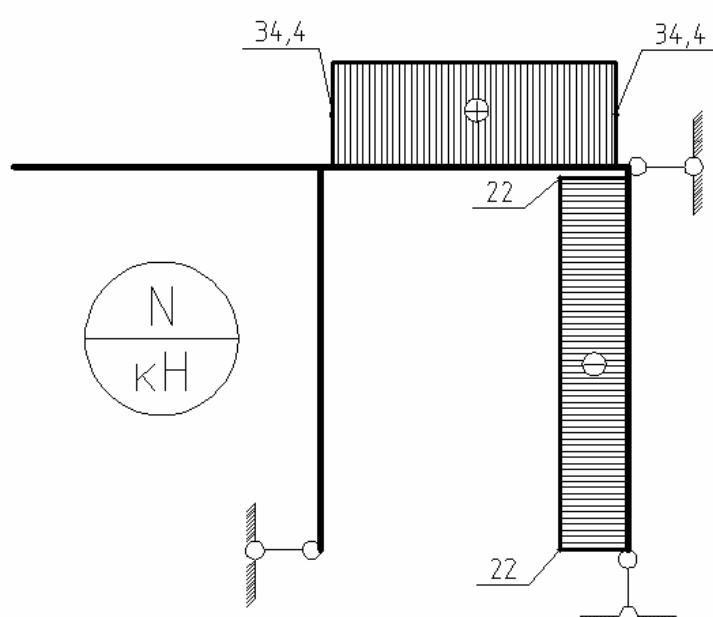


Рис. 2.9

## 7. Визначаємо вертикальне переміщення перерізу в точці К

Утворимо для цього одиничний стан, приклавши силу  $F=1$  в заданому перерізі вертикально. Визначимо опорні реакції і побудуємо одиничну епюру  $M$ .

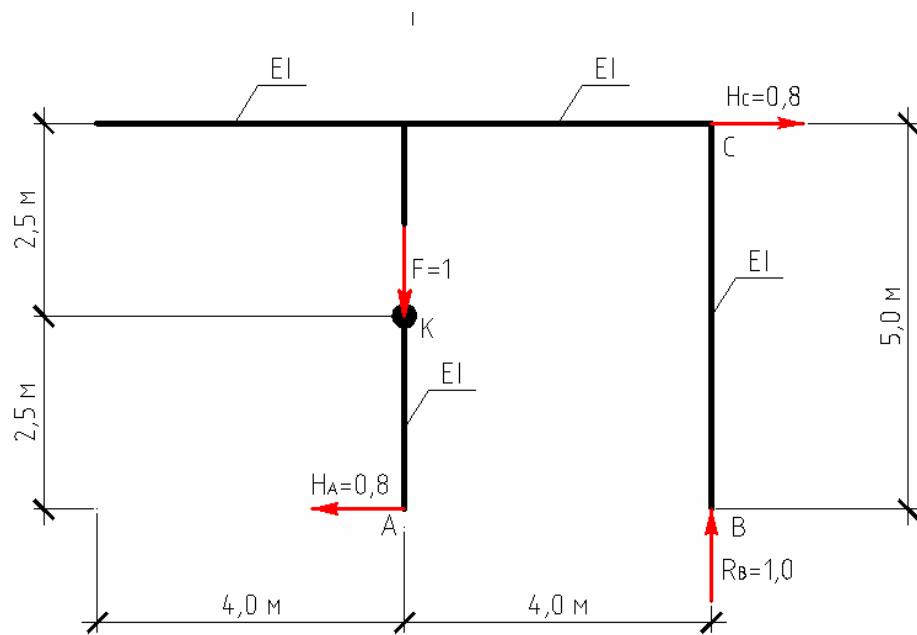


Рис. 2.10

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_B - F = 0; \quad R_B = F = 1 \text{ кН};$$

$$\sum m_B = 0; \quad F \cdot 4 - H_C \cdot 5 = 0; \quad H_C = \frac{F \cdot 4}{5} = \frac{4}{5} = 0,8 \text{ кН};$$

$$\sum m_C = 0; \quad F \cdot 4 - H_A \cdot 5 = 0; \quad H_A = \frac{F \cdot 4}{5} = \frac{4}{5} = 0,8 \text{ кН}.$$

**Перевірка:**  $\sum F_{ix} = 0 \quad H_C - H_A = 0,8 - 0,8 = 0$ .

Однійчна епюра моментів має вид.

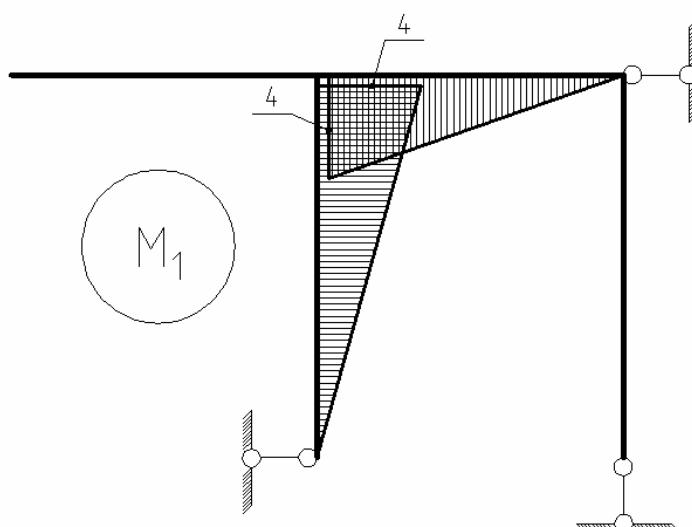


Рис. 2.11

Переміщення визначаємо шляхом перемноження епюр. Для перемноження епюр, можна скористатись, наприклад, формулою Сімпсона.

Якщо перемножуванні ординати лежать по один бік стержня, їх добуток додатній, якщо по різні – від’ємний.

$$\begin{aligned}\Delta_2^{eepm} &= \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot M_E}{EI} dS = \frac{5}{6 \cdot 4EI} (0 + 4 \cdot 2 \cdot 48,5 + 4 \cdot 122) + \frac{4}{6EI} (4 \cdot 58 + 4 \cdot 2 \cdot 14 - 0) = \\ &= \frac{5 \cdot 876}{6 \cdot 4EI} + \frac{4 \cdot 576}{6EI} = \frac{182,5}{EI} + \frac{384}{EI} = \frac{566,5}{EI}.\end{aligned}$$

## Завдання до розрахунково-графічної роботи №3

**Тема:** “Розрахунок плоскої статично визначені ферми”.

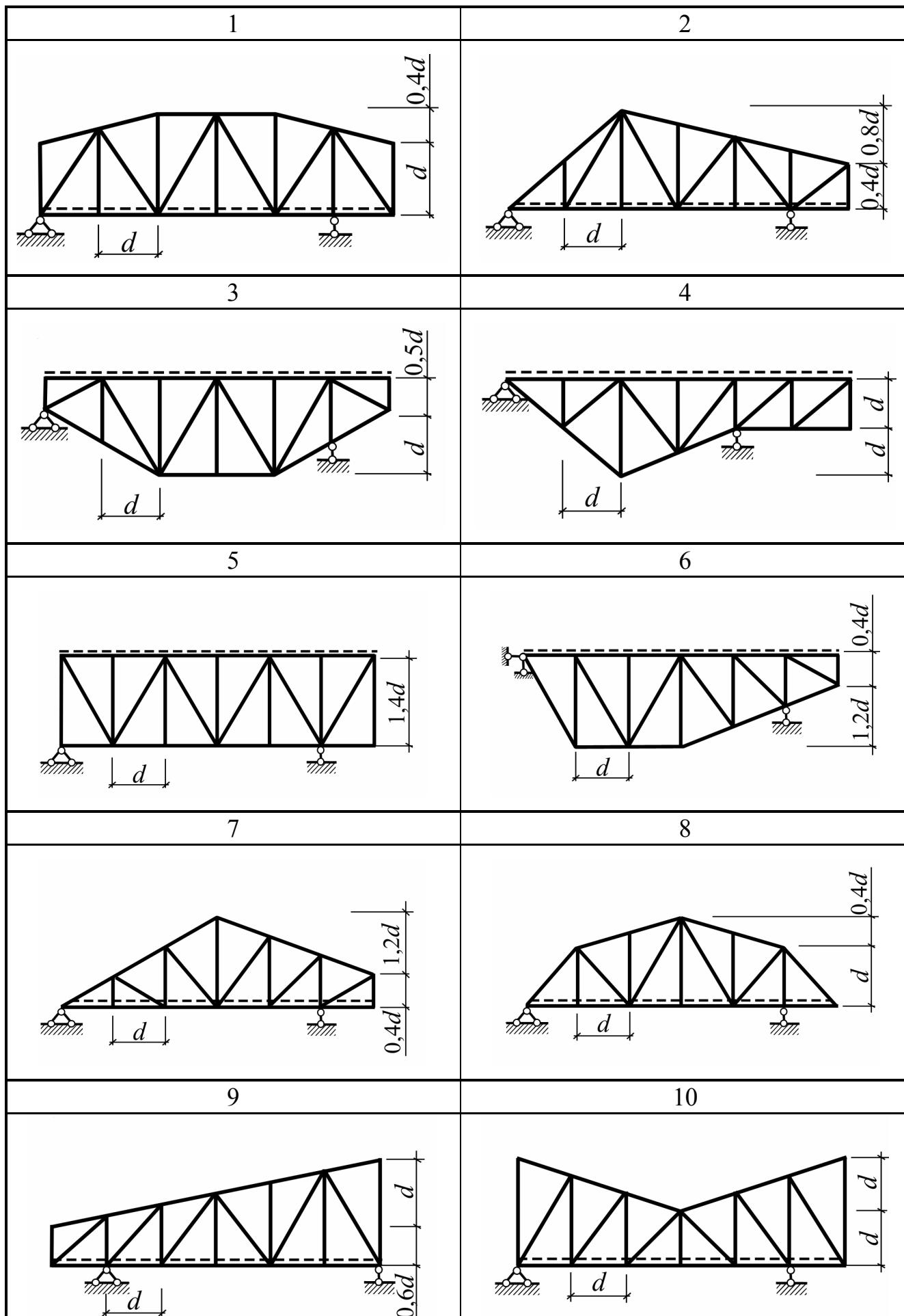
**Задача:** Для статично визначені ферми необхідно визначити зусилля в стержнях аналітичним та графічним способами та порівняти зусилля в стержнях.

На схемах (Рис. 3.1-3.2) наведені варіанти статично визначених ферм.  
Вихідні дані для розрахунку наведені в таблиці 3.1

Таблиця 3.1

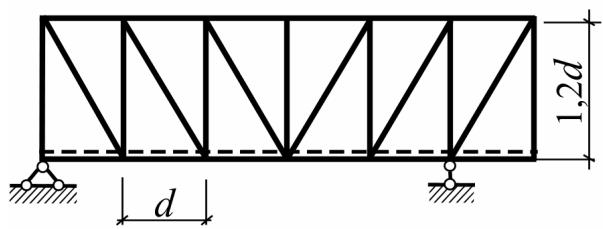
Остання цифра шифру	Вузлові навантаження (кН)		Остання цифра шифру	Довжина панелі $d$ , м	№ панелі, рахуючи зліва
	$F_1$	$F_2$			
1	20	40	1	2,0	2
2	30	50	2	4,0	3
3	40	30	3	6,0	4
4	50	30	4	3,0	5
5	40	50	5	2,5	5
6	60	20	6	3,5	4
7	80	40	7	4,5	3
8	20	60	8	2,8	2
9	30	50	9	3,6	3
0	10	40	0	4,8	4

**Примітка:** зосереджене навантаження  $F_1$  прикладене до непарних вузлів вантажного поясу ферми, а  $F_2$  – парних (вантажний пояс позначено штриховою лінією на схемі ферми).

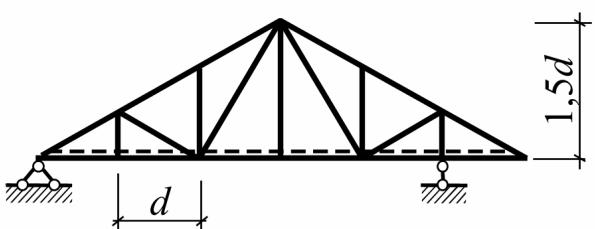


Puc. 3.1

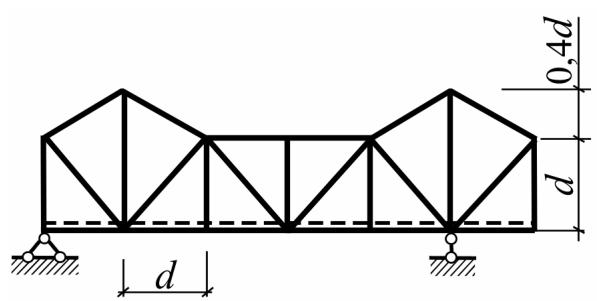
11



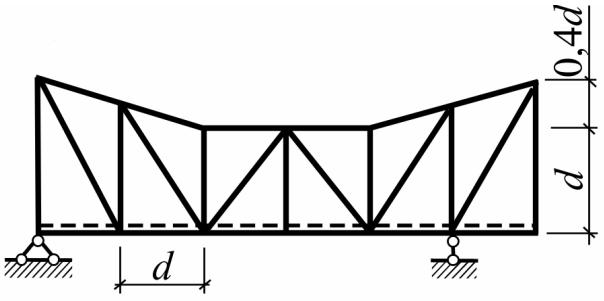
12



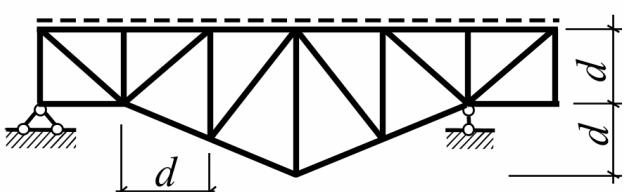
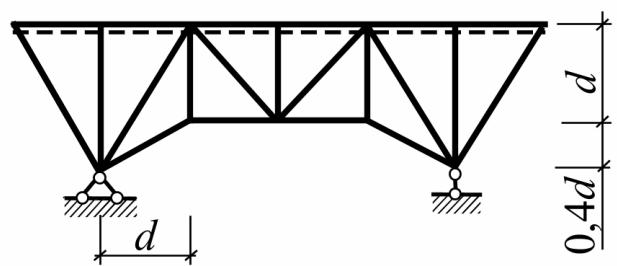
13



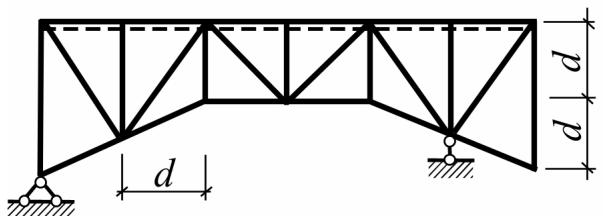
14



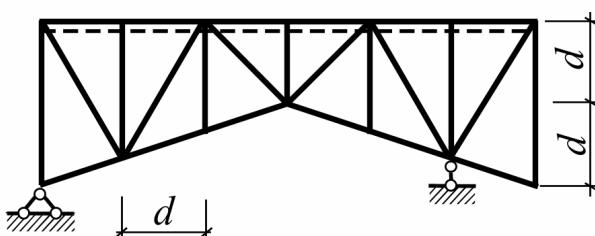
15



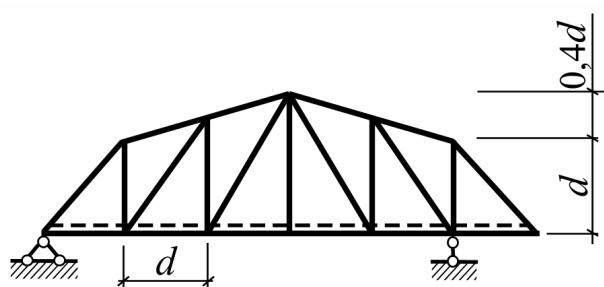
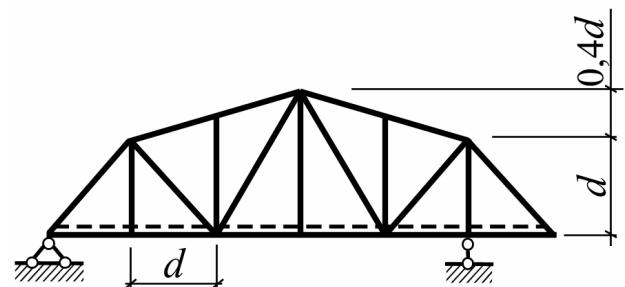
17



18



19



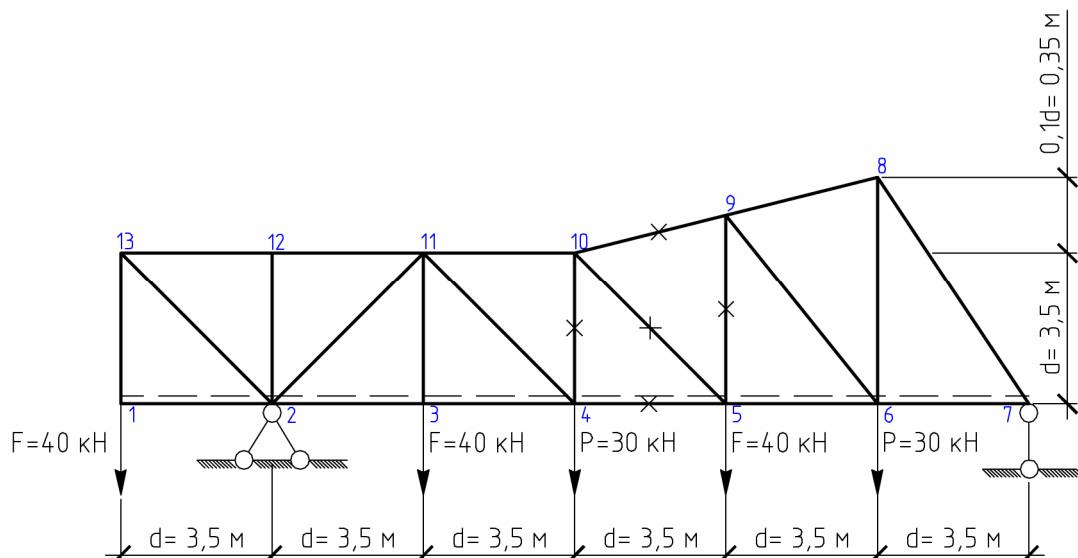
Puc. 3.2

**Приклади розв'язання задач з  
теми: “Розрахунок плоскої статично визначеної ферми.”**

## ПРИКЛАД 1

Для ферми, розмірами і навантаження вказані на рис. 3.1, необхідно визначити:

- аналітично зусилля в п'яти вказаних стержнях заданої панелі;
- графічно зусилля в усіх стержнях ферми, побудувавши для цього діаграму зусиль Максвела-Кремони;
- порівняти отримані двома способами зусилля в стержнях заданої панелі, склавши відповідну таблицю.



*Rис. 3.1*

### 1. Кінематичний аналіз ферми.

Викреслюємо в одному із стандартних масштабів ферму, виконуємо для неї кінематичний аналіз.

- визначаємо число зайвих в'язей  $n = C - 2B$ ,  $B$  – кількість вузлів (крім опорних);  $C$  – кількість стержнів (включаючи опорні);
- виконуємо аналіз структури. Ферма є системою з найпростішою структурою, так як вона утворена з основного диска додаванням до нього вузлів за допомогою двох стержнів. До основи ферма прикріплена 3-ма стержнями, які не перетинаються в одній точці і не паралельні один

одному. Звідси випливає, що вона статично визначна ( $n = 0$ ) і геометрично незмінна.

### 8. Визначаємо опорні реакції

Покажемо складові реакцій опор та визначимо їх.

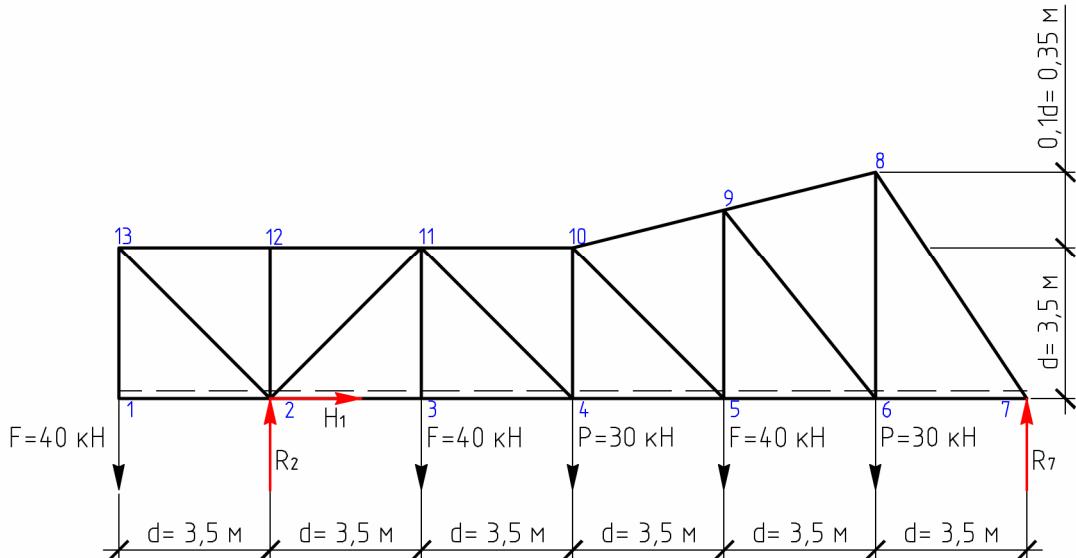


Рис. 3.2

Визначаємо опорні реакції  $R_2, R_7$  прирівнюючи до нуля суми моментів сил прикладених до ферми відносно точок 2 та 7.

$$\sum m_2 = 0; \quad F \cdot d - F \cdot d - P \cdot 2d - F \cdot 3d - P \cdot 4d + R_7 \cdot 5d = 0$$

$$R_7 = \frac{-40 \cdot d + 40 \cdot d + 30 \cdot 2 \cdot d + 40 \cdot 3 \cdot d + 30 \cdot 4 \cdot d}{5 \cdot d} = \frac{60 + 120 + 120}{5} = 60 \text{ kH}$$

$$\sum m_7 = 0; \quad P \cdot d + F \cdot 2d + P \cdot 3d + F \cdot 4d - R_2 \cdot 5d + F \cdot 6d = 0$$

$$R_7 = \frac{30 \cdot d + 40 \cdot 2 \cdot d + 30 \cdot 3 \cdot d + 40 \cdot 4 \cdot d + 40 \cdot 6 \cdot d}{5 \cdot d} = \frac{30 + 80 + 90 + 160 + 240}{5} = 60 \text{ kH}$$

$$\sum F_{ix} = 0; \quad H_2 = 0$$

Правильність визначення реакцій перевіряємо проекуючи всі сили на вісь  $y$ .

$$\sum F_{iy} = -F + R_2 - F - P - F + R_7 = -40 + 120 - 40 - 30 - 40 - 30 + 60 = 0$$

**Перевірка виконується.**

## 9. Аналітичний спосіб

Визначаємо зусилля, наприклад, в стержнях четвертої панелі (рахувати будемо зліва на право). Скористаємося наступним правилом позначення стержнів та зусиль в них:  $N_{10-4}$  – ліва стійка,  $N_{5-9}$  – права стійка,  $N_{10-5}$  – розкіс,  $N_{10-9}$  – верхній пояс,  $N_{5-4}$  – нижній пояс. Розріжемо ферму наскрізним перерізом  $a-a$  (Рис. 3.2). Для знаходження зусилля в нижньому поясі  $N_{5-4}$  відкинемо ліву частину ферми, направимо зусилля в перерізаних стержнях від вузлів, вважаючи їх розтягнутими і прирівнюємо до нуля суму моментів правих сил відносно точки 10 перетину “зайвих” зусиль  $N_{10-5}$  та  $N_{10-9}$ . (Рис. 3.3)

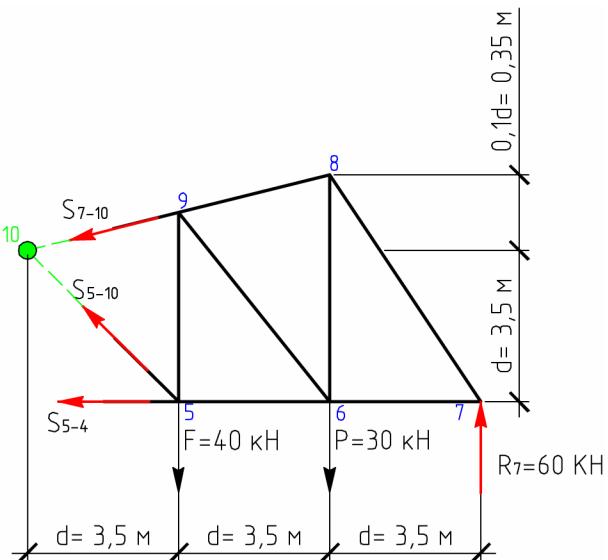


Рис. 3.3

$$S_{5-4} = ?$$

$$\sum m_{10} = 0; -F \cdot d - P \cdot 2 \cdot d + R_7 \cdot 3 \cdot d - S_{5-4} \cdot d = 0$$

$$S_{5-4} = \frac{-40 \cdot d - 30 \cdot 2d + 60 \cdot 3d}{d} = -40 - 60 + 180 = 80 \text{ kH}$$

Знак “+” в зусилля  $N_{5-4}$  вказує на те, що стержень працює на розтяг.

Для знаходження зусилля в верхньому поясі  $N_{9-10}$  моментну точку беремо на перетині зусиль  $N_{5-10}$  та  $N_{5-4}$  – точка 5 (Рис. 3.4). Із рівноваги правої частини ферми отримаємо:

$$S_{9-10} = ?$$

$$\sum m_5 = 0; -P \cdot d + R_7 \cdot 2 \cdot d + S_{9-10} \cdot r = 0$$

$$S_{9-10} = \frac{30 \cdot d - 60 \cdot 2d}{h_{9-10}} ;$$

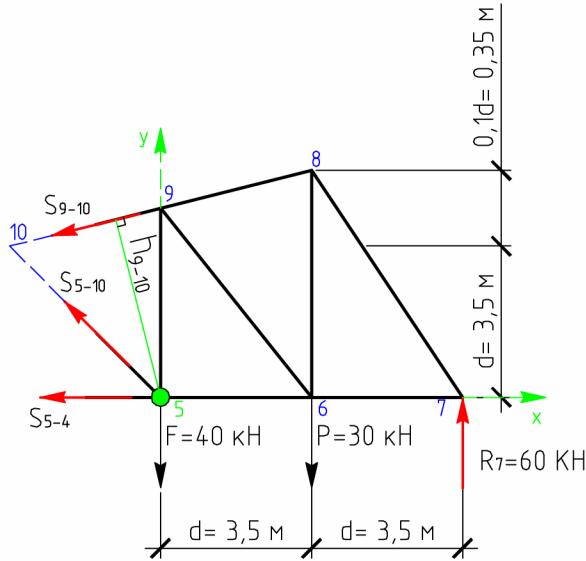


Рис. 3.4

Щоб знайти невідоме плече шуканого зусилля  $h_{9-10}$  скористаємося формулою:

$$h_{9-10} = \left| \frac{x_9 y_{10} - x_{10} y_9}{\sqrt{(x_{10} - x_9)^2 + (y_{10} - y_9)^2}} \right|; \text{ де } x_i \text{ та } y_i - \text{координати кінців стержня 9-10},$$

коли початок координат знаходиться в моментній точці. В нашому випадку

$$x_9 = -d; \quad y_9 = d; \quad x_{10} = 0; \quad y_{10} = d + \frac{0,1}{2}d = 1,05d.$$

Тоді

$$h_{9-10} = \left| \frac{-d \cdot 1,05d - 0 \cdot d}{\sqrt{(0 - (-d))^2 + (1,05d - d)^2}} \right| = \left| \frac{-1,05d^2}{\sqrt{d^2 + (0,05d)^2}} \right| = \left| \frac{-1,05d^2}{\sqrt{1,0025d^2}} \right| = \left| \frac{-1,05d^2}{1,001d} \right| = 1,05d$$

$$S_{9-10} = \frac{30 \cdot d - 60 \cdot 2d}{h_{9-10}} = \frac{30 - 120}{1,05} = -85,7 \text{ kH}$$

Від'ємний знак зусилля  $S_{9-10}$  вказує на те, що стержень працює на стиск.

Для знаходження зусилля в верхньому поясі  $N_{5-10}$  моментну точку беремо 9 (Рис. 3.4). Із рівноваги правої частини ферми отримаємо:

$$S_{5-10} = ?$$

$$\sum m_5 = 0; -S_{5-10} \cdot h_{5-10} - S_{5-4}(d + \frac{0,1}{2}d) - P \cdot d + R_7 \cdot 2 \cdot d = 0;$$

$$S_{5-10} = \frac{S_{5-4}(d + \frac{0,1}{2}d) + P \cdot d - R_7 \cdot 2 \cdot d}{h_{5-10}};$$

Щоб знайти невідоме плече шуканого зусилля  $h_{5-10}$  скористаємося формулою:

$$h_{5-10} = \left| \frac{x_5 y_{10} - x_{10} y_5}{\sqrt{(x_{10} - x_5)^2 + (y_{10} - y_5)^2}} \right|; \text{ де } x_i \text{ та } y_i - \text{координати кінців}$$

стержня 5-10, коли початок координат знаходиться в моментній точці. В нашому

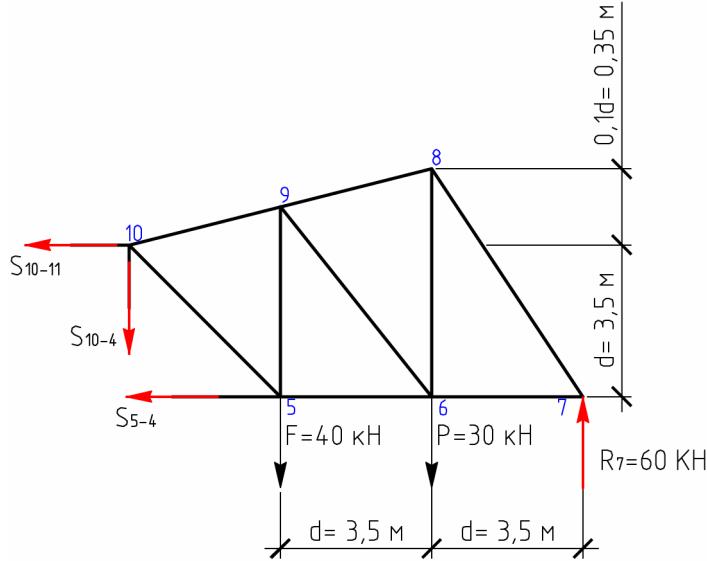
випадку  $x_5 = -d; y_5 = -0,05d; x_{10} = 0; y_{10} = -d - \frac{0,1}{2}d = -1,05d.$

$$h_{5-10} = \left| \frac{-d \cdot (-1,05d) - 0 \cdot (-0,05d)}{\sqrt{(0 - (-d))^2 + (-1,05d - (-0,05d))^2}} \right| = \left| \frac{1,05d^2}{\sqrt{d^2 + (-d)^2}} \right| = \left| \frac{1,05d^2}{\sqrt{2d^2}} \right| = \left| \frac{1,05d^2}{1,41d} \right| = 0,74d$$

$$S_{5-10} = \frac{S_{5-4} \cdot 1,05d + P \cdot d - F \cdot 2d}{0,74d} = \frac{80 \cdot 1,05d + 30d - 120d}{0,74d} = \frac{84 + 30 - 120}{0,74} = 8,1 \text{ kH.}$$

Відповідь зі знаком плюс підтверджує що стержень дійсно працює на розтяг.

Для знаходження зусилля в стержні N 10-4 розріжемо ферму перерізом б – б (Рис. 3.2). Так як два “зайві” стержні, що попали в розріз паралельні між собою, спроектуємо всі сили справа від перерізу на вісь y – y (Рис. 3.5). Отримаємо:



Ruc. 3.5

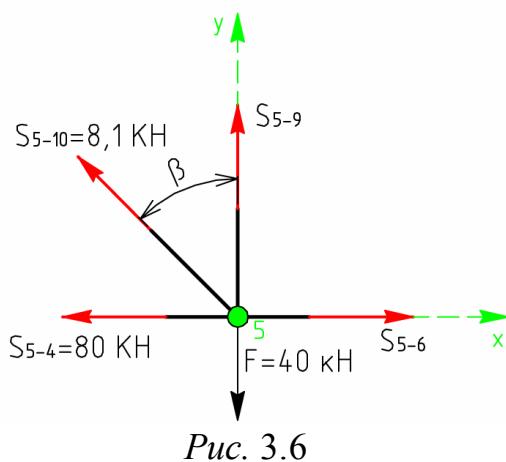
$$S_{10-4} = ?$$

$$\sum F_{iy} = 0; -S_{10-4} - F - P + R_7 = 0;$$

$$S_{10-4} = -F - P + R_7 = -40 - 30 + 60 = -10 \text{ kH.}$$

Від’ємний знак зусилля  $S_{10-4}$  вказує на що стержень працює на стиск.

Щоб знайти зусилля  $N_{5-9}$  вирізаємо вузол нижнього пояса перерізом і розглядаємо його рівновагу по вертикалі ( Рис. 3.6).



$$S_{5-9} = ?$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad S_{5-9} - F + S_{5-10} \cos b = 0;$$

$$S_{5-9} = F - S_{5-10} \cos b = 40 - 8,1 \cdot 0,71 = 34,25 \text{ kH.}$$

$$\text{де } \cos b = \cos 45^\circ = 0,71$$

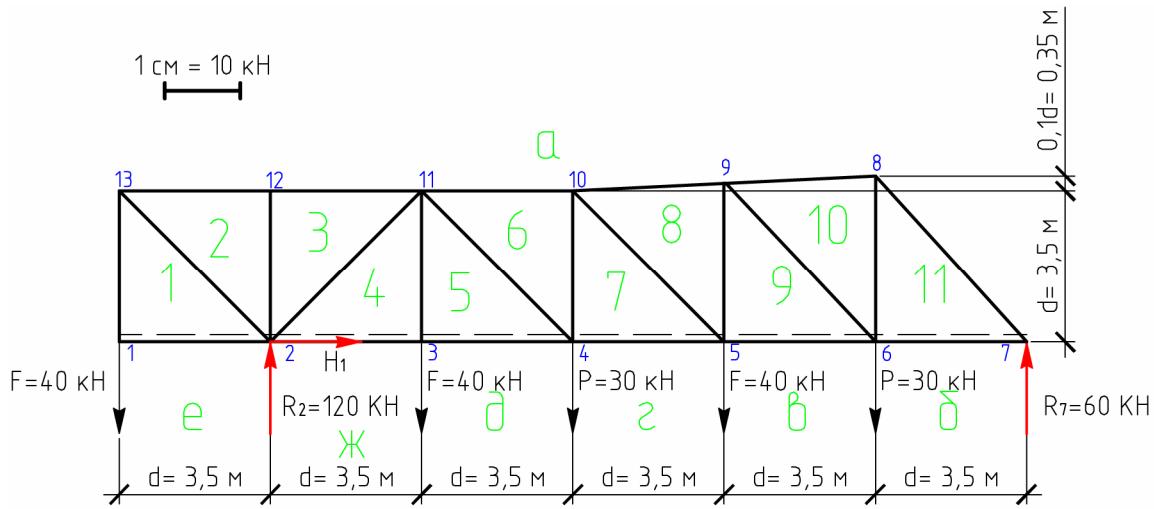
Відповідь зі знаком плюс підтверджує що стержень дійсно працює на розтяг.

#### 4. Графічний спосіб

Будуємо діаграму зусиль (діаграма Максвела-Кремоне). Для цього викреслюємо в одному із стандартних масштабів ферму з позначенням зовнішніх сил та реакцій і позначаємо зовнішні силові поля та внутрішні силові поля (Рис 3.7). Зовнішнє силове поле це частина площини, яка розміщена між сусідніми зовнішніми силами, в тому числі опорними реакціями (поля  $a - e$ ). Внутрішнє силове поле – частина площини, обмежена лише стержнями ферми (поля 1-11).

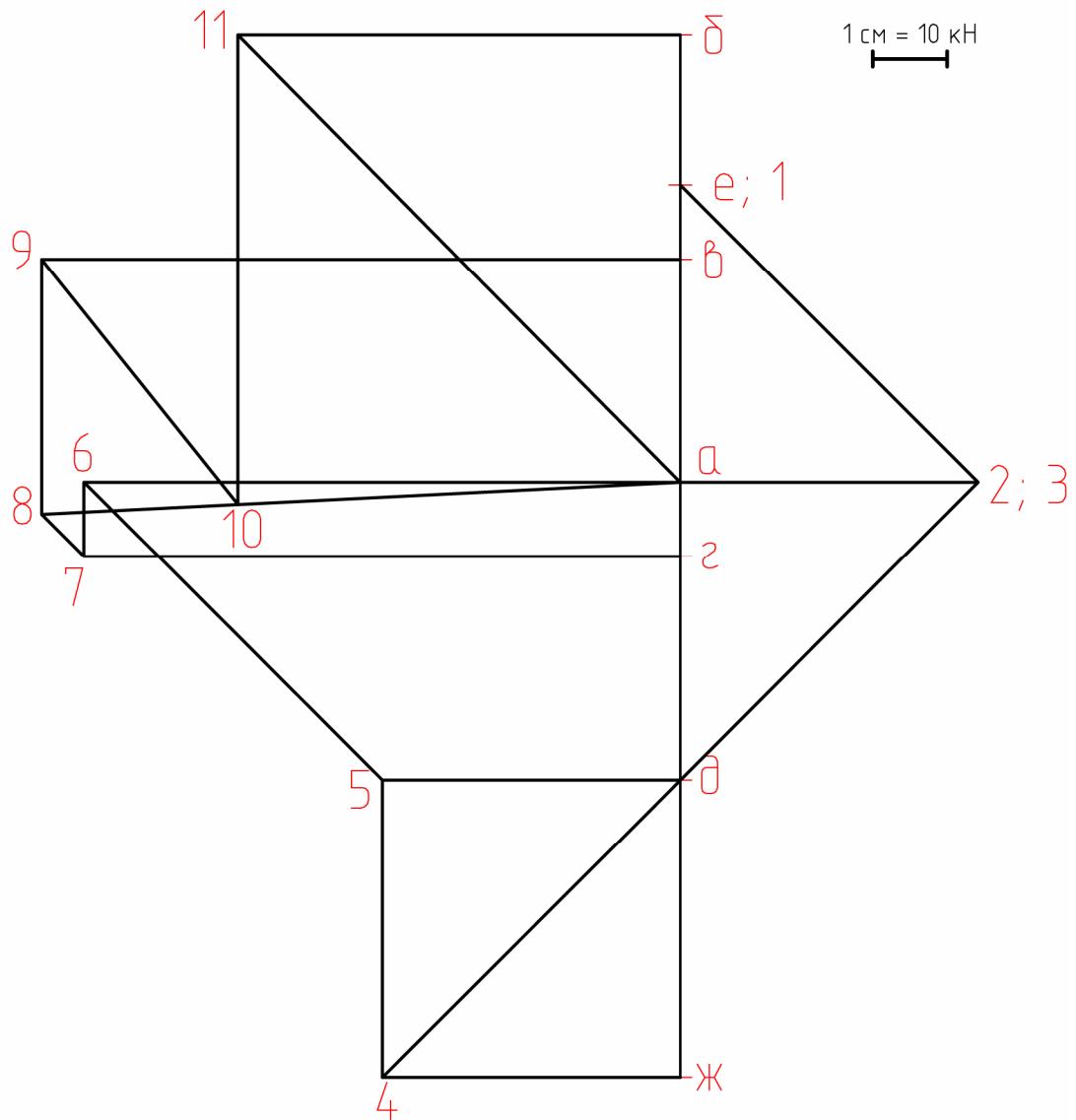
Кожна зовнішня сила позначається двома символами – позначками полів, межею яких вона є. Перший символ – початок вектора сили – це завжди поле з якого виходять. Другий – кінець вектора – поле, в яке приходять при обході ферми за годинниковою стрілкою. Таким чином позначають і зусилля в стержнях.

Вибрали масштаб сил (наприклад в 1 см – 10 кН) спочатку будують силовий багатокутник зовнішніх сил. Для цього відкладають всі сили, в тому числі і реакції опор, в прийнятому масштабі, обходячи ферму за годинниковою стрілкою. При цьому силовий багатокутник повинен бути замкнутий (Рис. 3.8).



Puc. 3.7

## Діаграма зусиль Максвела – Кремоне.



Puc. 3.8

Побудову діаграми починають з вузла, де невідомі зусилля не більше ніж в двох стержнях. В нашему випадку з вузла 1, *Rис.3.8*. Математично діаграма зусиль є відображенням точок **I – II** полів креслення ферми в точки діаграми. На діаграму може бути відображенім почергово лише одне поле. Для цього з відповідних точок діаграми (**a** і **e**) проводять прямі, паралельні межам поля (стержням **I – I3** і **I – 2**), які відображаються на діаграму. Точка перетину цих прямих (**I**) і буде образом відповідного поля. Після цього приступають до побудови точки 2, 3, ... і т. д.

Щоб визначити знак зусилля в якому-небудь стержні ферми, читають це зусилля, обходячи вузол, до якого прилягає стержень, за годинниковою стрілкою. Перший прочитаний символ позначає початок вектора зусилля, другий – його кінець. Якщо вектор направленний від вузла, то стержень розтягнутий, якщо до вузла стиснутий.

Порівняємо зусилля знайдені двома методами.

Метод	$N_{9-10}$ , кН	$N_{4-10}$ , кН	$N_{4-5}$ , кН	$N_{5-9}$ , кН	$N_{5-10}$ , кН
Аналітичний	85,7	10	80	34,25	8,1
Графічний	87,7	10,4	82,2	35,6	8
Похибка $\Delta, \%$	2,28	3,85	2,68	3,79	1,23

Як бачимо розходження складає не більше 5%.

## Завдання до розрахунково-графічної роботи №4

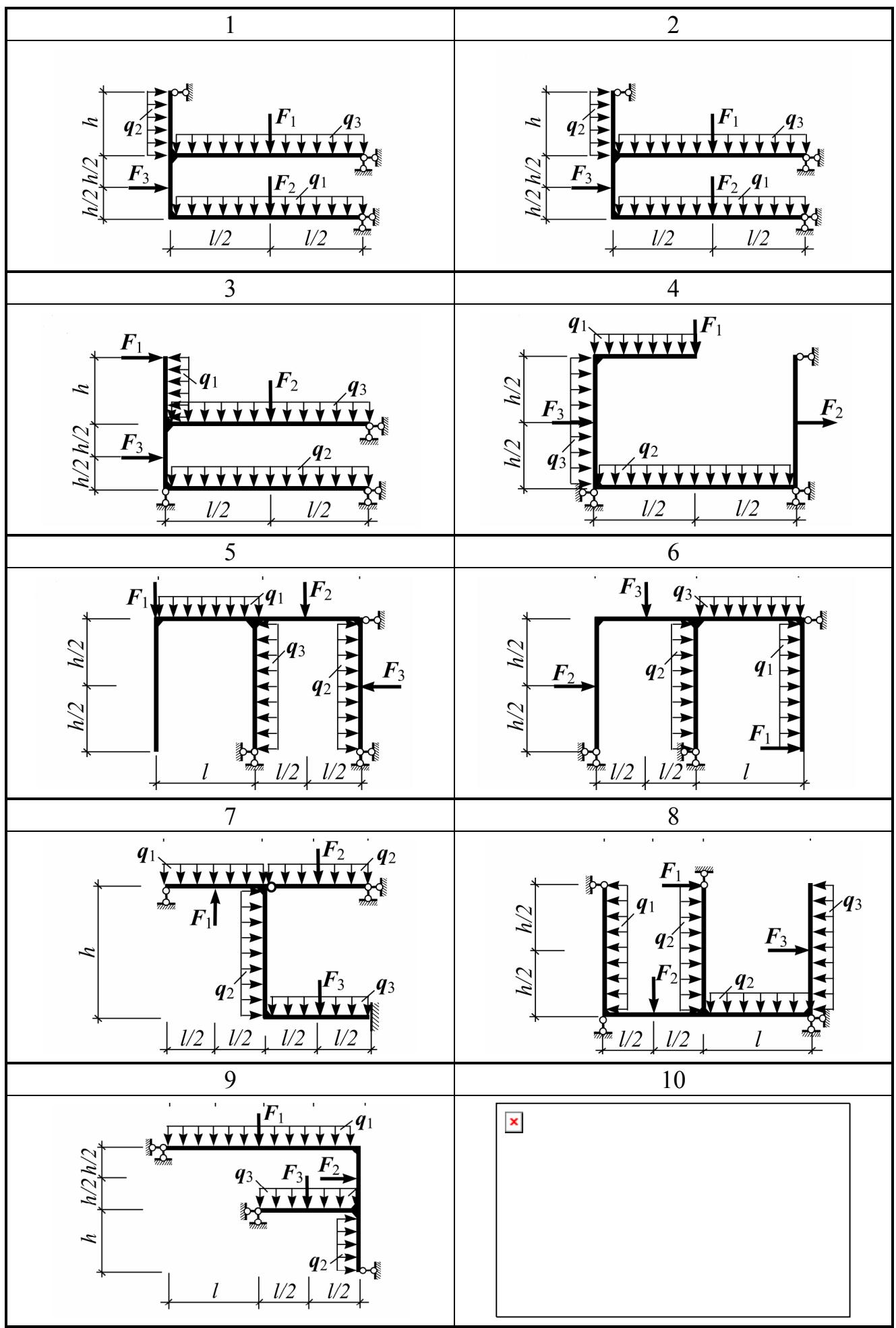
**Тема:** “Побудова епюор  $Q$ ,  $M$  і  $N$  для статично невизначеної рами”.

**Задача:** Для статично невизначеної рами необхідно побудувати епюри внутрішніх силових факторів.

На схемах (Рис.4.1-4.3) наведені варіанти статично невизначених рам. Вихідні дані для розрахунку наведені в таблиці 4.1

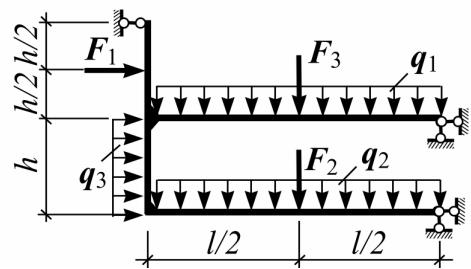
Таблиця 4.1

Передостання цифра шифру	Зосеред- жене навантаження (кН)			Висота поверху рами $h$ , м	Остання цифра шифру	Рівномірно розподілене навантаження (кН/м)			Проліт рами $l$ , м	Співвід- ношення жорст- костей ригелів і стояків $EI_p/EI_c$
	$F_1$	$F_2$	$F_3$			$q_1$	$q_2$	$q_3$		
1	-	8	-	4	1	8	-	6	6	3/2
2	10	-	12	5	2	-	5	-	5	2/3
3	-	12	-	6	3	5	-	3	4	2/1
4	7	-	5	3	4	-	7	-	6	1/4
5	-	10	-	4	5	6	-	4	8	1/2
6	14	-	16	5	6	-	3	-	12	3/2
7	-	15	-	3	7	2	-	5	9	2/3
8	18	-	20	6	8	-	6	-	6	2/1
9	-	7	-	7	9	3	-	6	5	4/1
0	12	-	14	8	0	-	4	-	6	3/1

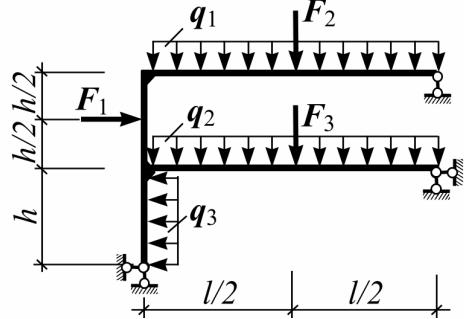


Puc. 4.1

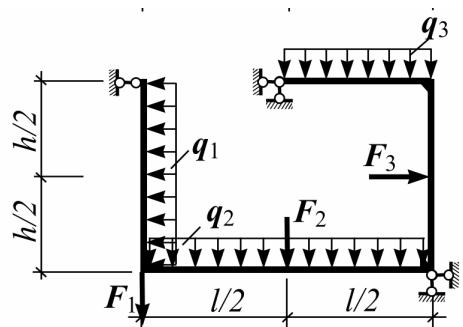
11



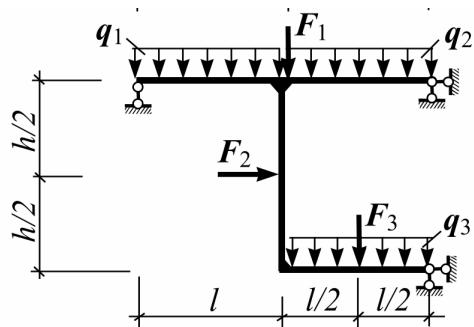
12



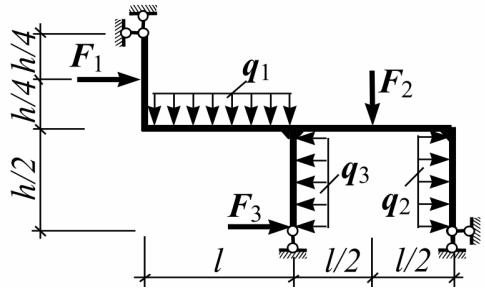
13



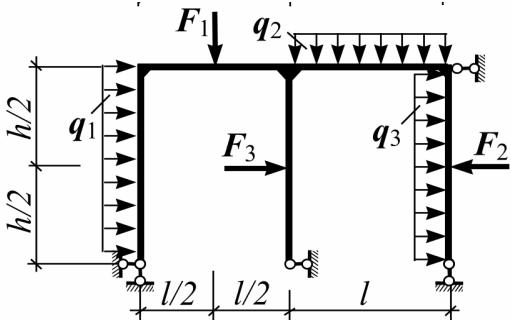
14



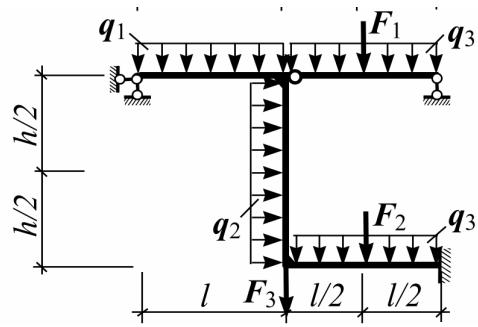
15



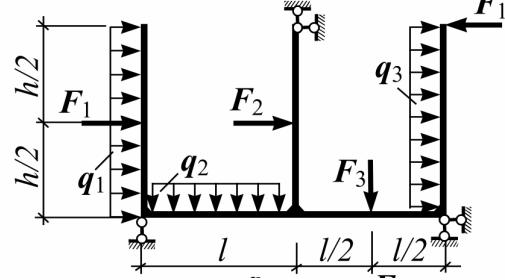
16



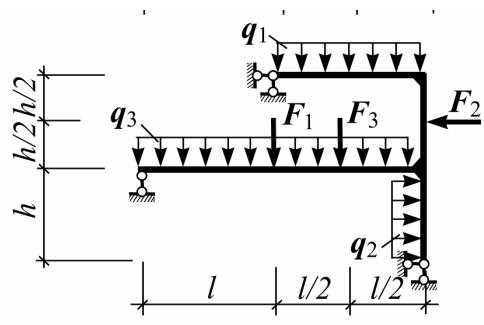
17



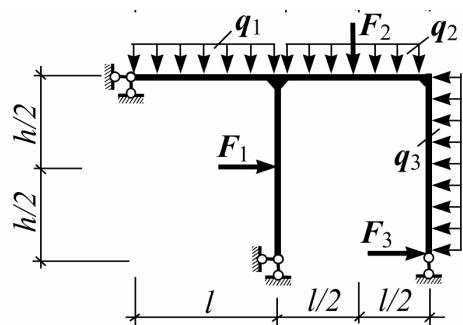
18



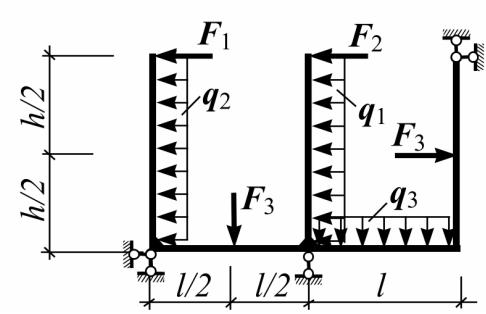
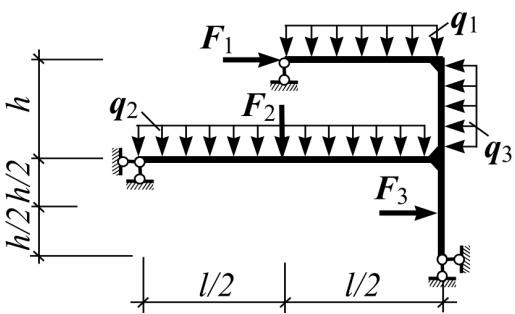
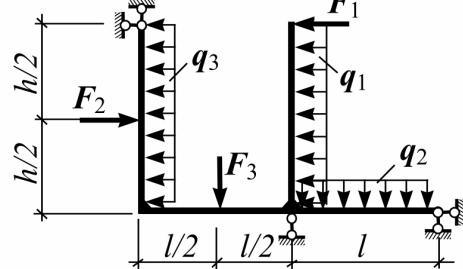
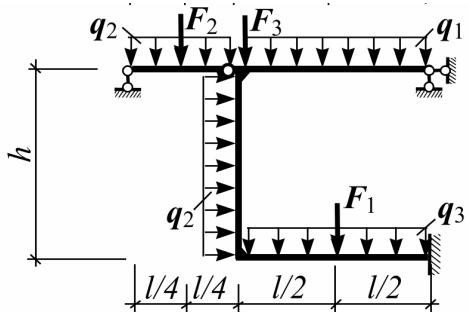
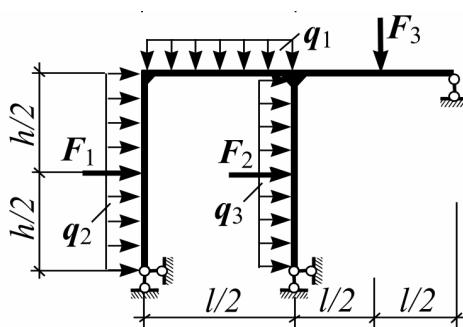
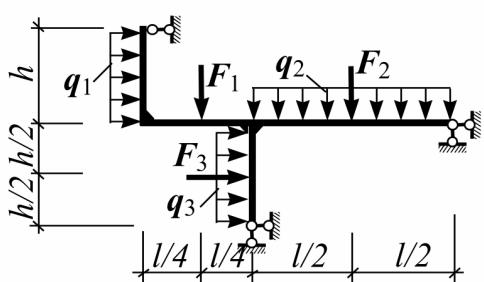
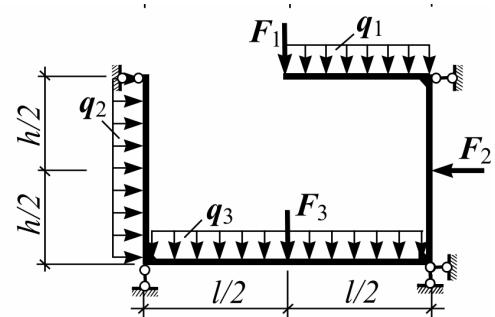
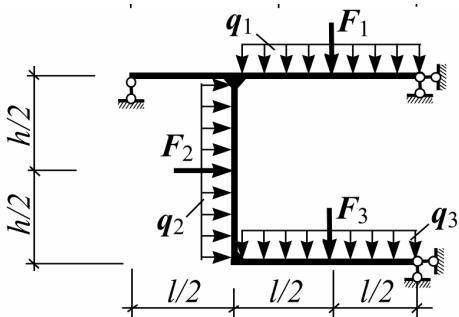
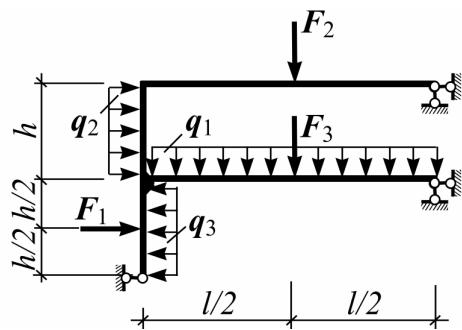
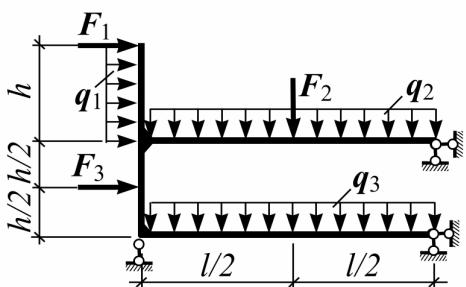
19



20



Puc. 4.2



Puc. 4.3

**Приклади розв'язання задач з  
теми: “Розрахунок статично невизначеної рами методом сил.”**

### ПРИКЛАД 1

Розрахувати статично невизначенну раму, показану на рисунку 4.1, де вона викреслена в масштабі і вказані чисельні значення навантажень та розмірів при

$$\frac{EI_P}{EI_C} = \frac{3}{2} \quad \text{необхідно визначити:}$$

- встановити ступінь статичної невизначеності;
- вибрати найбільш просту (раціональну) основну систему;
- записати систему канонічних рівнянь;
- побудувати одиничні та вантажну епюри згидаючих моментів;
- знайти одиничні і вантажні переміщення та виконати їх перевірку на правильність;
- розв'язати систему канонічних рівнянь;
- побудувати виправлені одиничні епюри згидаючих моментів;
- побудувати кінцеву епюру згидаючих моментів та перевірити її;
- побудувати епюри поперечних і поздовжніх зусиль;
- виконати статичну перевірку рівноваги рами.

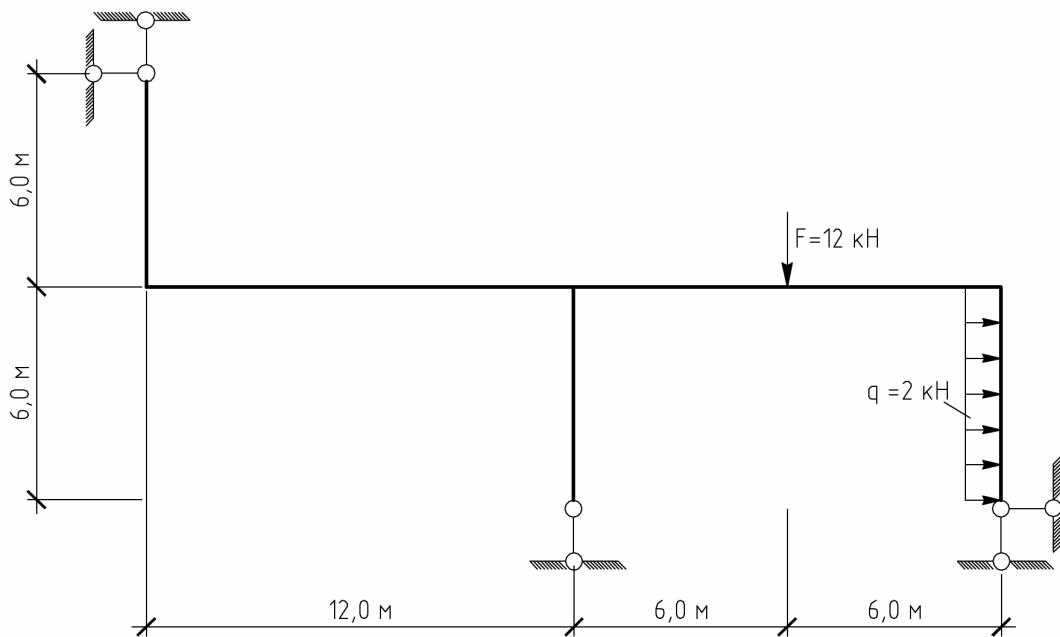


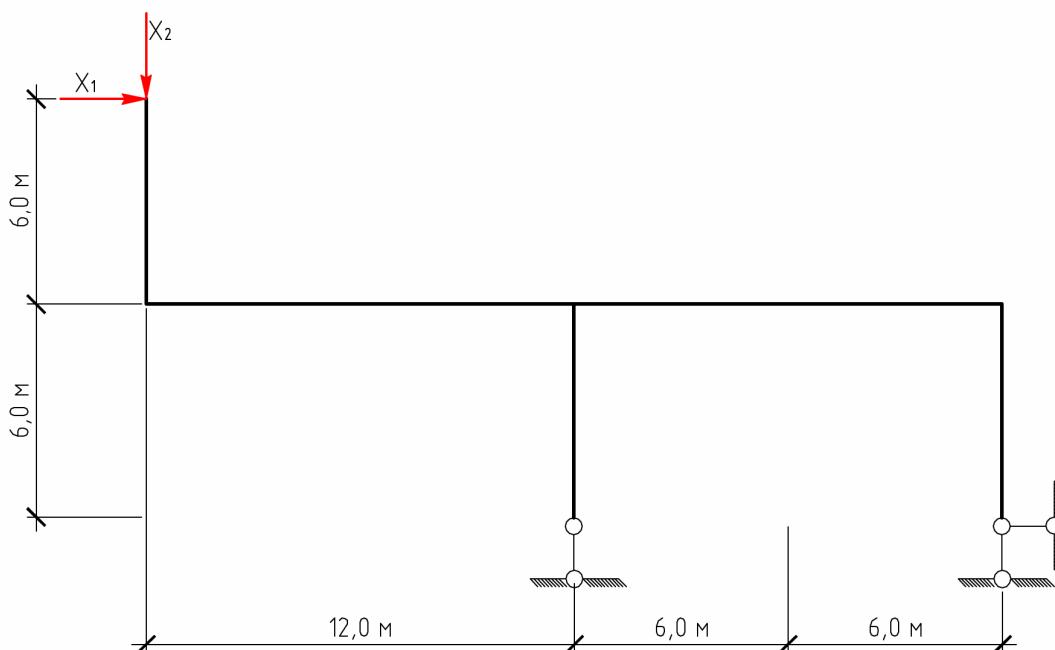
Рис. 4.1

## 2. Визначимо ступінь статичної невизначеності рами.

Визначаємо ступінь статичної невизначеності рами в'язей за формулою  
 $n = 3k - 2J$ ,  $k$  – число замкнтих контурів,  $J$  – число простих шарнірів.  
 $n = 3k - 2J = 3 \cdot 4 - 10 = 2$ .

## 10. Виберемо найбільш просту (раціональну) основну систему.

Вибираємо основну систему методу сил (Рис. 4.2), відкидаючи зв'язі і замінюючи їх дію на раму невідомими силами  $X_1$ ,  $X_2$



Rис. 4.2

## 11. Записуємо систему канонічних рівнянь.

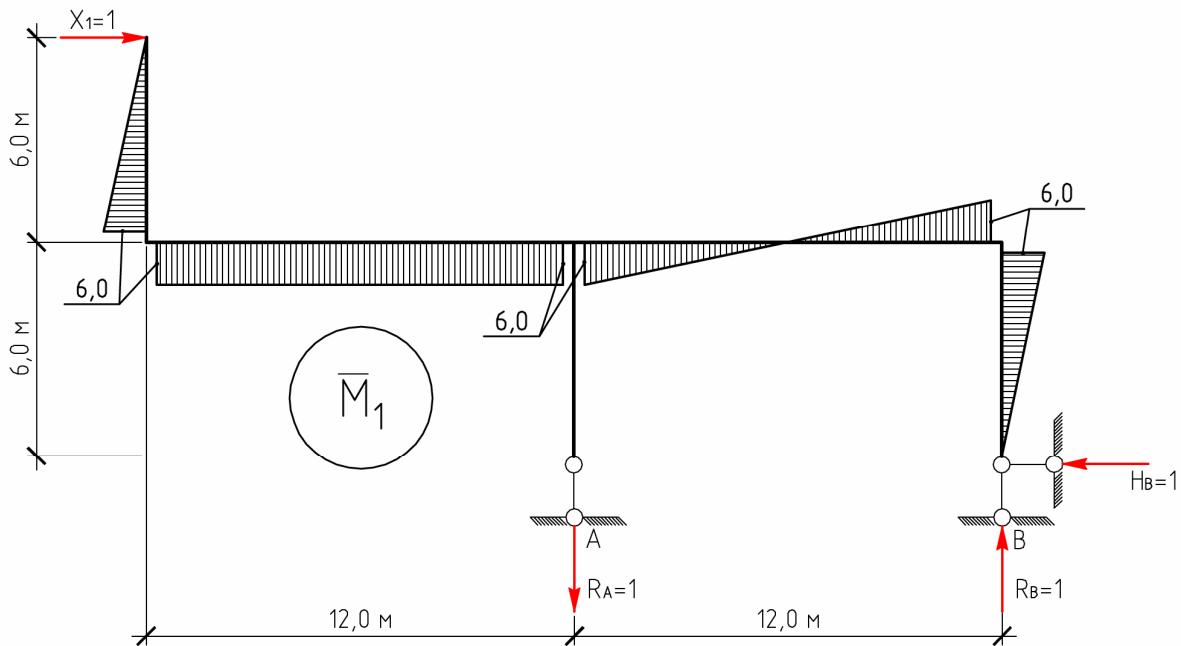
Система канонічних рівнянь методу сил:

$$\begin{cases} d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ d_{21}x_1 + d_{22}x_2 + \Delta_{2F} = 0 \end{cases}$$

де  $\delta_{ij}$  – переміщення по напрямку відкинутої в'язі з номером  $i$  викликане силою  $F=1$  прикладеною по напрямку відкинутої в'язі з номером  $j$ ,  $\Delta_{iF}$  – переміщення по напрямку відкинутої в'язі з номером  $i$  викликане зовнішнім навантаженням.

## 12. Будуємо одиничні та вантажні епюри згинаючих моментів

Шукаємо коефіцієнти системи рівнянь, для чого побудуємо одиничні (Рис. 4.3, 4.4) та вантажні епюри (Рис. 4.6) моментів в основній системі:



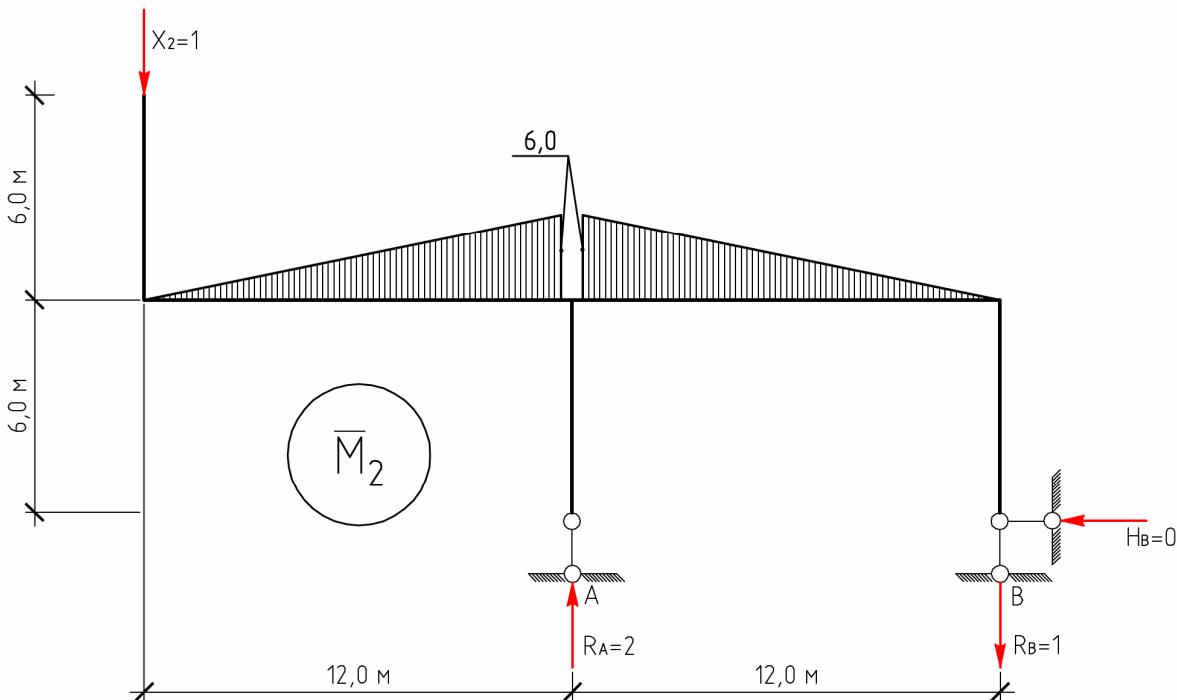
Puc. 4.3

$$\sum F_{ix} = 0; \quad X_1 - H_B = 0; \quad H_B = X_1 = 1 ;$$

$$\sum m_B = 0; \quad -X_1 \cdot 12 + R_A \cdot 12 = 0; \quad R_A = \frac{X_1 \cdot 12}{12} = \frac{1 \cdot 12}{12} = 1 ;$$

$$\sum m_A = 0; \quad -X_1 \cdot 12 + R_B \cdot 12 = 0; \quad R_B = \frac{X_1 \cdot 12}{12} = \frac{1 \cdot 12}{12} = 1 ;$$

Перевірка:  $\sum F_{iy} = -R_A + R_B = -1 + 1 = 0$ .



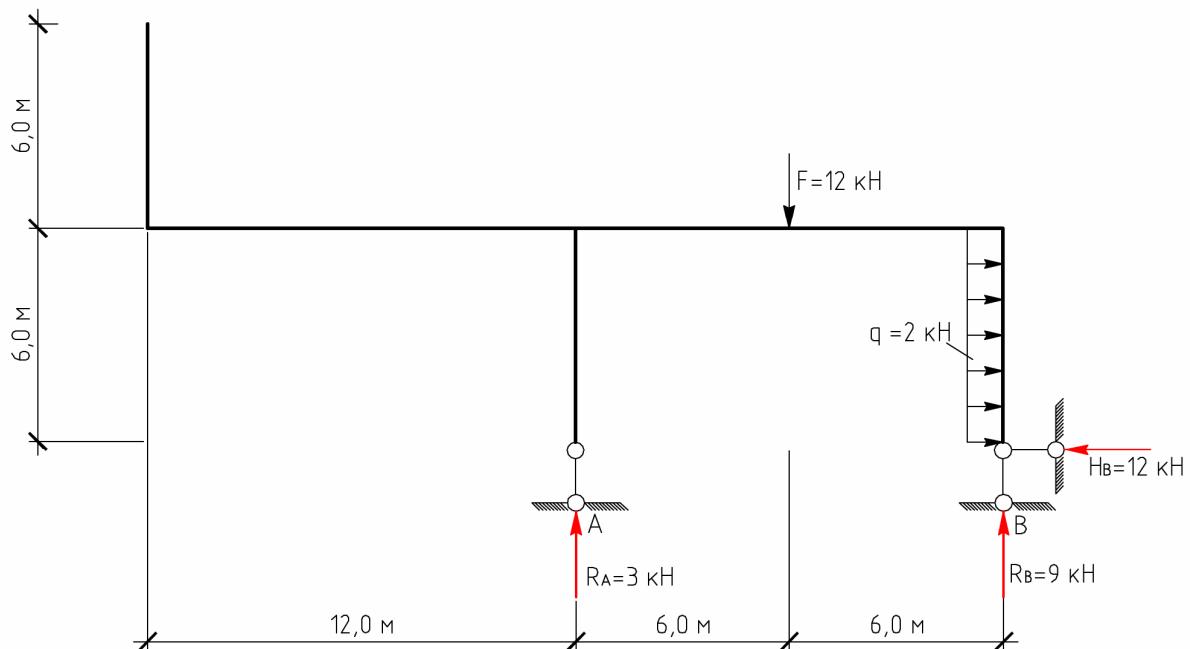
Puc. 4.4

$$\sum F_{ix} = 0; \quad H_B = 0;$$

$$\sum m_B = 0; \quad + X_2 \cdot 24 - R_A \cdot 12 = 0; \quad R_A = \frac{X_2 \cdot 24}{12} = \frac{1 \cdot 24}{12} = 2 \text{ kN};$$

$$\sum m_A = 0; \quad X_2 \cdot 12 - R_B \cdot 12 = 0; \quad R_B = \frac{X_2 \cdot 12}{12} = \frac{1 \cdot 24}{12} = 1 \text{ kN};$$

Перевірка:  $\sum F_{iy} = R_A - R_B - X_2 = 2 - 1 - 1 = 0$ .



Puc. 4.5

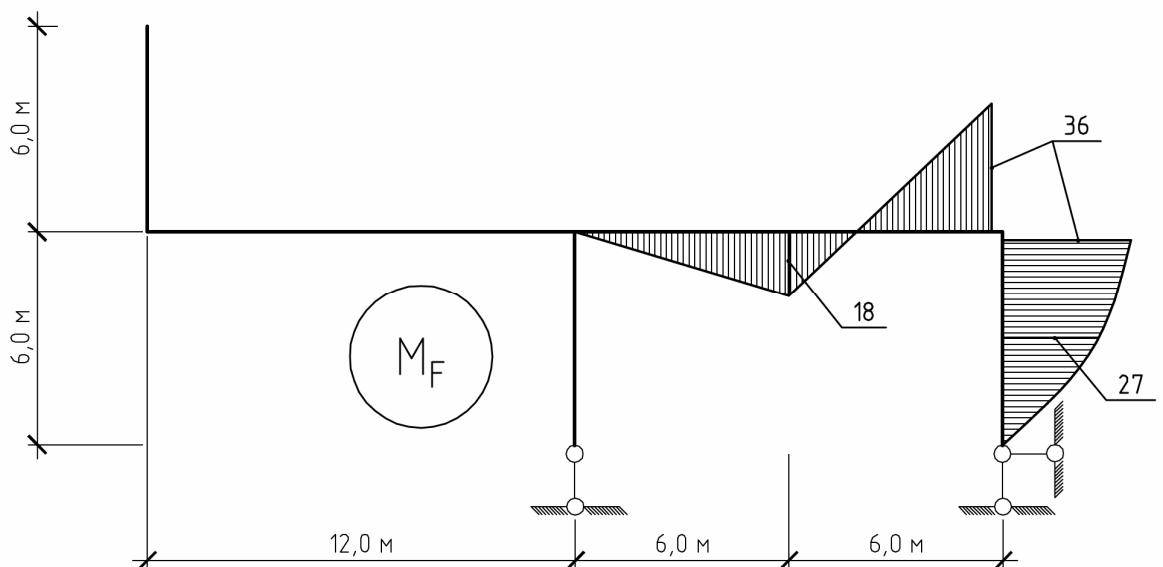
$$\sum F_{ix} = 0; \quad q \cdot 6 - H_B = 0;$$

$$H_B = q \cdot 6 = 12 \text{ kN};$$

$$\sum m_B = 0; \quad -R_A \cdot 12 + F \cdot 6 - q \cdot 6 \cdot 3 = 0; \quad R_A = \frac{F \cdot 6 - q \cdot 6 \cdot 3}{12} = \frac{12 \cdot 6 - 2 \cdot 6 \cdot 3}{12} = 3 \text{ kN};$$

$$\sum m_A = 0; \quad -F \cdot 6 - q \cdot 6 \cdot 3 - R_B \cdot 12 = 0; \quad R_B = \frac{F \cdot 6 + q \cdot 6 \cdot 3}{12} = \frac{12 \cdot 6 + 2 \cdot 6 \cdot 3}{12} = 9 \text{ kN};$$

Перевірка:  $\sum F_{iy} = R_A + R_B - F = 3 + 9 - 12 = 0$ .



Puc. 4.6

### 13. Знайдемо одиничні і вантажні переміщення

та виконаємо їх перевірку.

Обчислюємо коефіцієнти  $d_{ij}$  і вільні члени системи рівнянь  $\Delta_{iF}$ .

$$\begin{aligned} d_{11} &= \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EI} dS = \frac{6}{6 \cdot 2EI} (0 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 6 \cdot 6) + \frac{12}{6 \cdot 3EI} (6 \cdot 6 + 4 \cdot 6 \cdot 6 + 6 \cdot 6) + \\ &+ \frac{12}{6 \cdot 3EI} (6 \cdot 6 + 0 + 6 \cdot 6) + \frac{6}{6 \cdot 2EI} (6 \cdot 6 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 0) = \\ &= \frac{72}{2EI} + \frac{2 \cdot 216}{3EI} + \frac{2 \cdot 72}{3EI} + \frac{72}{2EI} = \frac{264}{EI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{12} &= \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EI} dS = -\frac{12}{6 \cdot 3EI} (0 + 4 \cdot 6 \cdot 6 + 6 \cdot 12) - \frac{12}{6 \cdot 3EI} (6 \cdot 12 + 0 + 0) = \\ &= -\frac{2 \cdot 216}{3EI} - \frac{2 \cdot 72}{3EI} = -\frac{192}{EI} \\ d_{21} &= d_{12} = -\frac{192}{EI}; \end{aligned}$$

$$d_{22} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2}{EI} dS = 2 \cdot \frac{12}{6 \cdot 3EI} (0 + 4 \cdot 6 \cdot 6 + 12 \cdot 12) = \frac{4 \cdot 288}{3EI} = \frac{384}{EI};$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_F}{EI} dS = \frac{6}{6 \cdot 3EI} (0 + 4 \cdot 3 \cdot 9 + 0) + \frac{6}{6 \cdot 3EI} (0 + 4 \cdot 3 \cdot 9 + 0) + \\ &+ \frac{6}{6 \cdot 2EI} (6 \cdot 36 + 4 \cdot 3 \cdot 27 + 0) = \frac{108}{3EI} + \frac{324}{3EI} + \frac{540}{2EI} = \frac{414}{EI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2F} &= \sum \int \frac{\bar{M}_2 M_F}{EI} dS = -\frac{6}{6 \cdot 3EI} (0 + 4 \cdot 9 \cdot 9 + 6 \cdot 18) + \frac{6}{6 \cdot 3EI} (-6 \cdot 18 + 4 \cdot 3 \cdot 9 + 0) = \\ &= -\frac{432}{3EI} + \frac{0}{3EI} = -\frac{144}{EI} \end{aligned}$$

Виконуємо перевірку правильності знайдених коефіцієнтів, для чого побудуємо сумарну одиничну епюру моментів (Рис. 4.7)  $M_S = \sum M_i$

Перевіряємо коефіцієнти при невідомих:

$$\sum d_{ij} = \sum \int \frac{\bar{M}_s \bar{M}_s}{EI} dS;$$

$$\sum d_{ij} = d_{11} + 2d_{12} + d_{22} = \frac{264}{EI} + 2 \left( -\frac{192}{EI} \right) + \frac{384}{EI} = \frac{264}{EI};$$

$$\begin{aligned}
\sum \int \frac{\bar{M}_S \bar{M}_S}{EI} dS &= \frac{6}{6 \cdot 2EI} (0 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 6 \cdot 6) + \frac{12}{6 \cdot 3EI} (6 \cdot 6 + 0 + 6 \cdot 6) + \\
&+ \frac{12}{6 \cdot 3EI} (6 \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 6) + \frac{6}{6 \cdot 2EI} (6 \cdot 6 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 0) = \\
&= \frac{72}{2EI} + \frac{2 \cdot 72}{3EI} + \frac{2 \cdot 216}{3EI} + \frac{72}{2EI} = \frac{264}{EI}
\end{aligned}$$

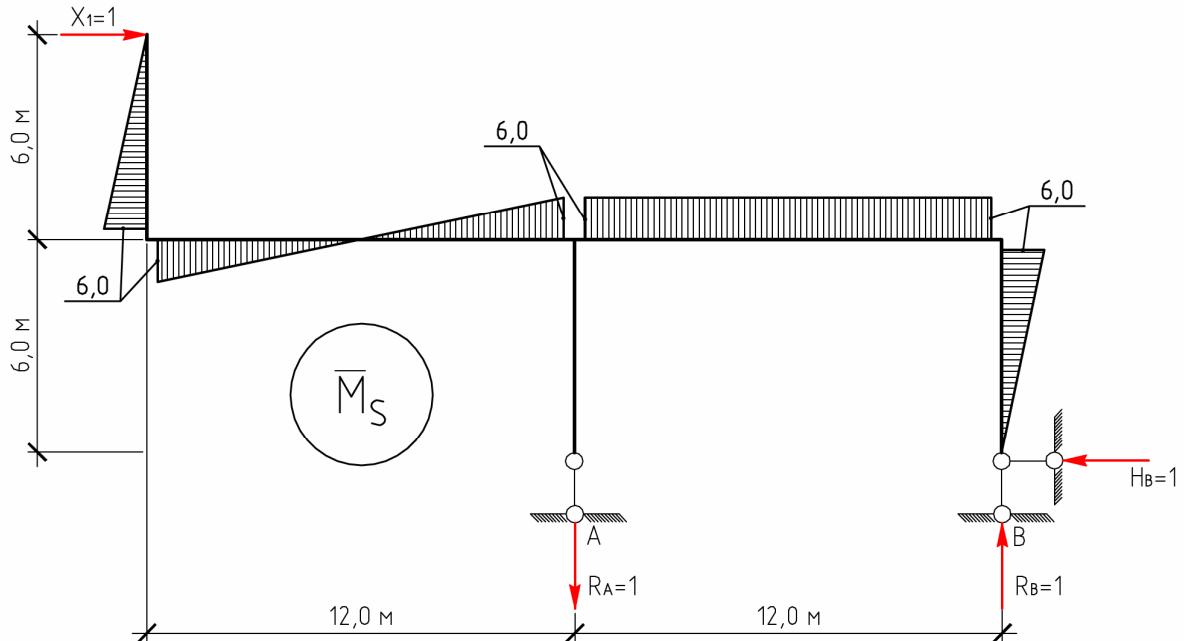


Рис. 4.7

Перевіряємо вільні члени системи:

$$\sum \Delta_{iF} = \sum \int \frac{\bar{M}_S M_F}{EI} dS;$$

$$\sum \Delta_{iF} = \Delta_{1F} + \Delta_{2F} = \frac{414}{EI} + \left( -\frac{144}{EI} \right) = -\frac{270}{EI};$$

$$\begin{aligned}
\sum \int \frac{\bar{M}_S M_F}{EI} dS &= -\frac{6}{6 \cdot 3EI} (0 + 4 \cdot 6 \cdot 9 + 6 \cdot 18) + \frac{6}{6 \cdot 3EI} (-6 \cdot 18 + 4 \cdot 6 \cdot 9 + 6 \cdot 36) + \\
&+ \frac{6}{6 \cdot 2EI} (6 \cdot 36 + 4 \cdot 3 \cdot 27 + 0) = -\frac{324}{3EI} + \frac{324}{3EI} + \frac{540}{2EI} = \frac{270}{EI}
\end{aligned}$$

Перевірка виконується.

$$\begin{cases} \frac{264}{EI} x_1 - \frac{192}{EI} x_2 + \frac{414}{EI} = 0 \\ -\frac{192}{EI} x_1 + \frac{384}{EI} x_2 - \frac{144}{EI} = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = -2,036 \text{ кН};$$

$$x_2 = -0,643 \text{ кН}.$$

#### 14. Розв'язуємо систему канонічних рівнянь.

$$\begin{cases} \frac{264}{EI}x_1 - \frac{192}{EI}x_2 + \frac{414}{EI} = 0 \\ -\frac{192}{EI}x_1 + \frac{384}{EI}x_2 - \frac{144}{EI} = 0 \end{cases} \quad x_1 = -2,036 \text{ кН}; \quad x_2 = -0,643 \text{ кН.}$$

#### 15. Побудуємо виправлені одиничні епюри згинаючих моментів.

Для цього перемножуємо всі ординати епюр  $M_i$  на отримані значення  $X_i$ .

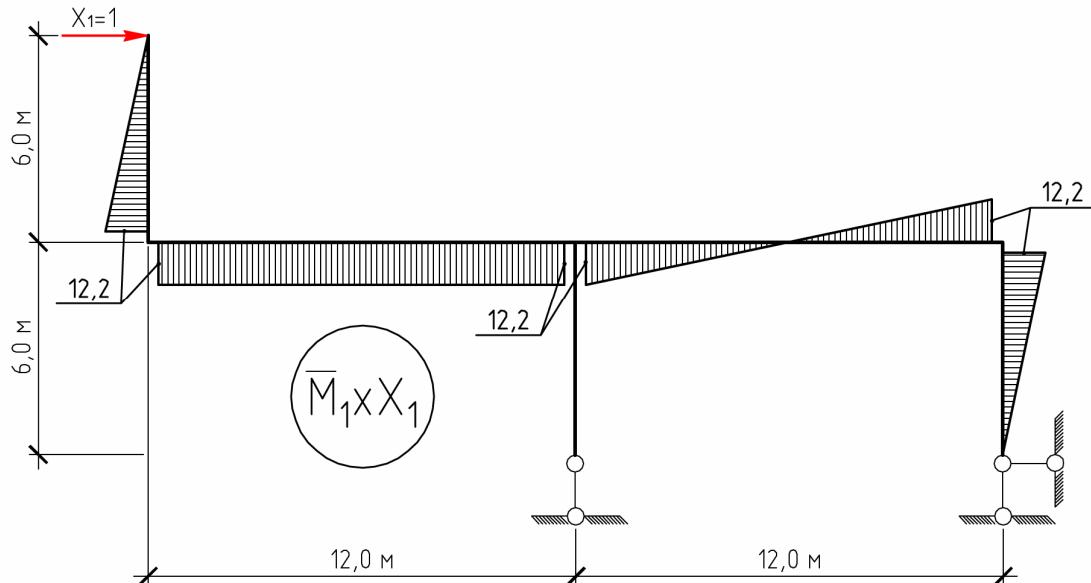


Рис. 4.8

Необхідно мати на увазі, що коли  $X_i$  має знак мінус, епюри будуть будуватись на протилежній стороні стержнів.

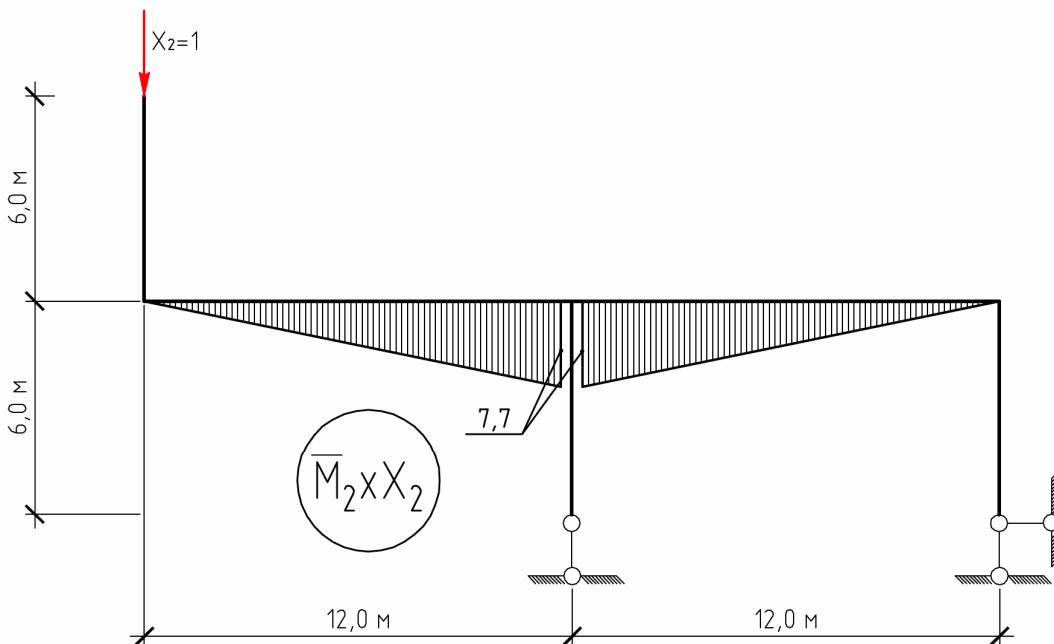


Рис. 4.9

## 16. Побудуємо кінцеву епюру згинаючих моментів та зробимо її перевірку.

Використовуючи принцип незалежності дії сил, будуємо кінцеву епюру моментів по формулі:  $M = \sum \bar{M}_i x_i + M_F$ ;

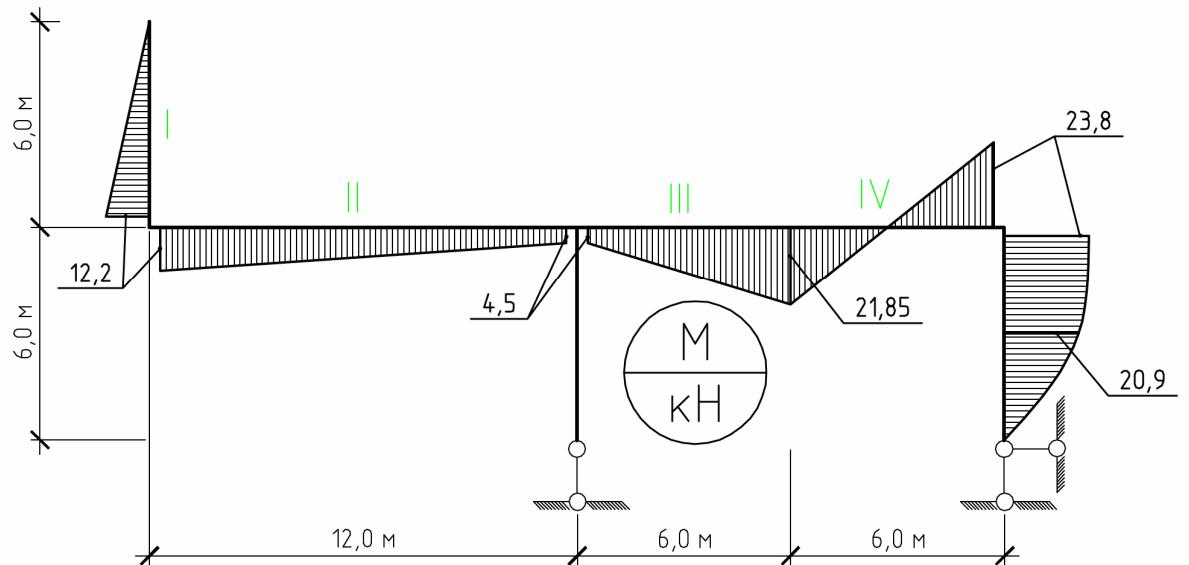


Рис. 4.10

Виконуємо статичну перевірку:



Рис. 4.11

Перевірка виконується

Виконуємо деформаційну (кінематичну) перевірку:

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{M_S M}{EI} dS &= -\frac{6}{6 \cdot 2EI} (0 + 4 \cdot 3 \cdot 6,1 + 6 \cdot 12,2) + \frac{12}{6 \cdot 3EI} (-6 \cdot 12,2 + 0 + 6 \cdot 4,5) + \\ &+ \frac{6}{6 \cdot 3EI} (6 \cdot 4,5 - 4 \cdot 6 \cdot 8,675 - 6 \cdot 21,85) + \frac{6}{6 \cdot 3EI} (-6 \cdot 21,85 + 4 \cdot 6 \cdot 0,975 + 6 \cdot 23,8) + \\ &+ \frac{6}{6 \cdot 2EI} (6 \cdot 23,8 + 4 \cdot 3 \cdot 20,9 + 0) = -\frac{146,4}{2EI} - \frac{2 \cdot 46,2}{3EI} - \frac{312,3}{3EI} + \frac{35,1}{3EI} + \frac{393,6}{2EI} = \\ &= -\frac{73,2}{EI} - \frac{30,8}{EI} - \frac{104,1}{EI} + \frac{11,7}{EI} + \frac{196,8}{EI} = \frac{0,4}{EI} \end{aligned}$$

**Похибка складає**  $\frac{11,7 - 100\%}{0,4 - x} = \frac{40}{11,7} = 3,42\%$ .

$3,42\% < 5\%$  Перевірка виконується.

## 17. Побудуємо епюри поперечних і поздовжніх зусиль.

Використовуючи той же підхід, що і при розрахунку статично визначеної рами.

Для прямолінійних ділянок I, II, III, IV:

$$Q_I = \frac{12,2 - 0}{6} = 2,03 \text{ кН}; \quad Q_{II} = \frac{12,2 - 4,5}{12} = 0,64 \text{ кН};$$

$$Q_{III} = \frac{21,85 + 4,5}{6} = 4,39 \text{ кН}; \quad Q_{IV} = \frac{23,8 + 21,85}{6} = 7,61 \text{ кН};$$

Для параболічної ділянки:

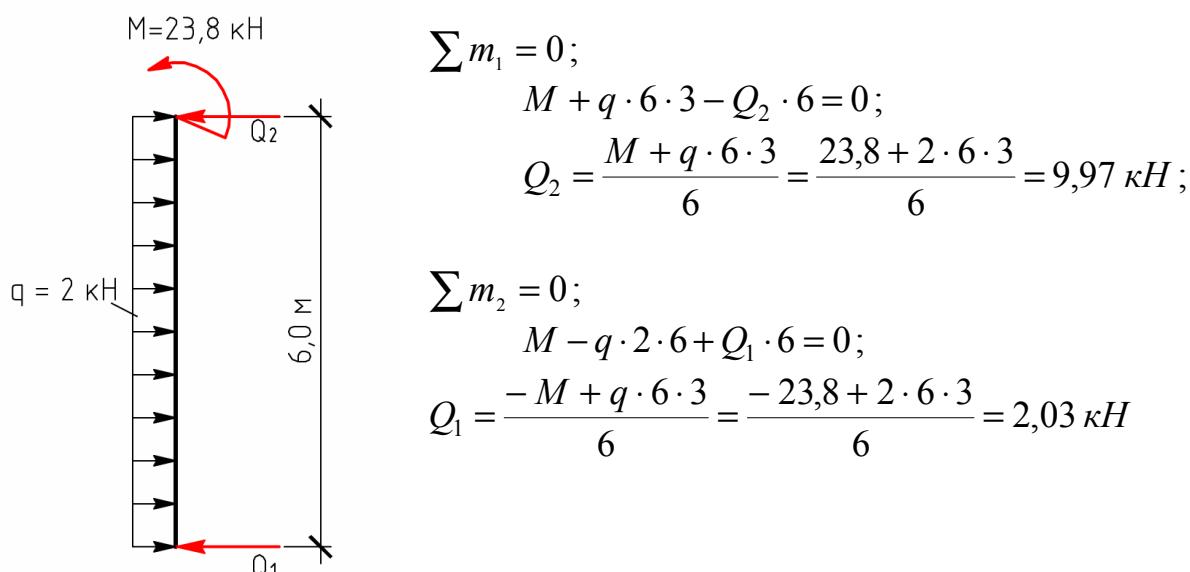


Рис. 4.11

Епюра  $Q$  буде мати вид:

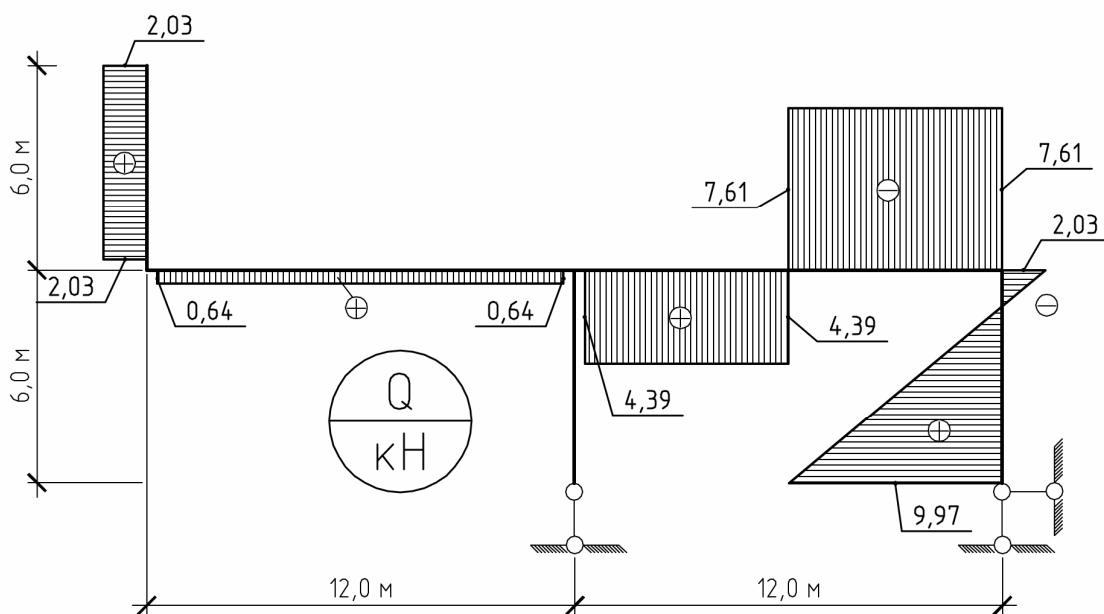
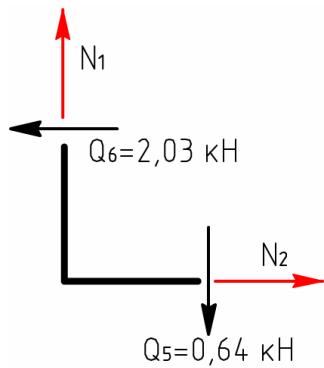


Рис. 4.12

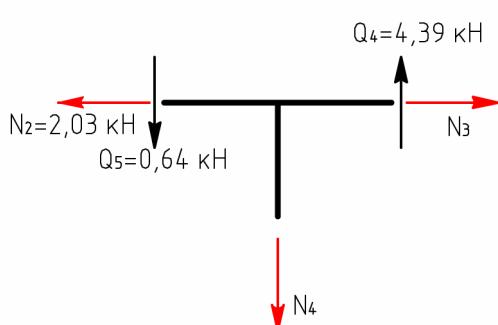
Будуємо епюру поздовжніх сил.

Для цього по черзі вирізуємо жорсткі вузли рами (починаючи з вузла де сходить-я не більше двох невідомих), прикладаємо до них відомі із епюри Q величини поперечних сил і невідомі поздовжні сили N. При цьому користуємось стандартними правилами знаків для Q і N.



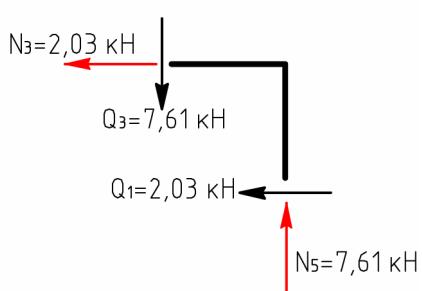
$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0; & \sum F_{iy} &= 0; \\ -2,03 + N_2 &= 0; & N_1 - 0,64 &= 0; \\ N_2 &= 2,03 \text{ kH}; & N_1 &= 0,64 \text{ kH};\end{aligned}$$

Рис. 4.13



$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0; & \sum F_{iy} &= 0; \\ -2,03 + N_3 &= 0; & 0,64 + N_4 - 4,39 &= 0; \\ N_3 &= 2,03 \text{ kH}; & N_4 &= 4,39 - 0,64 = 3,75 \text{ kH};\end{aligned}$$

Рис. 4.14



$$\begin{aligned}\sum F_{iy} &= 0; \\ -7,61 + N_5 &= 0; \\ N_5 &= 7,61 \text{ kH}.\end{aligned}$$

Рис. 4.15

Епюра N буде мати вид.

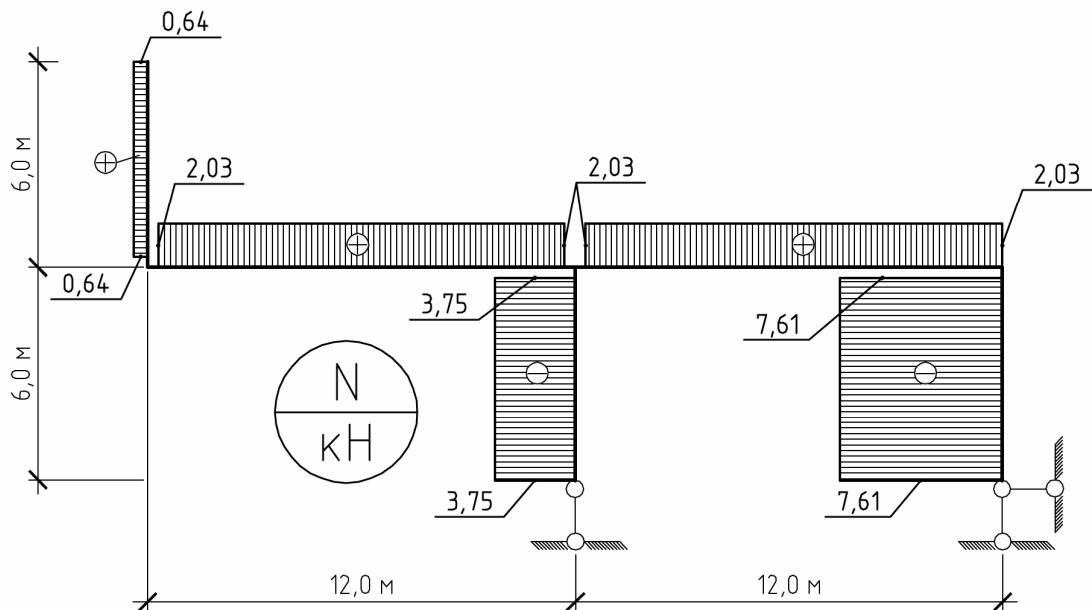


Рис. 4.16

### 18. Виконаємо статичну перевірку рівноваги рами.

Виконуємо кінцеву статичну перевірку рівноваги рами. Знаходимо за епюрами  $M$ ,  $Q$  та  $N$  опорні реакції і перевіряємо рівновагу рами з допомогою 3-х рівнянь рівноваги для плоскої системи сил.

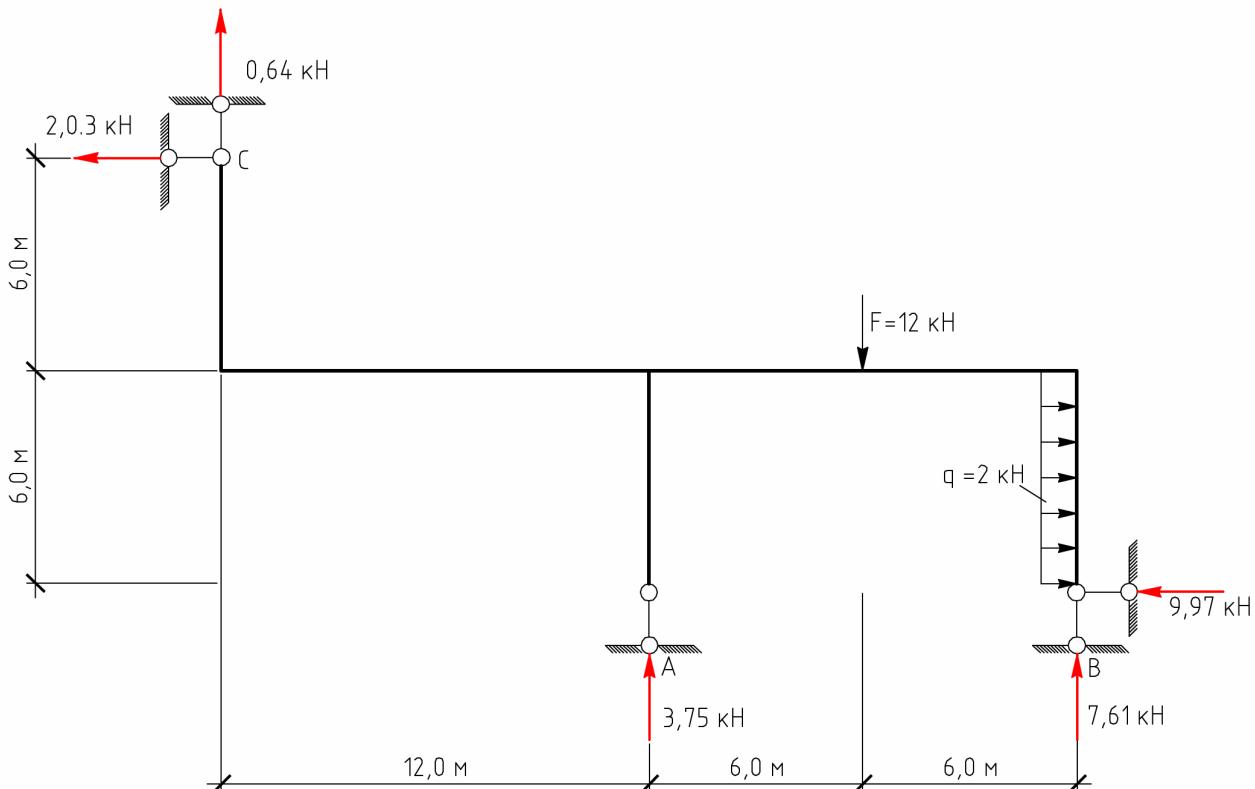


Рис. 4.17

$$\sum F_{ix} = 0; \quad -2.03 + 2 \cdot 6 - 9.97 = 0; \quad \sum F_{iy} = 0; \quad 0.64 + 3.75 - 12 + 7.61 = 0;$$

$$\sum m_A = 0; \quad 3.75 \cdot 12 - 12 \cdot 18 + 2 \cdot 6 \cdot 9 - 9.97 \cdot 12 + 7.61 \cdot 24 = 0.$$

Перевірка виконується.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- 1 Баженов В.А, Перельмутер А.В.,Шишов О.В. Будівельна механіка, Комп'ютерні технології: Підручник / За ред. д.т.н., проф. В.А.Баженова. - К.: Каравела, 2009. - 696с.
- 2 Дорошук Г. П., Трач В. М. Будівельна механіка / Навч. посібник. – Київ: ІЗМН, 1996. – 520 с.
- 3 Дорошук Г. П., Трач В. М. Будівельна механіка з елементами комп'ютерних технологій: Підручник. – Рівне НУВГП, 2005. – 566 с.
- 4 Дарков Ф. В. Учебник для строит. спец. вузов. – 8-е изд., перераб., и доп. – М.: Высш. шк., 1986. – 607 с.
- 5 Строительная механика. Руководство к практическим занятиям. Под редакцией Ю. И. Бутенко. К.: Вища школа. 1984. – 325 с
- 6 Клейн Г. К., Леонтьев Н. Н., Ванюшенков М. Г. И др. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (статика стержневых систем): Учебное пособие для студентов вузов / под редакцией Г. К. Клейна. 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа /1980. – 384 с.
- 7 Баженов В. А., Іванченко Г. М., Шишов О. В. Будівельна механіка. Розрахункові вправи. Задачі. Комп'ютерне тестування: Навч. посібник. – К.: Каравела, 2006. – 344 с.

Міністерство освіти і науки України  
Вище професійне училище №1 м. Рівне

## Розрахунково-графічна робота №1 з будівельної механіки

Тема: *Побудова епюр  $Q$ ,  $M$  i  $N$  для статично визначеної рами*

*Варіант 32*

Виконав:  
студент групи ВПУ-19  
*Іванов В.А*  
Перевірив:  
*Похилюк В.В*

Рівне – 2010

**Основні формули тригонометрії****Функції одного кута**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \operatorname{scs}^2 \alpha$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \operatorname{csc}^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha \cdot \operatorname{csc} \alpha = 1$$

$$\cos \alpha \cdot \operatorname{sec} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

**Функції суми та різниці двох кутів**

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

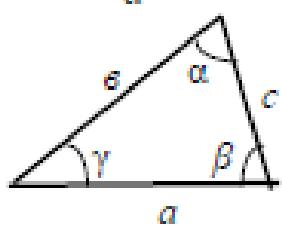
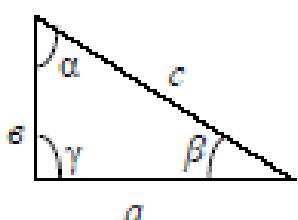
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}$$

**Розв'язання трикутників****Прямокутний трикутник**

$$\gamma = 90^\circ$$

$$a = c \cdot \sin \alpha \quad b = c \cdot \sin \beta \quad a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$a = c \cdot \cos \beta \quad b = c \cdot \cos \alpha \quad b = a \cdot \operatorname{tg} \beta$$

**Будь-який трикутник**

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\frac{\alpha}{\sin \alpha} = \frac{\beta}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

R – радіус кола, що є описаним

$$a = b \cdot \cos \gamma + c \cdot \cos \beta \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$D = \frac{\hat{a} + \hat{b} + \hat{c}}{2} \quad (\text{напівпериметр})$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(P - \hat{a})(D - \hat{b})}{\hat{a} \cdot \hat{b}}} \quad \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{P \cdot (D - a)}{\hat{a} \cdot \hat{b}}} \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(P - \hat{a})(D - \hat{b})}{P \cdot (P - a)}}$$

S – площа трикутника

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma = 2R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma = \sqrt{P(P - a) \cdot (P - b) \cdot (P - c) \cdot (D - \hat{b})} = \frac{\hat{a} \cdot \hat{b} \cdot \hat{c}}{4R}$$

**Функції подвійного і половинного кута**

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

**Функції від'ємного кута**

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

**Сума і різниця функцій 2-х кутів**

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \quad \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} \quad \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

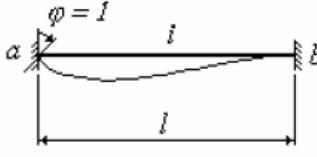
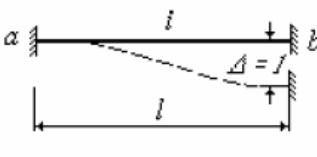
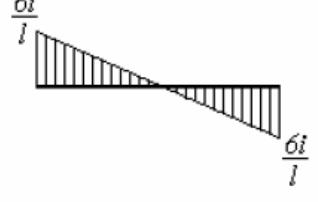
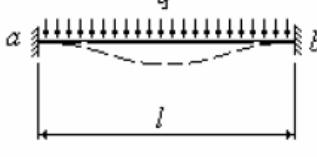
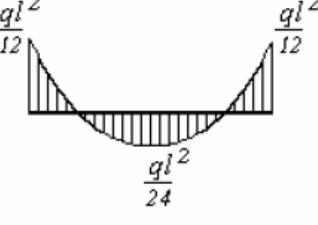
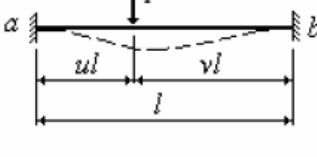
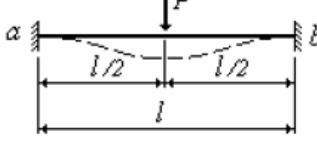
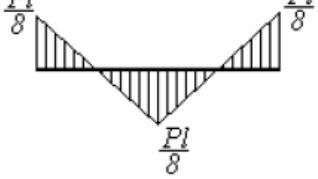
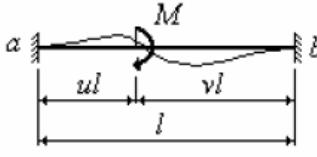
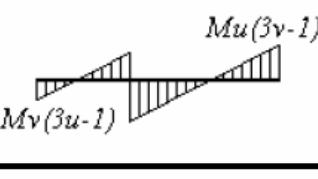
**Формули зведення**

Функції	Даний угол						
	$90 - \alpha$	$90 + \alpha$	$180 - \alpha$	$180 + \alpha$	$270 - \alpha$	$270 + \alpha$	$360 - \alpha$
$\sin$	$+\cos \alpha$	$+\cos \alpha$	$+\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos$	$+\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$+\sin \alpha$	$+\cos \alpha$

**Значення тригонометричних функцій для кутів 1<sup>ї</sup> чверті**

$\alpha =$	0	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin \alpha$	0	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm \infty$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

## Епюри внутрішніх зусиль в однопрогонових балках

Схема балки та навантаження	Кінцеві зусилля	Епюри згинаючих моментів
1	2	3
	$M_{ab} = 4i; \quad M_{ba} = 2i;$ $Q_{ab} = Q_{ba} = -\frac{6i}{l}.$	
	$M_{ab} = M_{ba} = -\frac{6i}{l};$ $Q_{ab} = Q_{ba} = \frac{12i}{l^2}.$	
	$M'_{ab} = -M'_{ba} = -\frac{qI^2}{12};$ $Q'_{ab} = -Q'_{ba} = \frac{ql}{2}.$	
	$M'_{ab} = -Pluv^2;$ $M'_{ba} = Plu^2v,$ $Q'_{ab} = Pv^2(1+2u);$ $Q'_{ba} = Pu^2(1+2v).$	
	$M'_{ab} = -M'_{ba} = -\frac{Pl}{8};$ $Q'_{ab} = -Q'_{ba} = \frac{P}{2}.$	
	$M'_{ab} = Mv(3u-1);$ $M'_{ba} = Mu(3v-1);$ $Q'_{ab} = Q'_{ba} = -\frac{6M}{l}uv.$	

	$M'_{ab} = M'_{ba} = \frac{M}{4};$ $Q'_{ab} = Q'_{ba} = -\frac{1,5M}{l}.$	
	$M'_{ab} = -\frac{qI^2}{6} u^2 (3 - 4u + 1,5u^2);$ $M'_{ba} = \frac{qI^2}{6} u^3 (2 - 1,5u).$	
	$M'_{ab} = -\frac{11}{192} ql^2;$ $M'_{ba} = \frac{5}{192} ql^2;$ $Q'_{ab} = \frac{13}{32} ql; Q'_{ba} = -\frac{3}{32} ql.$	
	$M_{ab} = 3i; \quad M_{ba} = 0;$ $Q_{ab} = Q_{ba} = -\frac{3i}{l}.$	
	$M_{ab} = -\frac{3i}{l};$ $M_{ba} = 0;$ $Q_{ab} = Q_{ba} = \frac{3i}{l^2}.$	
	$M''_{ab} = -\frac{ql^2}{8}; \quad M''_{ba} = 0;$ $Q''_{ab} = \frac{5}{8} ql; \quad Q''_{ba} = -\frac{3}{8} ql.$	
	$M''_{ab} = -\frac{Pl}{2} uv(1+v);$ $M''_{ba} = 0; \quad Q''_{ab} = \frac{Pv}{2} (3 - v^2);$ $Q''_{ba} = -\frac{Pu^2}{2} (3 - u).$	

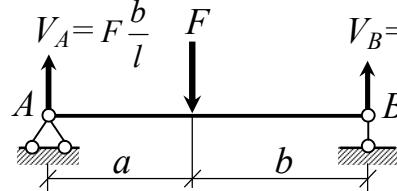
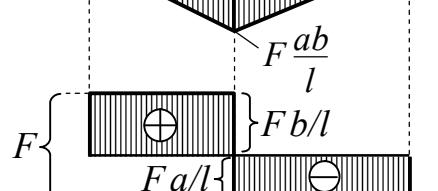
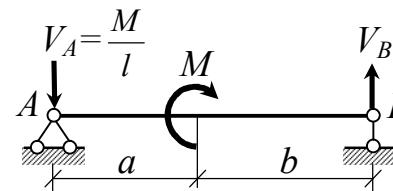
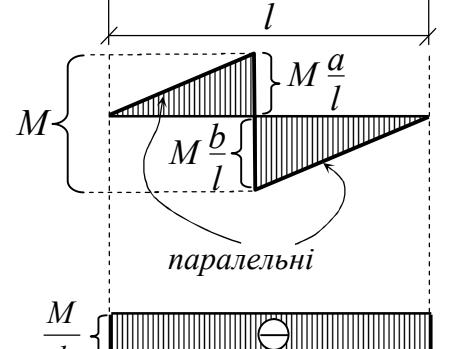
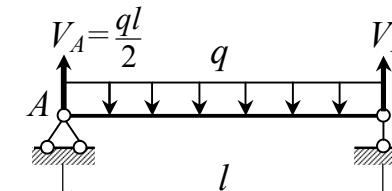
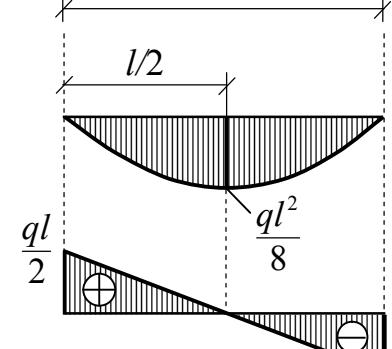
	$M''_{ab} = -\frac{3}{16}Pl; M''_{ba} = 0;$ $Q''_{ab} = \frac{11}{16}P; Q''_{ba} = -\frac{5}{16}P.$	
	$M''_{ab} = \frac{M}{2}(1-3\nu^2);$ $M''_{ba} = 0;$ $Q''_{ab} = Q''_{ba} = -\frac{1,5M}{l}(1-\nu^2).$	
	$M''_{ab} = -\frac{qI^2}{8}u^2(2-u)^2;$ $Q''_{ab} = \frac{qI}{8}[8u-u^3(3+u)];$ $Q''_{ba} = -\frac{qI}{8}u^3(3+\nu).$	
	$M''_{ab} = -\frac{9}{128}ql^2; M''_{ba} = 0;$ $Q''_{ab} = \frac{57}{128}ql;$ $Q''_{ba} = -\frac{7}{128}ql.$	
	$M''_{ab} = -\frac{qI^2}{8}\nu^2(2-\nu^2);$ $Q''_{ab} = \frac{qI}{8}\nu^2(6-\nu^2);$ $Q''_{ba} = -\frac{qI}{8}\nu[8-\nu(6-\nu^2)].$	
	$M_{ab} = 0; M_{ba} = 3i;$ $Q_{ab} = Q_{ba} = -\frac{3i}{l}.$	
	$M_{ab} = 0;$ $M_{ba} = -\frac{3i}{l};$ $Q_{ab} = Q_{ba} = \frac{3i}{l^2}.$	

	$M''_{ab} = 0; M''_{ba} = \frac{qI^2}{8};$ $Q''_{ab} = \frac{3}{8}qI; Q''_{ba} = -\frac{5}{8}ql$	
	$M''_{ba} = \frac{Pl}{2}uv(1+u);$ $M''_{ab} = 0; Q''_{ab} = \frac{Pv^2}{2}(3-v);$ $Q''_{ba} = -\frac{Pu}{2}(3-u^2).$	
	$M''_{ab} = 0;$ $M''_{ba} = \frac{M}{2}(1-3u^2);$ $Q''_{ab} = Q''_{ba} = -\frac{1,5M}{l}(1-u^2).$	
	$M'_{ab} = -M'_{ba} = 2i;$ $Q'_{ab} = Q'_{ba} = 0.$	
	$M'_{ab} = -M'_{ba} = -Pul(1-l);$ $Q'_{ab} = -Q'_{ba} = P.$	
	$M_{ab} = M_{ba} = 6i;$ $Q_{ab} = Q_{ba} = -\frac{12i}{l}.$	
	$M'_{ab} = M'_{ba} = -\frac{qI^2}{32};$ $Q'_{ab} = Q'_{ba} = \frac{5}{16}ql.$	

## ОСНОВНІ ПРАВИЛА ПОБУДОВИ І ПЕРЕВІРКИ ЕПЮР $M$ і $Q$

Зовнішні силові фактори ➡	Зосереджений момент	Зосереджена сила	Рівномірно розподілене навантаження
Схема навантаження			
Епюра згинальних моментів	  		
Епюра поперечних сил	$Q = \operatorname{tg} \alpha (>0)$  На епюрі $Q$ – ніяких особливостей	$Q_l = \operatorname{tg} \alpha_l (>0)$  $Q_r = \operatorname{tg} \alpha_r (<0)$	 $Q_l = \operatorname{tg} \alpha_l (>0)$ $\operatorname{tg} \beta = -q_y (<0)$ $Q_r = \operatorname{tg} \alpha (<0)$
Диференціальні залежності між $M$ , $Q$ і $q_y$	 $M + dM \quad Q + dQ$ $\frac{dM}{dx} = Q$ $\frac{dQ}{dx} = -q_y$	<b>Характер епюр:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>1. На незавантажений ділянці (<math>q_y = 0</math>): епюра <math>M</math> – прямолінійна, епюра <math>Q</math> – постійна.</li> <li>2. Наділянці з рівномірно розподіленим навантаженням (<math>q_y = \text{const}</math>):  <ul style="list-style-type: none"> <li>- епюра <math>M</math> – квадратна парабола, випукла в напрямі дії навантаження, епюра <math>Q</math> – похила пряма;</li> <li>- в точці по <math>Q = 0</math> за епюрою <math>M</math> – екстремум (<math>M_{\max}</math> або <math>M_{\min}</math>)</li> </ul> </li> </ul>	

**ЕПЮРИ  $M$  і  $Q$  В НАЙПРОСТИШІХ БАЛКАХ ВІД ТИПОВИХ НАВАНТАЖЕНЬ**

Тип балки	Навантаження		
	Зосереджена сила	Зосереджений момент	Рівномірно розподілене навантаження
Шарнірно оперта на кінцях	 	 	  
Консольна	