МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЛЮБЕШІВСЬКИЙ ТЕХНІЧНИЙ КОЛЕДЖ ЛУЦЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Циклова комісія викладачів математичних та природничо-наукових дисциплін

Основи вищої математики

Конспект лекцій

для здобувачів освіти освітньо-професійного ступеня фаховий молодший бакалавр
галузь знань 19 Архітектура і будівництво
спеціальності 192 Будівництво та цивільна інженерія
освітньо-професійної програми:
Опорядження будівель і споруд та будівельний дизайн
галузь знань 24 Сфера обслуговування
спеціальності 241 Готельно-ресторанна справа
освітньо-професійної програми:
Готельно-ресторанна справа
денної форми навчання

Любешів 2021

УДК 51 (07)
К 88

До друку

Голова методичної ради ВСП «Любешівський ТФК ЛНТУ»_____________________ Герасимик-Чернова Т.П.

(підпис)

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозитарій коледжу

Бібліотекар _____________ М.М. Демих

(підпис)

Рекомендовано до видання методичною радою ВСП «Любешівський ТФК ЛНТУ»

протокол №___ від _________________ 2021 року

Розглянуто і схвалено на засіданні циклової методичної комісії викладачів математичних та природничо-наукових дисциплін ВСП «Любешівський ТФК ЛНТУ»,

протокол №___ від _________________ 2021 року

Голова циклової методичної комісії _______________Остимчук А.В.

(підпис)

Укладачі: ____________ Кулик В.С.,
____________ Баховська М.В.,
___________ Кузьмич Т.П.
(підпис)

Основи вищої математика [Текст]: конспект лекцій для здобувачів освіти освітньо-професійного ступеня фаховий молодший бакалавр галузь знань 19 Архітектура і будівництво спеціальності 192 Будівництво та цивільна інженерія
освітньо-професійної програми: Опорядження будівель і споруд та будівельний дизайн, галузь знань 24 Сфера обслуговування спеціальності 241 Готельно-ресторанна справа денної форми навчання / уклад. В.С.Кулик., Т.П. Кузьмич, М.В. Баховська – Любешів: Любешівський технічний коледж Луцького НТУ, 2021 –105 с.

Методична робота містить курс лекцій з вищої математики та приклади розв’язання основних типів задач. Дане видання розроблене на допомогу у підготовці до здачі екзамену з вищої математики студентам вищих навчальних закладів I-II рівнів акредитації.

Розділ 1

Елементи лінійної алгебри

§-1. Перестановки n-го порядку. Поняття матриці.

Означення детермінанта n-го порядку

Розглянемо множину $M_n = \{1,2,3,4,...,n-1,n\}$ перших n натуральних чисел. Запис усіх елементів цієї множини у будь-якому порядку називається *перестановкою n-го порядку.* Обчислимо, скільки таких перестановок n-го порядку можна утворити.

На перше місце елемент можна обрати n способами, на друге – n-1 способом, на третє – n-2 способами і т.д., на n-не місце елемент можна буде обрати єдиним способом. Тому кількість усіх перестановок з n елементів буде рівна $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot 3\cdot 2\cdot 1$.

Добуток перших n натуральних чисел позначають $n!$ (читається n-факторіал), тобто

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot(n-1)\cdot n. \qquad (1.1)$$

Отже, перестановок n-го порядку є $n!$.

Наприклад, перестановок другого порядку є $2! = 1\cdot 2 = 2$, третього – $3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$, четвертого – $4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$, і т.д.

<u>*Означення.*</u> Кажуть, що два елементи перестановки *i* та *j утворюють інверсію*, якщо число *i*<j, але воно записане пізніше за *j*. Якщо кількість інверсій у перестановці парне число, то така перестановка називається *парною*, якщо кількість інверсій у перестановці непарне число, то перестановка називається *непарною*.

<u>Приклад1.</u> Визначити кількість інверсій у перестановці 5-го порядку: (4,2,3,1,5)

Оскільки 1 утворює інверсію з 4,2,3;

2 – з 4;

3 – з 4;

4 і 5 не утворюють інверсій, то всього інверсій: 3+1+1+0+0=5.

Введемо поняття матриці:

<u>*Означення.*</u> *Матрицею порядку* $m\times k$ називається прямокутна таблиця, що складається з m рядків, k стовбців і $m\times k$ чисел, що стоять у ній.

Матриці записують у вигляді:

$$A_{m\times k}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Розглянемо квадратну матрицю n-го порядку:

$$A_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

<u>*Означення.*</u> *Детермінантом* (*визначником*)матриці A n-го порядку називається алгебраїчна сума $n!$доданків, кожен з яких є добутком n елементів цієї матриці, взятих по одному і тільки по одному з кожного рядка і кожного стовбця цієї матриці. Знак кожного такого добутку рівний $(-1)^l$, де l – кількість інверсій у перестановці других індексів, при умові, що перші індекси впорядковані:

$$\det A=\sum_{n!}(-1)^l a_{1\alpha_1}\cdot a_{2\alpha_2}\cdot a_{3\alpha_3}a_{(n-1)\alpha_{n-1}}a_{n\alpha_n}\ , \tag{1.4}$$

де

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.5}$$

Знайдемо формулу для визначення визначника 2-го порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

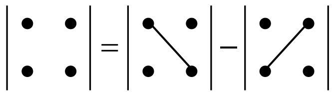
Для цього складемо таблицю:

Добуток	Перестановка других індексів	Кількість інверсій	Знак добутку
$a_{11}\cdot a_{22}$	(1,2)	0	$(-1)^0=+1$
$a_{12}\cdot a_{21}$	(2,1)	1	$(-1)^1=-1$

За означенням детермінанта отримаємо:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21} \tag{1.6}$$

Отже, визначник 2-го порядку можна обчислювати за схемою:



Приклад. Обчислити:

$$\begin{vmatrix} 11 & -4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 11 \cdot 5 - 6 \cdot (-4) = 55 + 24 = 79.$$

Знайдемо формулу для визначення визначника 3-го порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

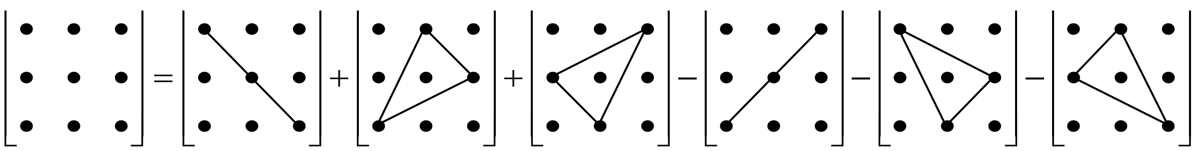
Складемо таблицю:

Добуток	Перестановка других індексів	Кількість інверсій	Знак добутку
$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$	(1,2,3)	0	$(-1)^0 = +1$
$a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$	(1,3,2)	1	$(-1)^1 = -1$
$a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$	(2,1,3)	1	$(-1)^1 = -1$
$a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$	(2,3,1)	2	$(-1)^2 = +1$
$a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$	(3,2,1)	3	$(-1)^3 = -1$
$a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$	(3,1,2)	2	$(-1)^2 = +1$

За означенням детермінанта отримаємо:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}. \quad (1.7)$$

Отже, визначник 3-го порядку можна обчислювати за схемою:



Приклад. Обчислити:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 7 + (-1) \cdot 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 \cdot 5 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot 5 - (-1) \cdot 0 \cdot 7 = 45.$$

§-2. Метод Гаусса і метод Гаусса-Жордана розв'язування систем лінійних рівнянь

Означення. Системою k лінійних рівнянь з n невідомими називається система виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3, \\ ...., \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + ... + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases} \tag{1.8}$$

де $a_{ij}, b_i \in R(i = \overline{1,k},\ j = \overline{1,n})$ – задані дійсні числа, $x_j\,(j = \overline{1,n})$ – змінні. *Розв'язком системи* називається n-вимірний вектор $\overrightarrow{x_0} = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, ..., x_n^0)$ такий, що при підстановці його координат замість відповідних змінних, кожне рівняння системи (1.8) перетворюється на правильну рівність.

Означення. Система, яка має розв'язок, називається *сумісною*, а система, яка не має розв'язку – несумісною.

Означення. Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, *невизначеною* – коли система має безліч розв'язків.

Метод Гаусса полягає у послідовному виключенні невідомих з рівнянь:

x_1 виключаємо з усіх рівнянь, крім першого;

x_2 – з усіх рівнянь, крім першого і другого;

x_3 – з усіх рівнянь, крім першого, другого і третього і т.д.

Для сумісних систем лінійних рівнянь можливі два випадки:

1. В останньому рівнянні залишиться одне невідоме. Тоді система матиме єдиний розв'язок, який шукається «знизу-вгору».

2. В останньому рівнянні залишиться більш, ніж одне невідоме. Тоді лишаємо у лівій частині цього рівняння лише одну змінну, а інші переносимо у праву частину рівняння і називатимемо їх *вільними змінними*. Вільним змінним можна надавати довільних значень і шукати відповідні значення інших невідомих. В цьому випадку система матиме безліч розв'язків, тобто буде невизначеною.

Приклад. Розв'язати систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 49. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему за допомогою матриць:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 49 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |-3\,|| \\ |-3\,||| \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & -7 & 4 & -20 \\ 0 & -10 & -2 & -152 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 7\,|||\,-10\,|| \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & -7 & 4 & -20 \\ 0 & 0 & -54 & -864 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \div(-54) \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & -7 & 4 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 16 \end{array}\right).$$

З останньої матриці отримаємо систему:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -5, \\ -7x_2 + 4x_3 = -20, \\ x_3 = 16; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = -21, \\ -7x_2 = -84, \\ x_3 = 16; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 9, \\ x_2 = 12, \\ x_3 = 16. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(9;12;16)\}$.

Метод Гаусса можна модифікувати, якщо робити послідовне виключення змінних з усіх рівнянь, крім одного. Це можна зробити за допомогою правила прямокутника. При цьому потрібно обирати ведучий елемент (найкраще на кожному кроці вибирати «одиницю»), який має міститися по головній діагоналі матриці, що відповідає даній системі рівнянь. Удосконалений таким способом метод Гаусса називається *методом Гаусса - Жордана.*

Приклад2. Розв'язати систему методом Гаусса - Жордана:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -5, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = -4. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & 3 & -4 \end{array}\right) \| -| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & -2 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & 3 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -5 & 7 \\ 0 & 7 & -5 & 12 \end{array}\right) \||| -3 \| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & (1) & 10 & -9 \\ 0 & 7 & -5 & 12 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 22 & -22 \\ 0 & 1 & 10 & -9 \\ 0 & 0 & -75 & 75 \end{array}\right) \div(-75) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 22 & -22 \\ 0 & 1 & 10 & -9 \\ 0 & 0 & (1) & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

З останньої матриці отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = -1. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(0;1;-1)\}$.

§-3. Метод Крамера розв'язування систем лінійних рівнянь

Розглянемо систему *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3, \\ ...., \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1.9}$$

Введемо позначення: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & b_n & ... & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & b_3 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & b_n \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta \neq 0$, то розв’язок системи (1.9) шукають за *формулами Крамера:*

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}, \\ .... \\ x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}. \end{cases} \tag{1.10}$$

<u>Приклад.</u> Розв’язати систему методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 12, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 12, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 12, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Скориставшись формулами Крамера, отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{12}{12} = 1, \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{12}{12} = 1, \\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{0}{12} = 0. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(1;1;0)\}$.

§-4. Дії над матрицями

Означення. Сумою двох матриць $A_{m\times k}=(a_{ij})$ і $B_{m\times k}=(b_{ij})$, де $i=\overline{1,m}, j=\overline{1,k}$, називається матриця $C_{m\times k}=(c_{ij})$, де $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ для $\forall\ i=\overline{1,m}, j=\overline{1,k}$.

Означення. Добутком матриці $A_{m\times k}=(a_{ij})$ *на число* λ називається матриця $\lambda A_{m\times k}=(\lambda a_{ij})$, *де* $i=\overline{1,m}, j=\overline{1,k}$.

Означення. Добутком двох матриць $A_{m\times k}=(a_{ir})$ і $B_{k\times p}=(b_{rj})$, де $i=\overline{1,m}, r=\overline{1,k}, j=\overline{1,p}$, називається матриця $C_{m\times p}=(c_{ij})$, де

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+a_{i3}\cdot b_{3j}+\ldots+a_{ik}\cdot b_{kj}=\sum_{r=1}^{k}a_{ir}\cdot b_{rj} \tag{1.11}$$

для $\forall\ i=\overline{1,m}, j=\overline{1,p}$.

Приклад. Нехай $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & -2 & 5\\ 0 & 4 & 1 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -3 & 1 & -1\\ 2 & -3 & 2 & 4\end{pmatrix}$. Знайти $A+B$, $3A$.

$A+B=\begin{pmatrix}8 & -4 & -1 & 4\\ 2 & 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$, $3A=\begin{pmatrix}9 & -3 & -6 & 15\\ 0 & 12 & 3 & -12\end{pmatrix}$.

Приклад. Нехай $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & -2 & 5\\ 0 & 4 & 1 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}$. Знайти $A\times B$.

$A\times B=\begin{pmatrix}10 & 8 & -17\\ -12 & 5 & 18\end{pmatrix}$.

Властивості дій над матрицями:

1. $\forall A,B: A+B=B+A$;
2. $\forall A,B,C: (A+B)+C=A+(B+C)$;
3. $\forall A,B,\forall\lambda: \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$;
4. $\forall A,\forall\lambda,\mu: (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$;
5. $A\times B\neq B\times A$ (в загальному випадку);
6. $\forall A,B,C: (A\times B)\times C=A\times(B\times C)$;
7. $\forall A,B,C: (A+B)\times C=A\times C+B\times C$.

§-5. Одинична матриця. Обернена матриця та її обчислення за допомогою елементарних перетворень

Означення. Одиничною матрицею n-го порядку називається така квадратна матриця, в якій по головній діагоналі розміщені «одиниці», а інші елементи – нулі.

Наприклад, одинична матриця 4-го порядку має вигляд:

$$E_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Одинична матриця E має ту властивість, що при множенні її чи зліва, чи справа на довільну матрицю одержуємо ту ж матрицю. Тобто, для будь-якої матриці A виконуються рівності:

$$A\times E = E\times A = A. \tag{1.12}$$

Означення. Матриця B називається *оберненою до матриці A*, якщо виконуються рівності:

$$A\times B = B\times A = E. \tag{1.13}$$

Обернену матрицю до матриці A позначають A^{-1}.

З означення слідує, що якщо матриця B обернена до матриці A, то і A – обернена до B, тобто має місце рівність:

$$(A^{-1})^{-1} = A. \tag{1.14}$$

Обернені матриці існують тільки для квадратних матриць A, причому таких, що $\det A \neq 0$.

Для знаходження оберненої матриці до матриці A складають матрицю виду: $(A\,|\,E)$, де E – одинична матриця того ж порядку, що й A. Утворену матрицю за допомогою елементарних перетворень зводять до вигляду: $(E\,|\,B)$. Тоді покладають: $A^{-1} = B$.

Приклад. Знайти обернену матрицю до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Складаємо матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} |-\|\\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} (1) & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \times(-1) \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right)\times(-1)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & (1) & -7 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -4 & 5 & 1 \end{array}\right)\div 12 \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -\frac{1}{12} & \frac{2}{12} & 0 \\ 0 & 1 & -7 & \frac{2}{12} & -\frac{3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & (1) & -\frac{4}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{5}{12} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{7}{12} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \end{array}\right).$$

Звідси отримаємо: $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{8}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{4}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{7}{12} \\ -\frac{4}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -4 & -1 & 7 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$

§-6. Обчислення оберненої матриці за допомогою алгебраїчних доповнень

Нехай маємо квадратну матрицю *n*-го порядку:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

Розглянемо детермінант *n*-го порядку, що відповідає цій матриці:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.16}$$

Означення. Мінором елемента a_{ij} детермінанта *n*-го порядку називається детермінант (*n-1*)-го порядку, який одержується з даного детермінанта викресленням *i*-того рядка та *j*-того стовбця.

Мінор елемента a_{ij} позначається: M_{ij}.

Означення. Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} називається число:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}. \tag{1.17}$$

Теорема

Нехай задано матрицю A рівністю (1.15). *Тоді, якщо* $\det A=\Delta\neq 0$, *то обернену матрицю до матриці A можна обчислити за допомогою рівності:*

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \dots & A_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1.18)$$

<u>Приклад.</u> Знайти обернену матрицю до матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ за допомогою алгебраїчних доповнень.

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \text{ де } \Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=37,$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=3,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=1,\ A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-8,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2,\ A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=13,\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=7,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=8,\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=-22,\ A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=-9.$$

Звідси: $A^{-1}=\frac{1}{37}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 1 & 13 & -22 \\ -8 & 7 & -9 \end{pmatrix}$.

§-7. Матрична форма запису системи лінійних рівнянь

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\dots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\dots+a_{2n}x_n=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+\dots+a_{3n}x_n=b_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+a_{n3}x_3+\dots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \qquad (1.19)$$

Введемо до розгляду такі матриці:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тоді систему (1.19) можна записати у вигляді матричного рівняння:

$$A\times X = B \tag{1.20}$$

Нехай $\Delta = \det A \neq 0$. Тоді матриця A має обернену A^{-1}. Помножимо зліва обидві частини рівності (1.20) на A^{-1}:

$$A^{-1}\times(A\times X) = A^{-1}\times B,$$

$$(A^{-1}\times A)\times X = A^{-1}\times B,$$

$$E\times X = A^{-1}\times B,$$

$$X = A^{-1}\times B. \tag{1.21}$$

Матриця X є розв'язком матричного рівняння (1.20), а значить і початкової системи (1.19).

Приклад. Розв'язати систему матричним методом:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -3, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

Позначимо:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Матриця A^{-1} для даної матриці була знайдена в прикладі у §-6:

$$A^{-1} = \frac{1}{37}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 1 & 13 & -22 \\ -8 & 7 & -9 \end{pmatrix}$$

Скориставшись формулою (1.21), отримаємо:

$$X = A^{-1}\cdot B = \frac{1}{37}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 1 & 13 & -22 \\ -8 & 7 & -9 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{37}\begin{pmatrix} 37 \\ -74 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси: $\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -2, \\ x_3 = 0. \end{cases}$

Відповідь: $\{(1;-2;0)\}$.

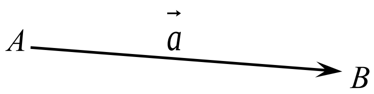
Розділ 2

Метод координат

§-1. Поняття вектора. Колінеарні і компланарні вектори

Під *вектором* будемо розуміти напрямлений відрізок.

Для векторів застосовують позначення: $\vec{a}, \overrightarrow{AB}$. В останньому випадку точку A називають *початком вектора*, точку B – *кінцем вектора* $\overrightarrow{AB}$ (мал.1).



мал. 1

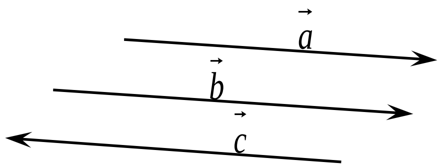
<u>*Означення.*</u> Вектор, у якого початок співпадає з кінцем, називається *нульовим*.

Нульовий вектор позначається: $\vec{0}$. Напрям нульового вектора невизначений.

<u>*Означення.*</u> Вектори називаються *колінеарними*, якщо вони паралельні до однієї прямої або лежать на одній прямій.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – колінеарні, то це позначають так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

<u>*Означення.*</u> Паралельні вектори називаються *співнапрямленими,* якщо вони лежать в одній півплощині відносно прямої, що проходять через початки цих векторів; *протилежно напрямленими* – якщо вони лежать в різних півплощинах відносно цієї прямої.



мал. 2

На мал.2 вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – співнапрямлені: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – протилежно напрямлені: $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$.

Вектор $\overrightarrow{BA}$ називається *протилежним до вектора* $\overrightarrow{AB}$, тобто: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

<u>*Означення.*</u> Три вектори називаються *компланарними*, якщо вони паралельні до однієї площини або лежать в одній площині.

Довжина вектора $\vec{a}$ позначається $|\vec{a}|$.

<u>*Означення.*</u> Вектори називаються *рівними*, якщо вони співнапрямлені і мають однакову довжину, тобто:

$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow$ 1. $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, 2. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

<u>Теорема</u>

З будь-якої точки простору можна побудувати вектор, рівний даному, і при тому тільки один.

§-2. Лінійні операції над векторами

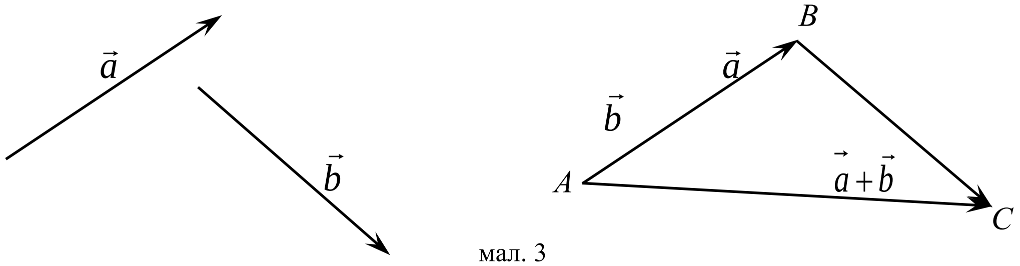
I. Додавання векторів.

<u>Означення.</u> Сумою двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{a}+\vec{b}$, який будується за таким правилом:

1) з довільної точки A будуємо вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$;

2) з його кінця – точки B будуємо вектор $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$;

3) сполучаємо початок вектора $\vec{a}$ – точку A з кінцем вектора $\vec{b}$ – точкою C.



мал. 3

Таке правило побудови суми двох векторів називається *правилом трикутника*.

Як бачимо з мал.3, для суми векторів справедлива рівність:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}\ . \qquad (2.1)$$

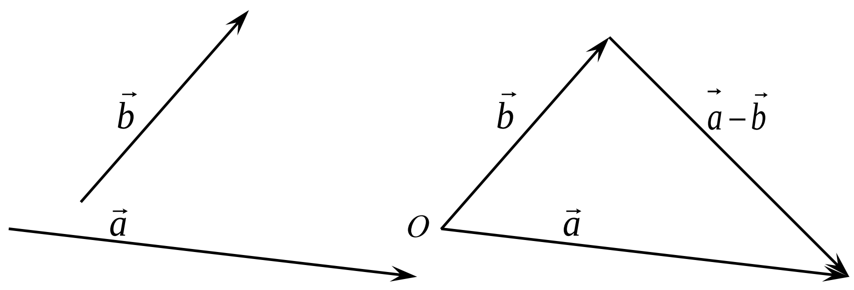
***Властивості суми векторів*:**

1. $\forall \vec{a},\vec{b} : \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ – *комутативність*;
2. $\forall \vec{a},\vec{b},\vec{c} : (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ – *асоціативність*;
3. $\forall \vec{a} : \vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$;
4. $\forall \vec{a} : \vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$.

II. Віднімання векторів.

<u>Означення.</u> Різницею двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{c}$, який в сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$.

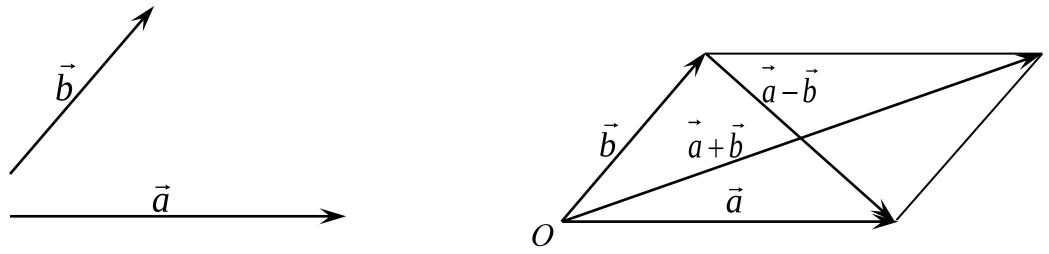
Щоб знайти різницю двох векторів, досить віднести ці вектори до спільного початку, з’єднати їхні кінці і поставити стрілку біля того вектора, від якого віднімаємо (мал.4).



мал. 4

Для знаходження суми і різниці двох векторів також користуються *правилом паралелограма*:

З довільної точки будуємо обидва вектори, на цих векторах добудовуємо паралелограм. Сумою цих векторів є діагональ паралелограма, яка виходить із спільного початку, їх різницею є інша діагональ (мал. 5).



мал.5

III. Множення вектора на число.

<u>*Означення.*</u> *Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ* називається вектор $\lambda\vec{a}$, довжина якого дорівнює добутку довжини цього вектора на модуль числа. Цей вектор співнапрямлений з даним вектором, якщо число додатне; протилежно напрямлений, якщо число від'ємне і дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли або число дорівнює нулю, або вектор дорівнює нулю.

Тобто, вектор $\lambda\vec{a}$ задовольняє наступні умови:

1) $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$,

2) $\lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, якщо $\lambda > 0$,

3) $\lambda\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, якщо $\lambda < 0$,

4) $\lambda\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ або $\vec{a} = \vec{0}$.

***Властивості добутку вектора на число*:**

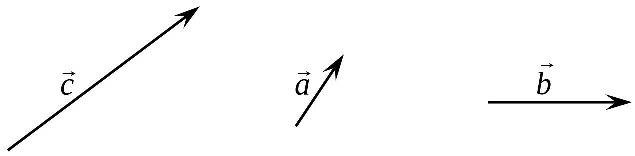
1. $\forall\vec{a} : 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;
2. $\forall\vec{a}\forall\alpha,\beta : \alpha(\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$ – *асоціативність множення*;
3. $\forall\vec{a}\forall\alpha,\beta : (\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$;
4. $\forall\vec{a},\vec{b}\forall\alpha : \alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$;

дві останні формули називаються *дистрибутивними законами множення відносно додавання*.

§-3. Розклад вектора за даними напрямами

Означення. Розкласти вектор $\vec{c}$ за двома не колінеарними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (на площині) означає знайти такий паралелограм, для якого $\vec{c}$ буде діагоналлю, а сторонами паралелограма будуть вектори, колінеарні до $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

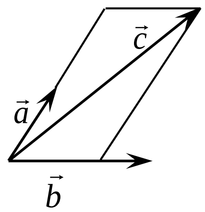
Приклад. Розкласти вектор $\vec{c}$ за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо вектори розміщені так, як показано на мал.6.



мал. 6

Віднесемо вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ до спільного початку та добудовуємо на основі їх паралелограм так, щоб вектор $\vec{c}$ був діагоналлю цього паралелограма.

Як видно з мал. 7, $\vec{c} = 2\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$.



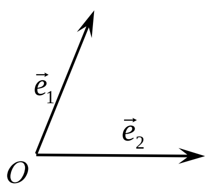
мал. 7

Означення. Розкласти вектор $\vec{d}$ за трьома не компланарними векторами $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ (в просторі) означає знайти такий паралелепіпед, для якого $\vec{d}$ буде діагоналлю, а сторонами паралелепіпеда будуть вектори, колінеарні до $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

§-4. Базис простору

Означення. Базисом площини називається впорядкована пара не колінеарних векторів.

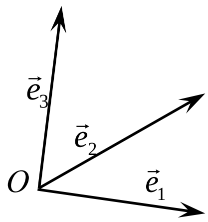
Базис площини позначається: $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, де вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ не колінеарні (мал. 8).



мал. 8

<u>Означення.</u> *Базисом простору* називається впорядкована трійка не компланарних векторів.

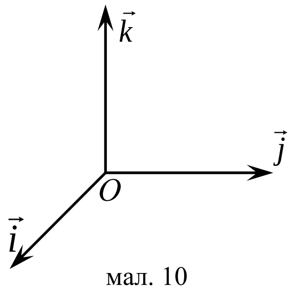
Базис простору позначають: $B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, де вектори $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ не компланарні (мал.9).



мал. 9

<u>Означення.</u> Базис називається *ортонормованим*, якщо базисні вектори попарно перпендикулярні і довжини базисних векторів рівні одиниці.

Ортонормований базис $B=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, де $\vec{i}\perp\vec{j},\vec{i}\perp\vec{k},\vec{j}\perp\vec{k}$, $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$ (мал. 10).



мал. 10

<u>Теорема</u> (*про розклад вектора за базисними векторами*)

Будь-який вектор простору можна розкласти за базисними векторами, причому єдиним способом.

Тобто, довільний вектор $\vec{a}$ простору можна у базисі $B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ подати у вигляді:

$$\vec{a}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3. \quad (2.2)$$

<u>Означення.</u> *Координатами вектора* в даному базисі називається впорядкована трійка дійсних чисел, які є коефіцієнтами в лінійному розкладі цього вектора за базисними векторами.

Якщо вектор $\vec{a}$ задається рівністю (2.2), то координатами цього вектора є впорядкована трійка (x,y,z), тобто:

$$\vec{a}\,(x,y,z)\ \Leftrightarrow\ \vec{a}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3. \quad (2.3)$$

Властивості операцій над векторами через координати:

1) Рівні вектори мають рівні відповідні координати в тому самому базисі:

$$\vec{a}(x_1,y_1,z_1)=\vec{b}(x_2,y_2,z_2)\Leftrightarrow x_1=x_2, y_1=y_2, z_1=z_2. \quad (2.4)$$

2) Координати суми двох векторів дорівнюють сумам їх відповідних координат:

$$\vec{a}(x_1, y_1, z_1), \vec{b}(x_2, y_2, z_2) \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)\,. \qquad (2.5)$$

3) Координати добутку вектора на число дорівнюють добуткам координат цього вектора на дане число:

$$\vec{a}(x, y, z) \Rightarrow \lambda\vec{a} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)\,. \qquad (2.6)$$

4) Координати лінійної комбінації кількох векторів дорівнюють тій же лінійній комбінації відповідних координат.

5) Координати вектора $\overrightarrow{AB}$, де $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ обчислюються за формулою:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)\,, \qquad (2.7)$$

тобто, дорівнюють різницям відповідних координат його кінця і початку.

Приклад. $\vec{a}(2,4,-1), \vec{b}(5,-2,-3)$. Знайти $3\vec{a} - 4\vec{b}$.

$3\vec{a} - 4\vec{b} = (3 \cdot 2 - 4 \cdot 5, 3 \cdot 4 - 4 \cdot (-2), 3 \cdot (-1) - 4 \cdot (-3)) = (-14,20,9)$.

Умова колінеарності двох векторів через координати

Нехай в базисі $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають координати:

$\vec{a}(x_1, y_1, z_1), \vec{b}(x_2, y_2, z_2)$.

Теорема

Для того, щоб вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ були колінеарними, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}\,, \qquad (2.8)$$

тобто, щоб були пропорційними їх відповідні координати.

Умова компланарності трьох векторів через координати

Нехай в базисі $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ мають координати: $\vec{a}(x_1, y_1, z_1), \vec{b}(x_2, y_2, z_2), \vec{c}(x_3, y_3, z_3)$.

Теорема

Для того, щоб вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ були компланарними, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad (2.9)$$

тобто, щоб детермінант 3-го порядку, рядки якого складені із координат цих векторів, дорівнював нулю.

§-5. Скалярний добуток векторів і його властивості

<u>*Означення.*</u> *Скалярним добутком двох векторів* називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi, \qquad (2.10)$$

де $\varphi = (\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b})$ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Результатом скалярного добутку векторів є число (скаляр).

***Властивості скалярного добутку*:**

а) алгебраїчні властивості:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ *– комутативність,*

2) $\alpha\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$, $\vec{a} \cdot \beta\vec{b} = \beta(\vec{a} \cdot \vec{b})$, $\alpha\vec{a} \cdot \beta\vec{b} = \alpha\beta(\vec{a} \cdot \vec{b})$ *– асоціативна властивість відносно числового множника.*

3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$, $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ *– дистрибутивні закони множення відносно додавання.*

<u>Приклад.</u> $(3\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (4\vec{a} - 3\vec{b}) = 12\vec{a} \cdot \vec{a} - 9\vec{a} \cdot \vec{b} + 8\vec{a} \cdot \vec{b} - 6\vec{b} \cdot \vec{b} = 12\vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + 6\vec{b} \cdot \vec{b}.$

б) геометричні властивості:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ – скалярний добуток дорівнює нулеві тоді і тільки, коли вектори перпендикулярні.

2) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ – скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини.

3) $$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \qquad (2.11)$$

– модуль (довжина) вектора дорівнює кореню квадратному із його скалярного квадрата.

4) $$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \qquad (2.12)$$

– косинус кута між двома векторами дорівнює скалярному добутку цих векторів, поділеному на добуток їх довжин.

Вираз скалярного добутку двох векторів через їх координати в ортонормованому базисі

Нехай в ортонормованому базисі $B=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають координати: $\vec{a}(x_1,y_1,z_1),\vec{b}(x_2,y_2,z_2)$. Тоді

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2 \qquad (2.13)$$

– скалярний добуток двох векторів в ортонормованому базисі дорівнює сумі попарних добутків їх відповідних координат.

Довжина вектора

Нехай в ортонормованому базисі $B=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ вектор $\vec{a}=(x,y,z)$. За формулою (2.11) отримаємо:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (2.14)$$

– довжина вектора дорівнює кореню квадратному із суми квадратів його координат.

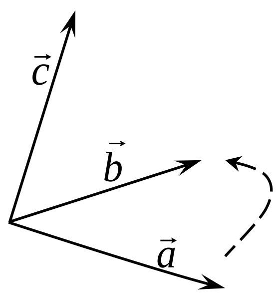
<u>Приклад.</u> Нехай $\vec{a}(2,-2,1),\vec{b}(3,1,5)$. Знайти кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

За формулою (2.12):

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{2\cdot3+(-2)\cdot1+1\cdot5}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2+5^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{35}} = \frac{3}{\sqrt{35}}.$$

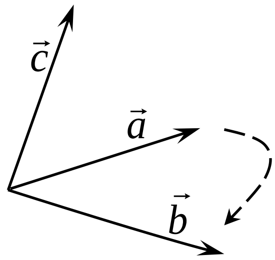
§-6. Векторний добуток векторів і його властивості

Кажуть, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють *праву трійку* (або репер ($\vec{a},\vec{b},\vec{c}$) – *додатно орієнтований*), якщо вони розміщені в просторі проти годинникової стрілки (мал.11).



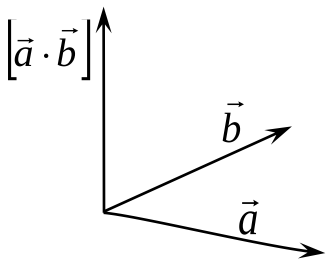
мал. 11

Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють *ліву трійку* (репер ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$) – *від'ємно орієнтований*), якщо вони розміщені в просторі за годинниковою стрілкою (мал.12).



мал. 12

<u>*Означення.*</u> *Векторним добутком двох векторів* називається вектор, довжина якого дорівнює добутку довжин цих векторів на синус кута між ними; цей вектор перпендикулярний до кожного з перемножуваних векторів і утворює з ними праву трійку (мал.13):



$$\left|\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]\right| = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\alpha \qquad (2.15)$$

мал. 13

Результатом векторного добутку векторів є вектор.

***Властивості векторного добутку*:**

а) алгебраїчні властивості:

1) $\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right] = -\left[\vec{b}\cdot\vec{a}\right]$ – *антикомутативність*,

2) $\left[\alpha\vec{a}\cdot\vec{b}\right] = \alpha\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]$, $\left[\vec{a}\cdot\beta\vec{b}\right] = \beta\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]$, $\left[\alpha\vec{a}\cdot\beta\vec{b}\right] = \alpha\beta\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]$ – *асоціативна властивість відносно числового множника.*

3) $\left[(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}\right] = \left[\vec{a}\cdot\vec{c}\right] + \left[\vec{b}\cdot\vec{c}\right]$, $\left[\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})\right] = \left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right] + \left[\vec{a}\cdot\vec{c}\right]$ – *дистрибутивні закони множення відносно додавання.*

б) геометричні властивості:

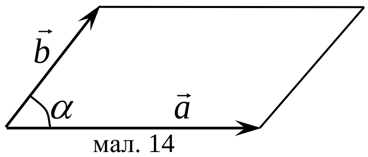
1) $\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]\perp\vec{a}, \left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]\perp\vec{b}$,

2) $\left(\vec{a},\vec{b},\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]\right)$ – права трійка,

3) $\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]=0 \Leftrightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}$ – векторний добуток дорівнює нулеві тоді і тільки, коли вектори колінеарні,

4)
$$S_{пар\text{-}ма}=\left|\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]\right| \tag{2.16}$$

– модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах (віднесених до спільного початку – мал. 14).



мал. 14

5)
$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]\right|$$
(2.17)

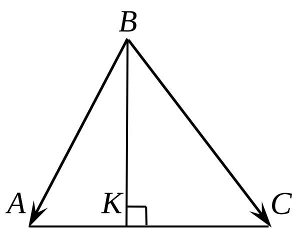
Вираз векторного добутку двох векторів через їх координати в ортонормованому базисі

Нехай в ортонормованому базисі $B=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають координати: $\vec{a}(x_1,y_1,z_1),\vec{b}(x_2,y_2,z_2)$. Тоді

$$\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix} \tag{2.18}$$

– векторний добуток двох векторів в ортонормованому базисі дорівнює детермінанту третього порядку, в першому рядку якого стоять базисні вектори $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, в другому рядку – координати першого множника, в третьому рядку – координати другого множника.

Приклад. Вершини трикутника ABC мають координати: $A(1,-1,2)$, $B(5,-6,2)$, $C(1,3,-1)$. Обчислити площу трикутника і довжину висоти, опущеної з вершини B на сторону AC (мал. 15).



мал. 15

Площу трикутника обчислюватимемо за формулою: $S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}\right]\right|$. З іншого боку: $S_{\Delta} = \frac{1}{2} AC \cdot BK$. Звідси: $\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}\right]\right| = \frac{1}{2} AC \cdot BK$. З останньої рівності отримаємо:

$$BK = \frac{\left|\left[\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}\right]\right|}{AC}.$$

$$\overrightarrow{BA} = (1-5, -1+6, 2-2) = (-4,5,0),\ \overrightarrow{BC} = (1-5, 3+6, -1-2) = (-4,5,0).$$

$$\left[\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 5 & 0 \\ -4 & 9 & -3 \end{vmatrix} = -15\vec{i} - 12\vec{j} - 16\vec{k}\ \text{,тобто}\ \left[\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}\right] = (-15,-12,-16).$$

$$\left|\left[\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}\right]\right| = \sqrt{(-15)^2 + (-12)^2 + (-16)^2} = \sqrt{625} = 25,\ S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 25 = 12{,}5\ \text{(кв. од.)}$$

$$\overrightarrow{AC} = (1-1, 3+1, -1-2) = (0,4,-3),\ AC = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{16+9} = 5.$$

$$BK = \frac{25}{5} = 5\ \text{(од.)}$$

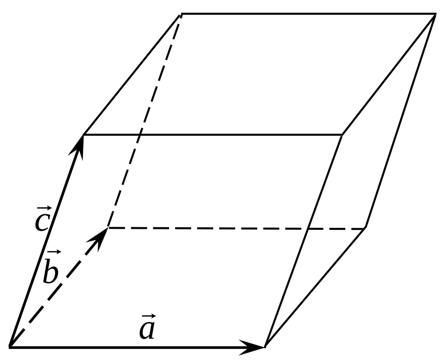
§-7. Мішаний добуток трьох векторів і його геометричний зміст

<u>Означення.</u> Мішаним добутком трьох векторів називається число, яке дорівнює скалярному добутку векторного добутку перших двох векторів на третій:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \left[\vec{a} \cdot \vec{b}\right] \cdot \vec{c}. \qquad (2.19)$$

<u>Теорема</u> (*геометричний зміст мішаного добутку*)

Модуль мішаного добутку трьох векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах (віднесених до спільного початку – мал.16*). Мішаний добуток – додатне число, якщо вектори утворюють праву трійку; від'ємне число, якщо вектори утворюють ліву трійку і дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли всі вектори компланарні.*



мал. 16

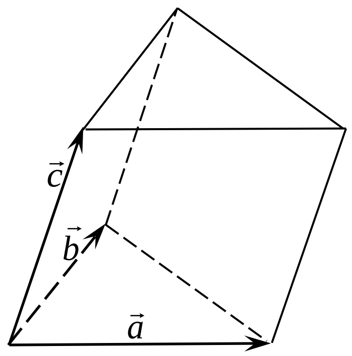
Тобто, мішаний добуток має такі *властивості*:

1) $$V_{пар\text{-}да} = \left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|, \tag{2.20}$$

2) $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} > 0$, коли $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ – права трійка, $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} < 0$, коли $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ – ліва трійка,

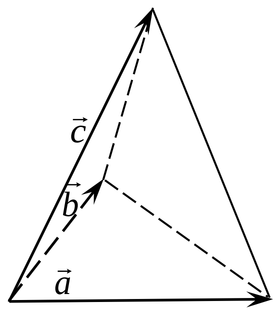
3) $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = 0$ тоді і лише тоді, коли вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарні.

За допомогою мішаного добутку трьох векторів можна також обчислювати об’єм трикутної призми та трикутної піраміди, побудованих на цих векторах (мал. 17, 18).



мал. 17

$$V_{тр.призми} = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right| \tag{2.21}$$



мал. 18

$$V_{тр.пір.} = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right| \tag{2.22}$$

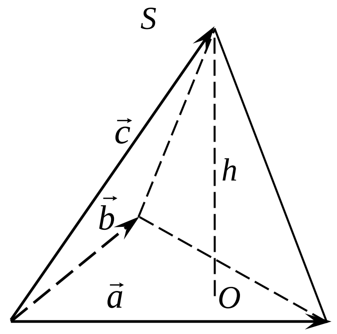
Вираз мішаного добутку трьох векторів через їх координати в ортонормованому базисі

Нехай в ортонормованому базисі $B=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ мають координати: $\vec{a}(x_1,y_1,z_1),\vec{b}(x_2,y_2,z_2),\vec{c}(x_3,y_3,z_3)$. Тоді

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \tag{2.23}$$

– мішаний добуток трьох векторів дорівнює детермінанту третього порядку, в першому рядку якого стоять координати першого вектора, в другому – координати другого вектора, в третьому – координати третього вектора.

<u>Приклад.</u> Обчислити об’єм і висоту трикутної піраміди (мал.19), побудованої на векторах: $\vec{a}(1,-2,3),\vec{b}(2,1,-1),\vec{c}(3,-3,4)$.



мал. 19

Об'єм піраміди обчислюватимемо за формулою: $V_{тр.пір.}=\dfrac{1}{6}\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|$. З іншого боку: $V_{тр.пір.}=\dfrac{1}{3}S_{осн.}\cdot h$. Звідси: $\dfrac{1}{6}\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|=\dfrac{1}{3}S_{осн.}\cdot h$. З останньої рівності отримаємо: $h=\dfrac{\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|}{2\cdot S_{îñí\,.}}$.

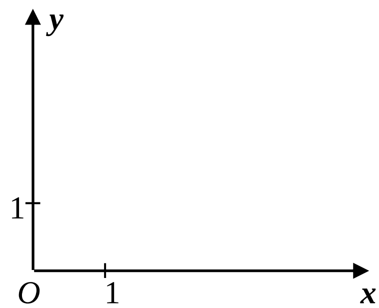
$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & -3 & 4\end{vmatrix}=4+6-18-9-3+16=-4,\ V_{тр.пір.}=\frac{1}{6}\cdot|-4|=\frac{2}{3}\ \text{(куб. од.)}$$

$$S_{осн.}=\frac{1}{2}\left|\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]\right|,\ \text{де}\ \left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=-1\vec{i}+7\vec{j}+5\vec{k}\ .\ \text{Тоді}\ \left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]=(-1,7,5),$$

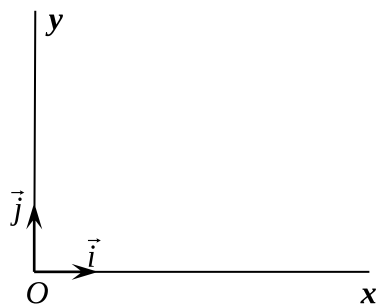
$$S_{осн.}=\frac{1}{2}\sqrt{1+49+25}=\frac{1}{2}\sqrt{75}=\frac{5\sqrt{3}}{2}\ \text{(кв. од.)},\ h=\frac{4}{2\cdot\frac{5\sqrt{3}}{2}}=\frac{4}{5\sqrt{3}}\ \text{(од.)}$$

§-8. Основні задачі в прямокутній декартовій системі координат

<u>*Означення.*</u> *Прямокутною декартовою системою координат* називається впорядкована пара взаємно перпендикулярних осей з однаковими масштабами на них (мал. 20, 21).



мал. 20

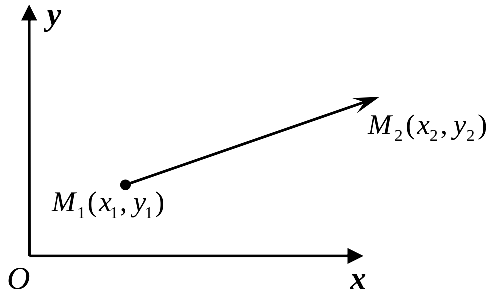


мал. 21

Базис прямокутної системи координат позначається: $R=\left\{O,\vec{i},\vec{j}\right\}$, де O – початок системи координат.

Віддаль між точками

Нехай в прямокутній системі координат задано дві точки: $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$. Знайти віддаль між цими точками (мал. 22).



мал. 22

Віддаль між точками $\rho(M_1, M_2) = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|$

Вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ має координати: $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. За формулою (2.14) отримаємо:

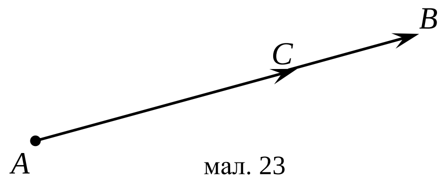
$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (2.24)$$

– віддаль між двома точками дорівнює кореню квадратному із суми квадратів різниць відповідних координат.

Поділ відрізка в даному відношенні

<u>*Означення.*</u> *Точка C ділить відрізок AB у відношенні* λ, якщо виконується рівність:

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} \qquad (2.25)$$



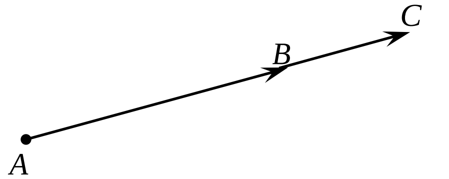
мал. 23

Користуючись мал. 23, попередню рівність можна записати у вигляді:

$$\lambda = \frac{\textit{від початку до подільчої точки}}{\textit{від подільчої точки до кінця}}. \qquad (2.26)$$

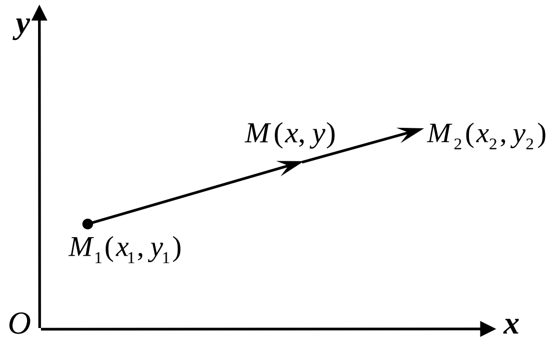
Якщо $\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CB}$ (мал. 23), то $\lambda > 0$ і точка C ділить відрізок AB *внутрішнім способом*.

Якщо $\overrightarrow{AC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CB}$ (мал. 24), то $\lambda < 0$ і точка C ділить відрізок AB *зовнішнім способом*.



мал. 24

Нехай маємо відрізок M_1M_2 ,де $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$.Знайти координати точки M , яка ділить відрізок M_1M_2 у відношенні λ (мал. 25).



мал. 25

З рівності $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{M_1M}}{\overrightarrow{MM_2}}$ отримаємо: $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$. Оскільки $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1)$,

$\lambda\overrightarrow{MM_2} = \left(\lambda(x_2 - x), \lambda(y_2 - y)\right)$, то дістанемо систему:
$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y). \end{cases} \quad (2.27)$$

Розв'язок системи (2.27) (а отже, й координати точки M) матиме вигляд:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \end{cases} \quad (2.28)$$

Координати середини відрізка

Якщо точка M ділить відрізок M_1M_2 пополам, то $\lambda = 1$. Тоді з системи (2.28) отримаємо:

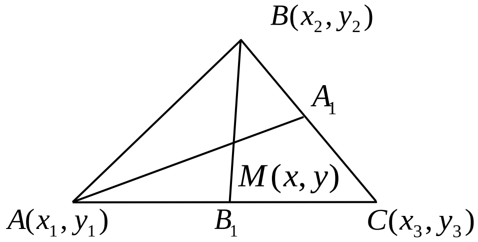
$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases} \quad (2.29)$$

– координати середини відрізка дорівнюють півсумам відповідних координат його початку і кінця.

Центр ваги трикутника

Центром ваги трикутника є, як відомо, точка перетину його медіан.

Нехай дано трикутник з вершинами в точках $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Знайти координати центра маси цього трикутника (мал. 26).



мал. 26

Нехай $M(x,y)$ – центр ваги трикутника. Медіани в точці перетину діляться у відношенні 2:1, починаючи з вершини. Тоді відношення подільності $\lambda = \frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MA_1}} = \frac{2}{1} = 2$. Оскільки A_1 – середина BC, то за формулою (2.29) ця точка має такі координати: $A_1 = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$. Отже, користуючись рівністю (2.28), матимемо, що координати точки M мають вигляд:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \\ y = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \end{cases} \qquad (2.30)$$

– координати центра ваги трикутника дорівнюють середнім арифметичним відповідних координат його вершин.

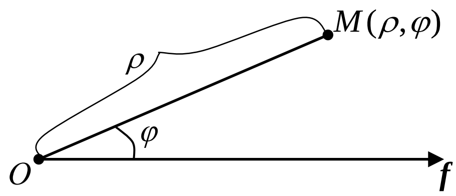
Площа трикутника

Площа трикутника з вершинами в точках $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ обчислюється за формулою:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (2.31)$$

§-9. Полярна система координат

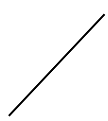
Означення. *Полярною системою координат* називається система координат, в якій положення кожної точки на площині визначається двома параметрами: ρ – відстань від даної точки до полюса O (початку системи координат), φ – кут між радіусом цієї точки і полярною віссю Of (мал. 27). Впорядкована пара чисел (ρ, φ) називається *полярними координатами точки*.

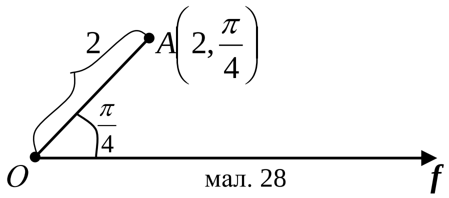


мал. 27

Приклад. Побудувати точку $A\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ в полярній системі координат.

Для побудови цієї точки необхідно побудувати промінь, який утворює з полярною віссю кут $\frac{\pi}{4}$, та відкласти від полюса відрізок довжиною 2 (мал. 28).

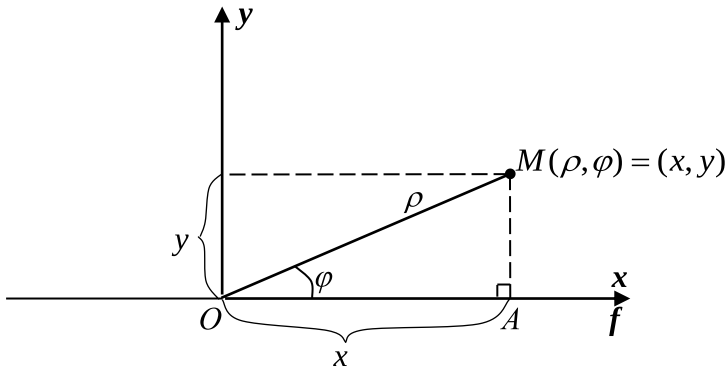




мал. 28

Зв'язок між полярними і прямокутними координатами

Помістимо початок прямокутної декартової системи координат в полюс. Вісь *Ox* направимо по полярній осі, причому так, щоб їх напрями співпадали і масштаби на осях були однакові (мал. 29).



мал. 29

Нехай точка M в полярній системі координат має координати (ρ,φ), а в прямокутній – (x,y). Виразити (x,y) через (ρ,φ) і навпаки.

З прямокутного трикутника OAM отримаємо:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \tag{2.32}$$

– *перехід від полярних до прямокутних координат*.

Піднесемо обидві частини рівностей системи (2.32) до квадрату і додамо почленно:

$x^2 + y^2 = \rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)$. Звідки: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

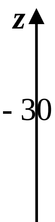
Поділивши друге рівняння системи (2.32) на перше, дістанемо: $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$. Отже, отримаємо систему:

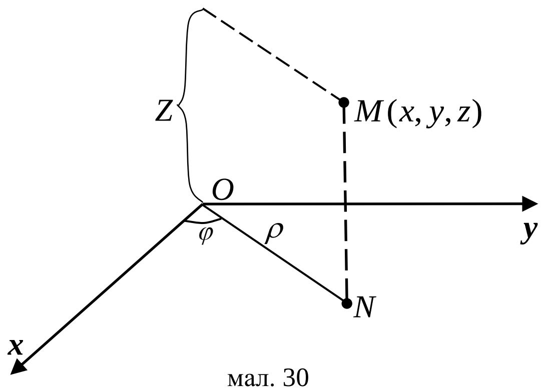
$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases} \tag{2.33}$$

– *перехід від прямокутних до полярних координат*.

§-10. Циліндрична система координат

Кожна точка M в просторі повністю визначається положенням її проекції на площину xOy і третьою координатою *Z*(мал. 30).





мал. 30

Положення проекції N однозначно задається її полярними координатами в площині xOy: $N(\rho, \varphi)$. Як бачимо, для задання точки в просторі досить вказати три параметри: ρ – віддаль від проекції цієї точки на площину xOy до початку координат; φ – кут між віссю Ox і радіусом вектором цієї точки; Z – віддаль від цієї точки до площини xOy.

Впорядкована трійка чисел (ρ, φ, Z) називається *циліндричними координатами*.

Циліндричні координати пов'язані з прямокутними координатами рівностями:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = Z. \end{cases} \tag{2.34}$$

Розділ 3

Пряма на площині

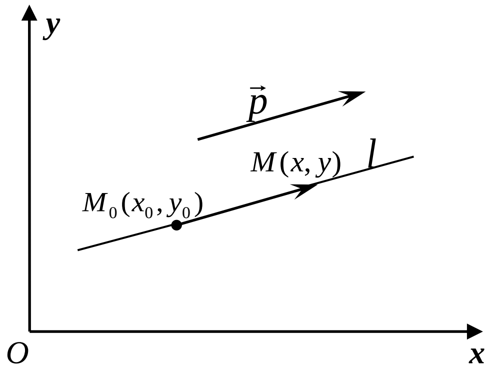
§-1. Різні способи задання прямої

1. Канонічне рівняння прямої.

<u>*Означення.*</u> *Напрямним вектором прямої* l називається такий ненульовий вектор $\vec{p}$, який паралельний до цієї прямої.

Нехай пряма l задана точкою $M_0(x_0, y_0)$ і напрямним вектором $\vec{p}(l, m)$. Написати рівняння цієї прямої.

Візьмемо довільну точку $M(x, y) \in l$ (мал. 31)



мал. 31

Для будь-якого положення точки M на прямій l: $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p}$, де $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$, $\vec{p}(l, m)$. З умови колінеарності двох векторів (2.8) отримаємо:

$$l: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \qquad (3.1)$$

– *канонічне рівняння прямої.*

<u>Приклад.</u> Скласти рівняння прямої l, що проходить через точку $A(5, -3)$ з напрямним вектором $\vec{p}(4, 5)$.

Скористаємось рівнянням (3.1)

$$l: \quad \frac{x - 5}{4} = \frac{y + 3}{5}.$$

2. Параметричні рівняння прямої.

Нехай дано такі ж початкові умови, що й у попередньому пункті. Тоді отримаємо рівняння (3.1). Введемо в це рівняння параметр t:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = t.$$

З останніх рівностей отримаємо систему: $\begin{cases} x - x_0 = lt, \\ y - y_0 = mt, \end{cases}$

яку запишемо у вигляді:

$$l: \begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt \end{cases} \tag{3.2}$$

– *параметричні рівняння прямої*.

Геометричний зміст параметра t

Для будь-якого положення точки M на прямій знайдеться таке дійсне число t, що координати цієї точки виражаються формулами (3.2). І навпаки:

Для довільного дійсного числа t пара чисел, знайдених за формулами (3.2) є координатами точки, яка належить прямій.

Приклад. Скласти параметричні рівняння прямої l, що проходить через точку $A(2,-1)$ з напрямним вектором $\vec{p}(-3,2)$.

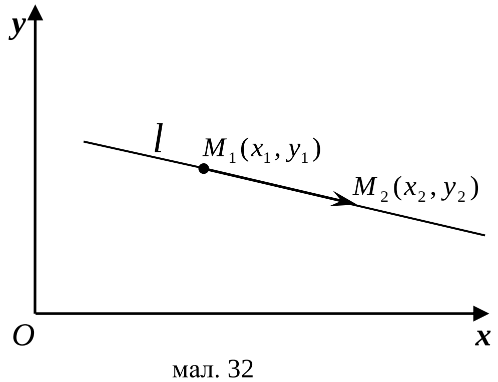
Параметричні рівняння прямої згідно із системою (3.2) матимуть вигляд:

$$\begin{cases} x = -3t + 2, \\ y = 2t - 1. \end{cases}$$

3. Пряма, задана двома точками.

Нехай пряма l задана двома точками: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$. Написати рівняння цієї прямої.

Виберемо за початкову точку M_1, за напрямний вектор візьмемо $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ (мал. 32).



мал. 32

Використавши канонічне рівняння прямої (3.1), отримаємо:

$$l: \ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{3.3}$$

– *рівняння прямої через дві точки*.

Приклад. Написати рівняння прямої l, що проходить через точки $A(-3,5)$, $B(2,4)$.

З рівняння (3.3) отримаємо:

$$\frac{x+3}{2+3}=\frac{y-5}{4-5}, \qquad \text{або} \qquad l:\ \frac{x+3}{5}=\frac{y-5}{-1}.$$

4. Загальне рівняння прямої.

Канонічне рівняння (3.1) можна записати у вигляді:

$$mx-ly-mx_0+ly_0=0.$$

Бачимо, що пряма задається лінійним рівнянням відносно змінних x, y. Виникає запитання: що задає будь-яке лінійне рівняння на площині?

<u>**Теорема**</u>

Рівняння
$$Ax+By+C=0, \tag{3.4}$$
де A і B одночасно не рівні нулю, задає пряму з напрямним вектором $\vec{p}(-B, A)$.

<u>Доведення.</u> Рівняння (3.4) на площині задає деяку лінію. Скориставшись коефіцієнтами цього рівняння, виберемо на площині точку $M_0(-\frac{C}{A},0)$ (при умові, що $A\neq 0$). Напишемо рівняння прямої l, що проходить через точку M_0 з напрямним вектором $\vec{p}(-B, A)$. Використаємо рівняння (3.1):

$$\frac{x+\frac{C}{A}}{-B}=\frac{y-0}{A},$$

з якого отримаємо:

$$l: Ax+By+C=0.$$

Отже, рівняння (3.4) задає пряму.

<u>*Теорему доведено*</u>

Рівняння (3.4) називається *загальним рівнянням прямої*.

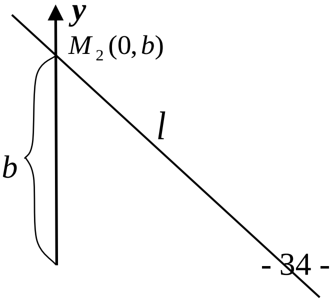
<u>Приклад.</u> Написати загальне рівняння прямої l, що проходить через точки $A(4,-1)$, $B(5,-3)$.

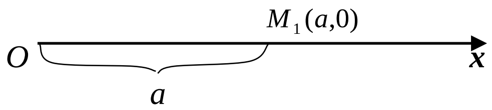
За формулою (3.3) отримаємо:

$$\frac{x-4}{1}=\frac{y+1}{-2}, \qquad \text{або} \qquad l:\ \ 2x+y-7=0.$$

5. Пряма у «відрізках» на осях.

Нехай пряма l, яка не проходить через початок координат, відтинає на осі *Ox* відрізок *a*, на осі *Oy* – відрізок *b* (мал. 33). Написати рівняння цієї прямої.





мал. 33

Шукатимемо рівняння прямої l у вигляді (3.4):

$$l: \; Ax + By + C = 0$$

$M_1(a,0) \in l \Rightarrow A \cdot a + B \cdot 0 + C = 0$. Звідси: $A = -\frac{C}{a}$.

$M_2(0,b) \in l \Rightarrow A \cdot 0 + B \cdot b + C = 0$. Звідси: $B = -\frac{C}{b}$.

Підставимо ці значення A і B в рівняння (3.4):

$$-\frac{C}{a}x - \frac{C}{b}y + C = 0.$$

Оскільки пряма не проходить через початок координат, то $C \neq 0$. Тому останнє рівняння можна поділити на C:

$$-\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + 1 = 0.$$

З цього рівняння отримаємо:

$$l: \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (3.5)$$

– рівняння прямої у «відрізках» на осях.

<u>Приклад.</u> Побудувати пряму l, що проходить через точку $A(6,1)$ з напрямним вектором $\vec{p}(-3,5)$.

З канонічного рівняння прямої дістанемо:

$$\frac{x-6}{-3} = \frac{y-1}{5}, \qquad \text{або} \qquad 5x + 3y = 33.$$

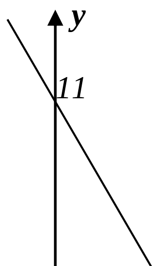
Поділимо обидві частини рівняння на 33:

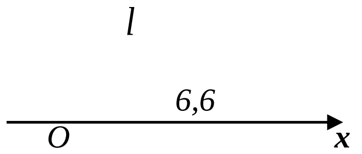
$$\frac{5x}{33} + \frac{3y}{33} = 1.$$

Остаточно одержимо:

$$l: \; \frac{x}{33/5} + \frac{y}{11} = 1.$$

Останнє рівняння є рівнянням прямої у «відрізках» на осях. Тому шукана пряма відсікає на осі Ox відрізок $\frac{33}{5} = 6{,}6$, а на осі Oy відрізок 11 (мал. 34).





мал. 34

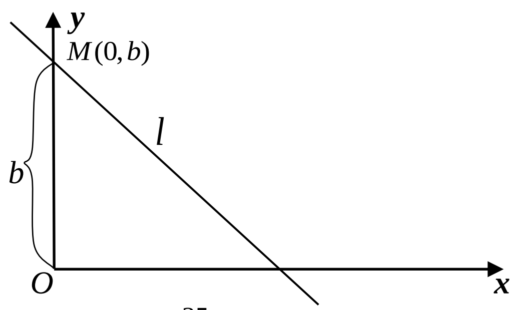
6. Пряма з кутовим коефіцієнтом.

Нехай задано напрямний вектор $\vec{p}(l,m)$ прямої l.

<u>*Означення.*</u> *Кутовим коефіцієнтом прямої* називається відношення ординати до абсциси її напрямного вектора:

$$k = \frac{m}{l}.$$

Написати рівняння прямої l, яка відтинає на осі *Oy* відрізок b і має кутовий коефіцієнт *k* (мал. 35).



мал. 35

Запишемо координати напрямного вектора прямої у вигляді:

$$\vec{p} = (l,m) = l(1,\frac{m}{l}) = l(1,k).$$

Оскільки $l(1,k) \parallel (1,k)$, то напрямним до прямої буде також вектор $\vec{p}_1(1,k)$. Використаємо канонічне рівняння прямої (3.1):

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-b}{k}.$$

Звідки отримаємо:

$$l:\ y = kx + b \qquad (3.6)$$

– *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*.

7. Пряма, задана точкою і кутовим коефіцієнтом.

Написати рівняння прямої l, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і має кутовий коефіцієнт *k*.

Шукатимемо рівняння прямої l у вигляді (3.6):

$$y = kx + b,$$

$$M_0(x_0, y_0) \in l \Rightarrow y_0 = kx_0 + b.$$

Віднімемо від рівняння (3.6) попереднє рівняння. Дістанемо:

$$l: \quad y - y_0 = k(x - x_0) \qquad (3.7)$$

– рівняння прямої, заданої точкою і кутовим коефіцієнтом.

Приклад. Скласти рівняння прямої l, яка має кутовий коефіцієнт $k = 3$ і проходить через точку $A(3,-1)$.

З рівняння (3.7) дістанемо:

$$y + 1 = 3(x - 3), \qquad \text{або} \qquad l: \; y = 3x - 10.$$

8. Пряма, задана точкою і нормованим вектором.

Означення. Нормованим вектором прямої l називається такий ненульовий вектор $\vec{n}$, який перпендикулярний до цієї прямої.

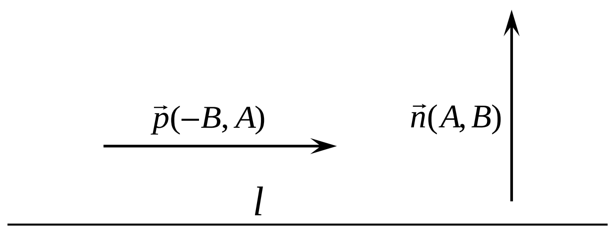
Теорема

Коефіцієнти A і B в загальному рівнянні прямої $l: \; Ax + By + C = 0$ *є координатами нормованого вектора цієї прямої, тобто* $\vec{n} = (A, B)$.

Доведення. Напрямний вектор прямої l має координати: $\vec{p}(-B, A)$. Знайдемо скалярний добуток: $\vec{n} \cdot \vec{p} = A \cdot (-B) + B \cdot A = 0$. Звідси, за властивостями скалярного добутку $\vec{n} \perp \vec{p}$, а тому $\vec{n} \perp l$. Отже, $\vec{n} = (A, B)$ – нормований вектор прямої l.

Теорему доведено

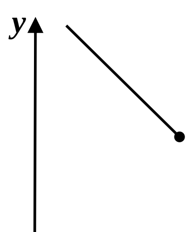
З попередньої теореми отримаємо, що із загального рівняння прямої можна дістати координати її напрямного і нормованого векторів (мал. 36).

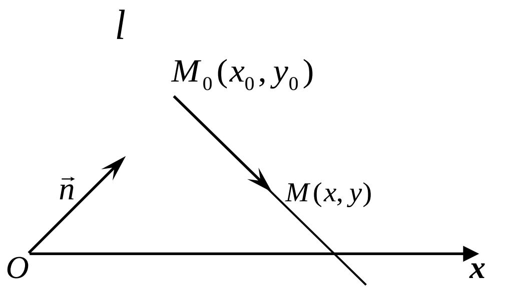


мал. 36

Нехай пряма задана точкою $M_0(x_0, y_0)$ і нормованим вектором $\vec{n}(\alpha, \beta)$. Написати рівняння цієї прямої.

Візьмемо довільну точку $M(x, y) \in l$ (мал. 37).





мал. 37

Для будь-якого положення точки M на прямій l: $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$, де $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$, $\vec{n}(\alpha, \beta)$. Тоді $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$. Звідси:

$$l: \ \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0 \qquad (3.8)$$

– *рівняння прямої, заданої точкою і нормованим вектором.*

<u>Приклад.</u> Скласти рівняння прямої l_1, яка проходить через точку $A(4,1)$ перпендикулярно до прямої l: $2x - 5y + 6 = 0$.

Напрямний вектор прямої l має координати: $\vec{p} = (-B, A) = (5,2)$. Але оскільки $l \perp l_1$, то напрямний вектор прямої l є нормальним вектором прямої l_1, тобто: $\vec{p} = \vec{n}_1 = (5,2)$.

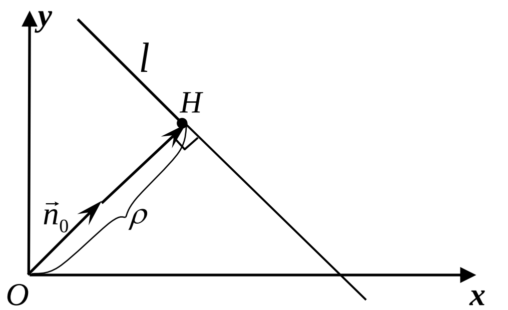
Скориставшись рівнянням (3.8), отримаємо:

$$5(x - 4) + 2(y - 1) = 0 \qquad \text{або} \qquad l: \ 5x + 2y - 22 = 0.$$

9. Нормальне рівняння прямої.

Написати рівняння прямої l, заданої одиничним нормальним вектором $\vec{n}_0(\cos\varphi, \sin\varphi)$ і віддаллю ρ від початку координат до прямої.

Нехай *H* – основа перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму(мал. 38).



мал. 38

Оскільки $\vec{n}_0$ – одиничний нормований вектор, то $\overrightarrow{OH} = \rho\vec{n}_0 = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$. $\overrightarrow{OH}$ – радіус-вектор точки *H*. Тому $H(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$. Підставимо координати вектора $\vec{n}_0$ і точки *H* в рівняння (3.8):

$$\cos\varphi(x - \rho\cos\varphi) + \sin\varphi(y - \rho\sin\varphi) = 0, \quad \text{або} \quad x\cos\varphi + y\sin\varphi - \rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 0.$$

Оскільки $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, то отримаємо рівняння:

$$l: \quad x\cos\varphi + y\sin\varphi - \rho = 0 \tag{3.9}$$

– нормальне рівняння прямої.

§-2. Взаємне розміщення двох прямих на площині

Нехай прямі l_1 і l_2 задані рівняннями:

$$l_1: \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$l_2: \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

<u>Теорема</u> (*умова паралельності двох прямих*)

Для того, щоб прямі l_1 і l_2 були паралельними, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \tag{3.10}$$

тобто, щоб були пропорційними коефіцієнти при однакових змінних.

<u>Доведення.</u> Напрямний вектор прямої l_1 має координати $\vec{p}_1(-B_1, A_1)$, прямої l_2 — $\vec{p}_2(-B_2, A_2)$. Оскільки $l_1 \parallel l_2$, то їх напрямні вектори також паралельні. З умови колінеарності двох векторів (2.8) отримаємо рівність:

$$\frac{-B_1}{-B_2} = \frac{A_1}{A_2},$$

з якої дістанемо умову (3.10).

<u>Теорему доведено</u>

<u>Теорема</u> (*умова співпадання двох прямих*)

Для того, щоб прямі l_1 і l_2 співпадали, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \tag{3.11}$$

тобто, щоб були пропорційними відповідні коефіцієнти цих прямих.

<u>Теорема</u> (*умова перетину двох прямих*)

Якщо прямі не паралельні і не співпадають, то вони перетинаються в одній точці. Для того, щоб прямі l_1 і l_2 перетинались, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}. \qquad (3.12)$$

<u>Приклад.</u> Скласти рівняння прямої l_1, яка проходить через точку $A(-2,5)$ паралельно до прямої l: $4x - y + 3 = 0$.

Шукатимемо рівняння прямої l_1 у вигляді:

$$4x - y + C = 0.$$

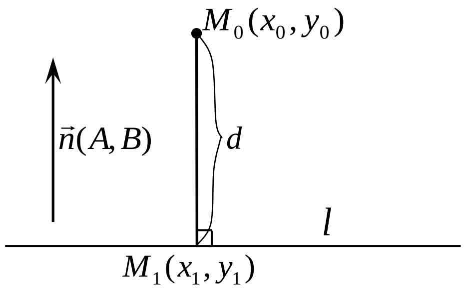
Оскільки $A \in l_1$, то $4 \cdot (-2) - 5 + C = 0$. Звідки: $C = 13$. Отже,

$$l_1:\ 4x - y + 13 = 0.$$

§-3. Віддаль відточки до прямої

<u>Означення.</u> Під *віддаллю від точки до прямої* розуміють віддаль від цієї точки до її ортогональної проекції на цю пряму.

Нехай задано пряму l: $Ax + By + C = 0$. Знайти віддаль від точки $M_0(x_0, y_0)$ до цієї прямої (мал. 39): $d = \rho(M_0, l) = M_0M_1$.



мал. 39

Для знаходження числа d використаємо скалярний добуток векторів $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_0M_1}$ за означенням та через координати:

1. *За означенням*:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M_1} = |\vec{n}| \cdot \left|\overrightarrow{M_0M_1}\right| \cdot \cos\varphi = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot d \cdot (\pm 1).$$

2. *Через координати*:

Оскільки $\overrightarrow{M_0M_1}(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$, $\vec{n}(A, B)$, то

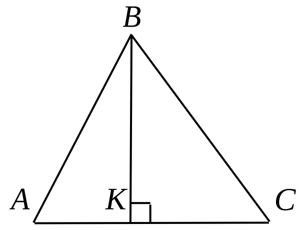
$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M_1} = A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) = Ax_1 + By_1 - Ax_0 - By_0 = -C - Ax_0 - By_0 = -(Ax_0 + By_0 + C).$$

Звідки: $\sqrt{A^2 + B^2} \cdot d \cdot (\pm 1) = -(Ax_0 + By_0 + C)$.

Отримаємо формулу:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (3.13)$$

Приклад. Знайти висоту трикутника ABC, опущеної з вершини B на сторону AC, якщо $A(1,3)$, $B(3,9)$, $C(5,7)$ (мал. 40).



мал. 40

$h = BK = \rho(B, AC)$

Складемо рівняння прямої AC: $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-3}{4}$. Або AC: $x - y + 2 = 0$

За формулою (3.13) отримаємо: $BK = \dfrac{|3-9+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ (од.)

§-4. Кут між прямими на площині

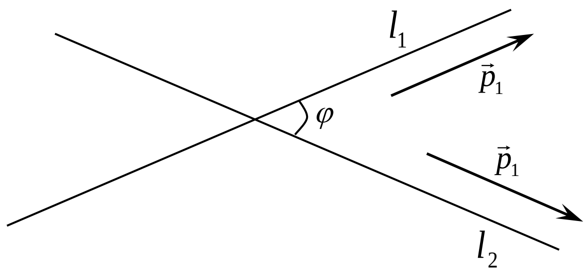
1. Прямі l_1 і l_2 задані загальними рівняннями:

$$l_1: \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$l_2: \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Знайти кут між цими прямими.

Напрямний вектор прямої l_1 має координати $\vec{p}_1(-B_1, A_1)$, прямої l_2 — $\vec{p}_2(-B_2, A_2)$ (мал. 41).



мал. 41

$$\cos\varphi = \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{|\vec{p}_1| \cdot |\vec{p}_2|} = \frac{(-B_1)\cdot(-B_2) + A_1 \cdot A_2}{\sqrt{(-B_1)^2 + A_1^2} \cdot \sqrt{(-B_2)^2 + A_2^2}}.$$

Отже, *кут між прямими* можна обчислити за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{3.14}$$

Якщо $l_1 \perp l_2$, то $\cos\varphi = 0$. Тому справедлива теорема:

Теорема (*умова перпендикулярності двох прямих*)

Для того, щоб прямі l_1 *і* l_2 *були перпендикулярними, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*:

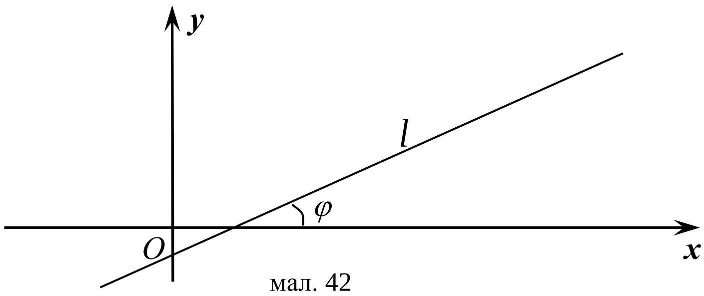
$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0 . \qquad (3.15)$$

2. Прямі задані рівнянням з кутовим коефіцієнтом:

$$y = kx + b .$$

В прямокутній декартовій системі координат кутовий коефіцієнт прямої дорівнює тангенсу кута нахилу прямої до додатного напряму осі Ox (мал. 42), тобто:

$$k = tg\varphi . \qquad (3.16)$$



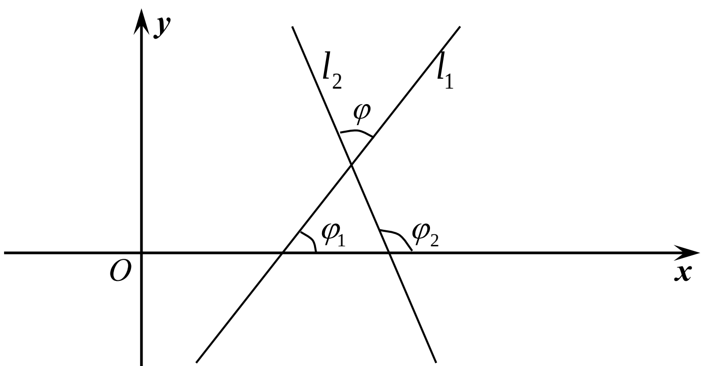
мал. 42

Нехай $l_1: \ y = k_1 x + b_1,$

$l_2: \ y = k_2 x + b_2 .$

Знайти кут між прямими.

Для прямих l_1 і l_2 з мал. 43 матимемо: $k_1 = tg\varphi_1, k_2 = tg\varphi_2 .$



мал. 43

Оскільки $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, то $tg\varphi = tg(\varphi_2 - \varphi_1) = \dfrac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_1 \cdot tg\varphi_2}$.

Отже, *кут між прямими*, обчислюється за формулою:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} . \qquad (3.17)$$

Якщо $l_1 \perp l_2$, то $tg\varphi = \infty$. З останньої рівності слідує, $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$. Отже, справедлива теорема:

<u>Теорема</u> (*умова перпендикулярності прямих через їх кутові коефіцієнти*)

Для того, щоб прямі l_1 і l_2 були перпендикулярними, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}, \tag{3.18}$$

тобто, щоб їх коефіцієнти були оберненими за величиною і протилежними за знаком.

З мал. 42 слідує теорема:

<u>Теорема</u> (*умова паралельності прямих через їх кутові коефіцієнти*)

Для того, щоб прямі l_1 і l_2 були паралельними, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$k_1 = k_2, \tag{3.19}$$

тобто, щоб були рівними їх кутові коефіцієнти.

<u>Приклад.</u> Скласти рівняння прямої l_1, яка проходить через точку $A(-2,4)$ паралельно до прямої $l: 3x - 5y - 1 = 0$.

Запишемо рівняння прямої l у вигляді: $y = \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$. Звідси матимемо, що $k = \frac{3}{5}$.

Оскільки $l \parallel l_1$, то $k_1 = k = \frac{3}{5}$.

Тоді l_1: $y = \frac{3}{5}x + b$. $A \in l_1 \Rightarrow 4 = \frac{3}{5} \cdot (-2) + b$. Тоді $b = \frac{26}{5}$.

Отже, рівняння прямої має вигляд: $y = \frac{3}{5}x + \frac{26}{5}$. Або l_1: $3x - 5y + 26 = 0$.

<u>Приклад.</u> Скласти рівняння прямої l_1, яка проходить через точку $B(3,-1)$ перпендикулярно до прямої $l: 4x + y - 5 = 0$.

$l: y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3} \Rightarrow k = -\frac{4}{3}$. Тоді за формулою (3.18) отримаємо: $k_1 = -\frac{1}{k} = \frac{3}{4}$. Звідси

l_1: $y = \frac{3}{4}x + b$. $B \in l_1 \Rightarrow -1 = \frac{3}{4} \cdot 3 + b$. Звідки: $b = -\frac{13}{4}$.

Отже, рівняння прямої: $y = \frac{3}{4}x - \frac{13}{4}$. Або l_1: $3x - 4y - 13 = 0$.

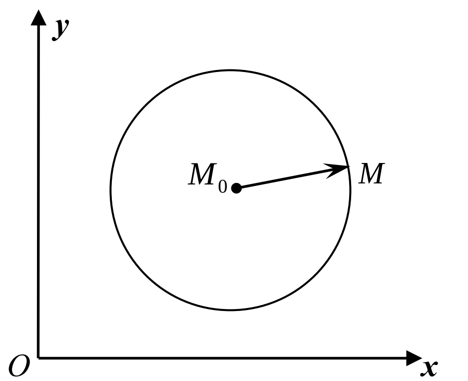
Розділ 4

Лінії другого порядку на площині

§-1. Коло

Означення. *Колом* називається геометричне місце точок площини, віддалі від яких до фіксованої точки, яка називається *центром кола*, є величина стала, рівна R. Число R називається *радіусом кола*.

Нехай дано коло з центром в точці $M_0(x_0, y_0)$ радіусом R (мал. 44). Скласти рівняння цього кола.



мал. 44

Візьмемо довільну точку $M(x, y)$, що належить колу. Тоді $\left|\overrightarrow{M_0M}\right| = R$, де $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0)$. Звідки отримаємо:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=R,$$

або
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \tag{4.1}$$

– *рівняння кола*.

Рівняння кола з центром в початку координат має вигляд:

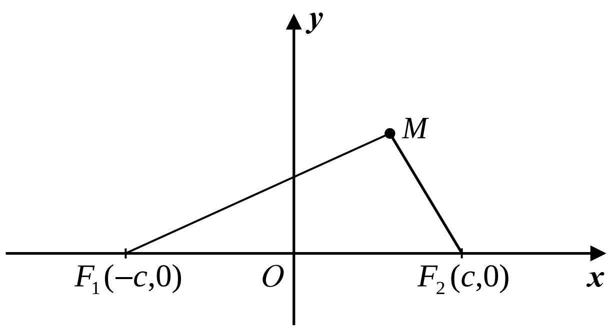
$$x^2+y^2=R^2 \tag{4.2}$$

§-2. Еліпс

Означення. *Еліпсом* називається геометричне місце точок площини, сума віддалей яких до двох фіксованих точок, які називаються *фокусами*, є величина стала, рівна $2a$, де $2a>2c$, $2c$ – віддаль між фокусами.

Побудуємо систему координат так: вісь *Ox* проведемо через фокуси F_1 і F_2, а вісь *Oy* проведемо через середину відрізка $F_1F_2=2c$ перпендикулярно до осі *Ox*.

Візьмемо довільну точку $M(x,y)$, що належить еліпсу (мал. 45).



мал. 45

За умовою, сума віддалей від точки M до фокусів F_1 і F_2 рівна $2a$, тобто: $F_1M+F_2M=2a$, де $\overrightarrow{F_1M}(x+c,y)$, $\overrightarrow{F_2M}(x-c,y)$.

Тоді $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$. Звідки: $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$.

Піднесемо до квадрату обидві частини рівності та виконаємо необхідні спрощення:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2,$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4cx,$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx.$$

Піднесемо до квадрату:

$$a^2((x-c)^2+y^2)=(a^2-cx)^2,$$

$$a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)=a^4-2a^2cx+c^2x^2,$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2,$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Так як $a>c$ (за умовою), то $a^2-c^2>0$. Тому позначимо:

$$a^2-c^2=b^2. \tag{4.3}$$

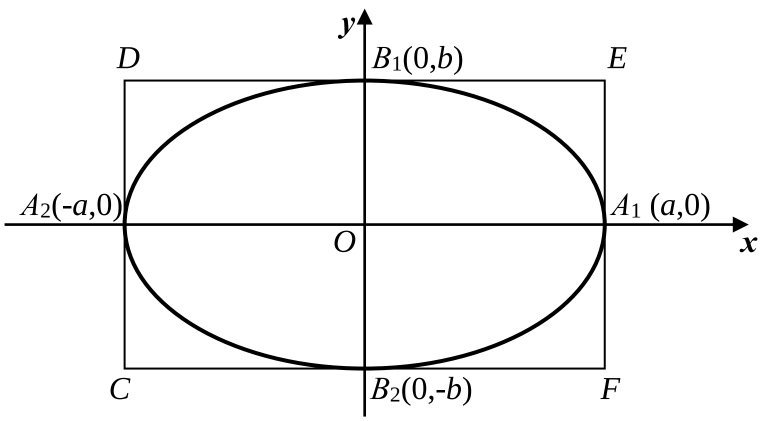
Звідки: $$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Поділимо останню рівність почленно на a^2b^2:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{4.4}$$

– *канонічне рівняння еліпса*.

Графік еліпса зображено на мал. 46.



мал. 46

Властивості еліпса:

1) Оскільки рівняння (4.4) є рівнянням другого степеня, то еліпс – лінія другого порядку.

2) Еліпс симетричний відносно осей *Ox* і *Oy*, а також відносно початку координат.

3) <u>*Означення.*</u> *Вершинами еліпса* називаються його точки перетину з осями координат. Еліпс має чотири вершини: A_1, A_2, B_1, B_2.

4) Еліпс повністю міститься у прямокутнику *CDEF*, тобто

для еліпса виконуються нерівності:

$$\begin{cases} -a \le x \le a, \\ -b \le y \le b. \end{cases}$$

<u>*Означення.*</u> Відрізок $2a$ називається *великою віссю еліпса*, відрізок $2b$ – *малою віссю еліпса*.

<u>*Означення.*</u> *Ексцентриситетом еліпса* називається відношення міжфокусної віддалі до великої осі:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \qquad (4.5)$$

де $0 \le \varepsilon < 1$.

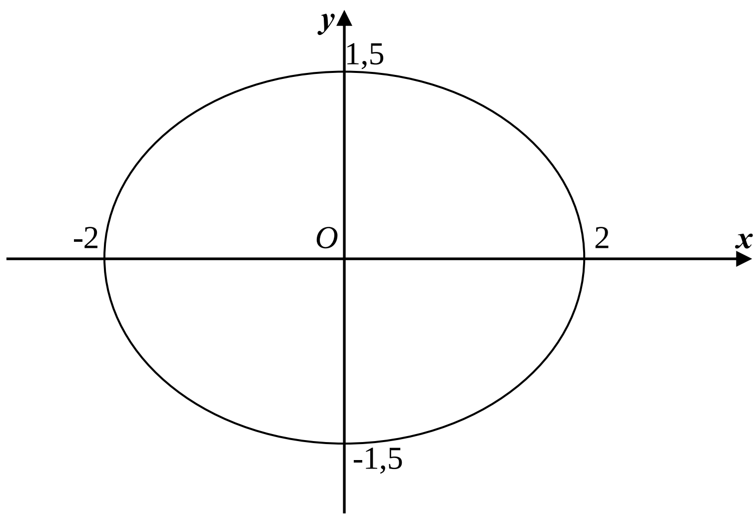
<u>Приклад.</u> Побудувати еліпс: $9x^2 + 16y^2 = 36$ і знайти параметри a, b, c, ε.

Зведемо рівняння еліпса до канонічного вигляду:

$$\frac{9x^2}{36} + \frac{16y^2}{36} = 1,$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9/4} = 1.$$

Звідси отримаємо: $a = \sqrt{4} = 2,\ b = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$. Графік еліпса зображено на мал. 47.



мал. 47

З формули (4.3) знайдемо c: $c^2 = a^2 - b^2 = 4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4}$. Тоді $c = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

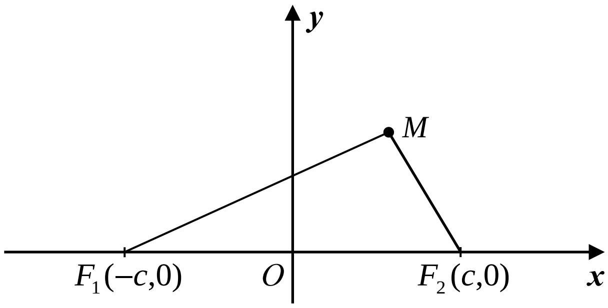
Знайдемо ε за формулою (4.5): $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

§-3. Гіпербола

Означення. *Гіперболою* називається геометричне місце точок площини, різниця віддалей яких до двох фіксованих точок, які називаються *фокусами*, є величина стала, рівна $2a$, де $2a < 2c$, $2c$ – віддаль між фокусами.

Побудуємо систему координат так: вісь *Ox* проведемо через фокуси F_1 і F_2, а вісь *Oy* проведемо через середину відрізка $F_1F_2 = 2c$ перпендикулярно до осі *Ox*.

Візьмемо довільну точку $M(x, y)$, що належить гіперболі (мал. 48).



мал. 48

За умовою, різниця віддалей від точки M до фокусів F_1 і F_2 рівна $2a$, тобто: $F_1M - F_2M = 2a$, де $\overrightarrow{F_1M}(x+c, y)$, $\overrightarrow{F_2M}(x-c, y)$.

Тоді $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$. Звідки: $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.

Піднесемо до квадрату обидві частини рівності та виконаємо необхідні спрощення:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4cx - 4a^2, \quad a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2.$$

Піднесемо до квадрату:

$$a^2((x-c)^2 + y^2) = (cx - a^2)^2,$$

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = c^2x^2 - 2a^2cx + a^4,$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4,$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Так як $a < c$ (за умовою), то $c^2 - a^2 > 0$. Тому позначимо:

$$c^2 - a^2 = b^2. \tag{4.6}$$

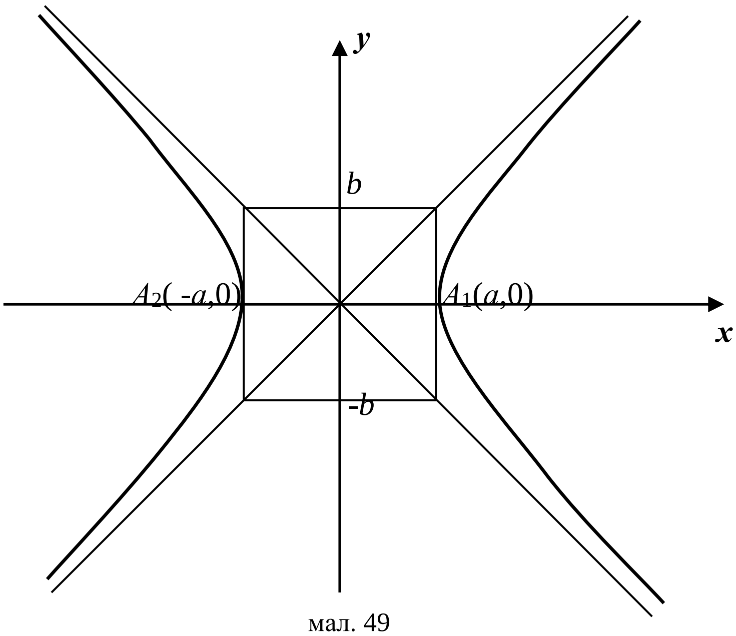
Звідки: $$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Поділимо останню рівність почленно на a^2b^2:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (4.7)$$

– *канонічне рівняння гіперболи*.

Графік гіперболи зображено на мал. 49.



мал. 49

Властивості гіперболи:

1) Оскільки рівняння (4.7) є рівнянням другого степеня, то гіпербола – лінія другого порядку.

2) Гіпербола симетрична відносно осей *Ox* і *Oy*, а також відносно початку координат.

3) *<u>Означення.</u> Вершинами гіперболи* називаються її точки перетину з віссю *Ox*. Гіпербола має дві вершини: A_1, A_2.

4) Гіпербола має дві асимптоти, які задаються рівняннями:

$$y_1 = \frac{b}{a}x \quad \text{і} \quad y_2 = -\frac{b}{a}x.$$

<u>Означення.</u> Відрізок $2a$ називається *дійсною віссю гіперболи*, відрізок $2b$ – *уявною віссю гіперболи*.

<u>Означення.</u> Ексцентриситетом гіперболи називається відношення міжфокусної віддалі до дійсної осі:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \qquad (4.8)$$

де $\varepsilon > 1$.

Приклад. Побудувати гіперболу: $16x^2 - 64y^2 = 25$ і знайти параметри a, b, c, ε .

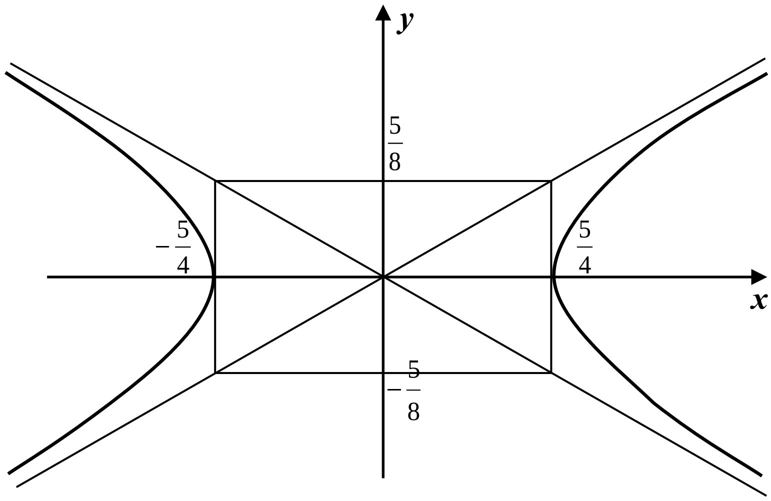
Зведемо рівняння гіперболи до канонічного вигляду:

$$\frac{16x^2}{25} - \frac{64y^2}{25} = 1,$$

$$\frac{x^2}{25/16} - \frac{y^2}{25/64} = 1.$$

Звідси отримаємо: $a = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4},\ b = \sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8}.$

Графік гіперболи зображено на мал. 50.



мал. 50

З формули (4.6) знайдемо c:

$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{25}{16} + \frac{25}{64} = 25\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{64}\right) = 25 \cdot \frac{80}{16 \cdot 64} = \frac{25 \cdot 5}{64} = \frac{125}{64}.$$

Тоді $c = \sqrt{\frac{125}{64}} = \frac{5\sqrt{5}}{8}.$

Знайдемо ε за формулою (4.8):

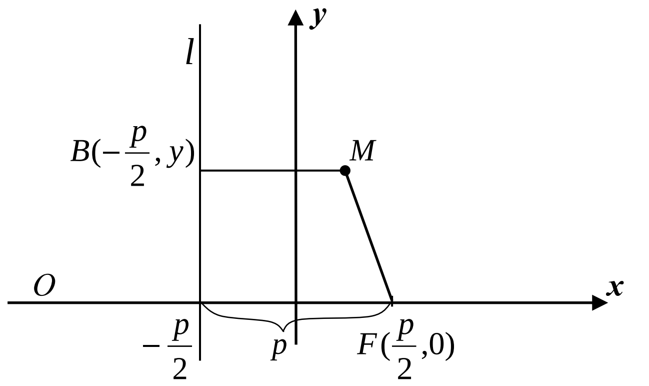
$$\varepsilon = \frac{\frac{5\sqrt{5}}{8}}{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

§-4. Парабола

<u>Означення.</u> *Параболою* називається геометричне місце точок площини, рівновіддалених від даної точки, яка називається *фокусом*, і від даної прямої, яка називається *директрисою*.

Побудуємо систему координат так: вісь *Ox* проведемо через фокус *F* перпендикулярно до директриси; вісь *Oy* проведемо посередині між фокусом і директрисою відрізка перпендикулярно до осі *Ox*.

Візьмемо довільну точку $M(x, y)$, що належить параболі (мал. 51).



мал. 51

За умовою, віддалі від точки M до фокуса F і до директриси рівні, тобто: $FM = BM$, де $\overrightarrow{FM}\left(x-\frac{p}{2}, y\right)$, $\overrightarrow{BM}\left(x+\frac{p}{2}, 0\right)$.

Тоді $\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}$.

Піднесемо до квадрату обидві частини рівності та виконаємо необхідні спрощення:

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2,$$

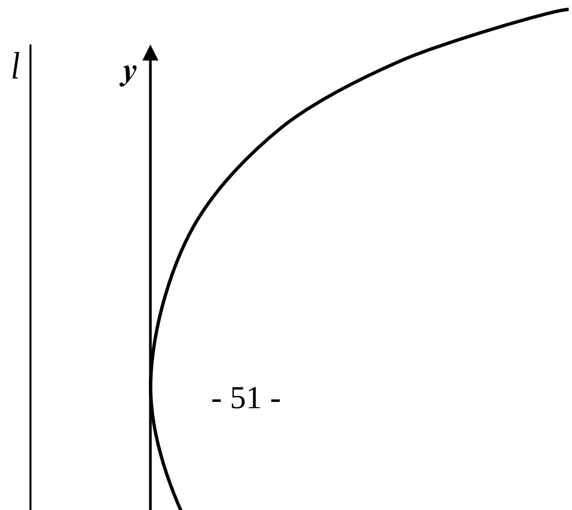
$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}.$$

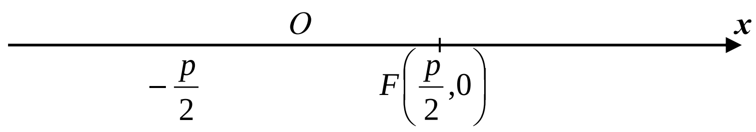
Звідки:

$$y^2=2px \tag{4.9}$$

– *канонічне рівняння параболи*.

Графік параболи зображено на мал. 52.





мал.52

Властивості параболи:

1) Оскільки рівняння (4.10) є рівнянням другого степеня, то парабола – лінія другого порядку.

2) Парабола симетрична відносно осі *Ox*.

3) Парабола має одну вершину в початку координат.

4) Парабола повністю міститься в правій півплощині відносно осі Oy.

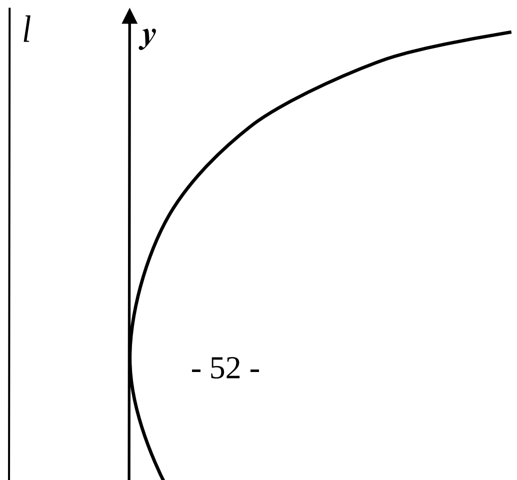
<u>Приклад.</u> Побудувати параболу: $2y^2 = 5x$ і знайти директрису та координати фокуса.

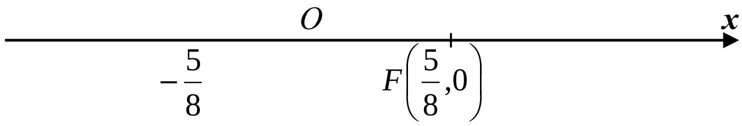
Зведемо рівняння параболи до канонічного вигляду:

$$y^2 = \frac{5}{2}x.$$

Звідси отримаємо: $2p = \frac{5}{2} \Rightarrow p = \frac{5}{4}$. Рівняння директриси: $x = -\frac{5}{8}$. Координати фокуса: $F\left(\frac{5}{8},0\right)$.

Графік параболи зображено на мал. 53.

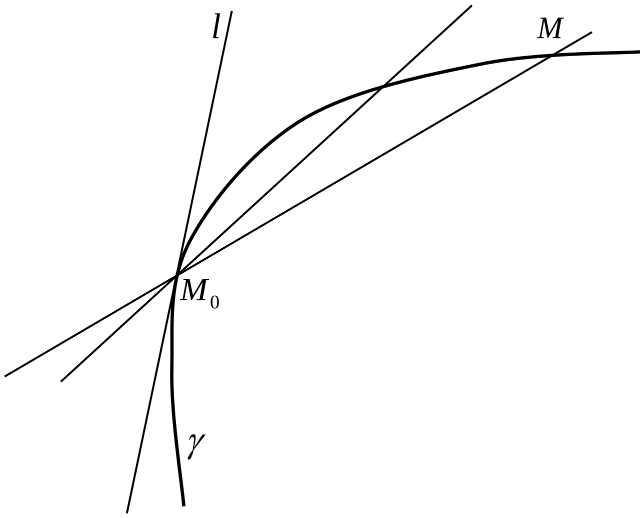




мал.53

§-5. Дотичні до ліній другого порядку

Означення. *Дотичною до лінії γ в точці M_0* називається граничне положення січної M_0M, коли точка M прямує до M_0 вздовж лінії γ (мал. 54).



мал.54

Рівняння дотичних до ліній другого порядку мають вигляд:

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1 \qquad (4.11)$$

– рівняння дотичної до еліпса,

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1 \qquad (4.12)$$

– рівняння дотичної до гіперболи,

$$y_0y=p(x+x_0) \qquad (4.13)$$

– рівняння дотичної до параболи.

Приклад. Знайти дотичну до еліпса: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ в точці $A(0,-2)$.

Рівняння дотичної згідно з формулою (4.11) має вигляд:

$\frac{0 \cdot x}{9} + \frac{(-2) \cdot y}{4} = 1$. Звідки: $y = -2$ — дотична до еліпса.

Розділ 5

Комплексні числа

§-1. Комплексні числа як розширення множини дійсних чисел

Означення. Множина всіх можливих впорядкованих пар (x, y) дійсних чисел, операції додавання, множення, а також їх рівність означаються за допомогою формул:

1) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, (5.1)

2) $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$, (5.2)

3) $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$ і $y_1 = y_2$, (5.3)

називається *множиною комплексних чисел*.

Множина комплексних чисел позначається: $\boldsymbol{C}$.

Елементи множини $\boldsymbol{C}$ називаються *комплексними числами*.

Якщо впорядковану пару $(x,0), x \in \boldsymbol{R}$, ототожнити з дійсним числом x, поклавши $(x,0) = x$, то отримаємо, що множина $\boldsymbol{C}$ комплексних чисел є розширенням множини $\boldsymbol{R}$ дійсних чисел.

Оскільки $(0,1) \cdot (y,0) = (0, y)$, то комплексне число $z = (x, y)$ допускає представлення:

$$z = (x, y) = (x,0) + (0, y) = (x,0) + (0,1) \cdot (y,0).$$

Тобто, це число можна записати у вигляді: $z = x + iy$, якщо ввести позначення: $i = (0,1)$ і вважати, що $(x,0) = x$, $(y,0) = y$.

Впорядкована пара $i = (0,1)$ називається *уявною одиницею*. Вона володіє властивістю:

$$i^2 = -1, \tag{5.4}$$

оскільки $i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1$.

Означення. Запис комплексного числа у вигляді:

$$z = x + iy, \tag{5.5}$$

де $x \in \boldsymbol{R}$, $y \in \boldsymbol{R}$, i – уявна одиниця, називається *алгебраїчною формою комплексного числа* $z = (x, y)$. При цьому x називається *дійсною частиною комплексного числа* z і позначається: $x = \operatorname{Re} z$; y називається *уявною частиною* і позначається: $y = \operatorname{Im} z$.

Якщо $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то формули (5.1), (5.2), (5.3) запишуться відповідно у вигляді:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \tag{5.6}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1), \tag{5.7}$$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \text{ і } \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2. \tag{5.8}$$

Зокрема:

$$z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z = 0 \text{ і } \operatorname{Im} z = 0. \tag{5.9}$$

Якщо $\operatorname{Im} z = 0$, то число z є дійсним числом. Якщо $\operatorname{Im} z \neq 0$, то комплексне число z називається *уявним числом*.

Операція віднімання комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ здійснюється за допомогою рівності:
$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \qquad (5.10)$$

<u>*Означення.*</u> Комплексне число
$$\bar{z} = x - iy \qquad (5.11)$$
називається *спряженим до комплексного числа* $z = x + iy$.

Очевидно, що $\overline{(\bar{z})} = z$, $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \boldsymbol{R}$.

<u>*Означення.*</u> Дійсне число
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (5.12)$$
називається *модулем комплексного числа* $z = x + iy$.

Очевидно, що завжди $|z| \geq 0$ і $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Справедливі також рівності:
$$|\bar{z}| = |z|, \qquad (5.13)$$
$$z \cdot \bar{z} = |z|^2, \qquad (5.14)$$
оскільки $|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$, $z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - yi) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$.

Дія ділення комплексного числа z_1 на комплексне число z_2 здійснюється за допомогою рівностей:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}. \qquad (5.15)$$

Отже, частка комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ обчислюється за формулою:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \qquad (5.16)$$

<u>Приклад.</u> Виконати дії та знайти дійсну і уявну частини результату:

1) $(3 - 2i)(5 + 7i)$,

2) $\dfrac{4 + 3i}{5 - 2i}$.

1) $(3 - 2i)(5 + 7i) = 15 + 21i - 10i - 14i^2 = 15 + 11i + 14 = 29 + 11i$.

Тоді $\operatorname{Re} z = 29$, $\operatorname{Im} z = 11$.

2) $\dfrac{4+3i}{5-2i}=\dfrac{(4+3i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)}=\dfrac{20+8i+15i+6i^2}{5^2-(2i)^2}=\dfrac{20+23i-6}{25+4}=\dfrac{14+23i}{29}=\dfrac{14}{29}+\dfrac{23}{29}i$.

Тоді $\operatorname{Re} z=\dfrac{14}{29}$, $\operatorname{Im} z=\dfrac{23}{29}$.

§-2. Розв'язування квадратних рівнянь з від'ємним дискримінантом

Означення. Квадратним рівнянням називається рівняння виду:

$$ax^2+bx+c=0. \tag{5.17}$$

Розв'язки цього рівняння у випадку невід'ємного дискримінанта

$$D=b^2-4ac \tag{5.18}$$

шукаються за формулами:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}. \tag{5.19}$$

Якщо ж $D<0$, то рівняння (5.17) на множині дійсних чисел $\boldsymbol{R}$ не має розв'язків. У цьому випадку знаходять уявні корені квадратного рівняння, тобто, корені на множині комплексних чисел $\boldsymbol{C}$.

Оскільки $i^2=-1$, то $i=\sqrt{-1}$. Якщо $D<0$, то $-D>0$ і

$\sqrt{D}=\sqrt{(-1)\cdot(-D)}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-D}=i\sqrt{-D}$.

Тоді розв'язки квадратного рівняння з від'ємним дискримінантом згідно із (5.19) обчислюються за формулами:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{-D}}{2a} \tag{5.20}$$

Приклад. Розв'язати квадратне рівняння: $x^2-2x+5=0$.

За формулою (5.18): $D=(-2)^2-4\cdot1\cdot5=4-20=-16<0$.

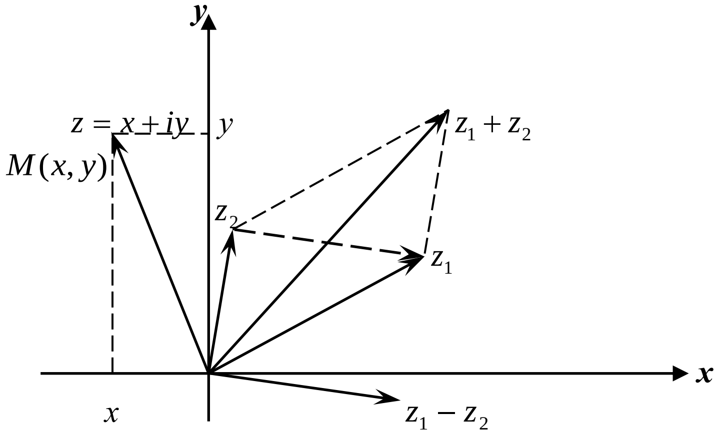
Тоді з формули (5.20) отримаємо:

$x_1=\dfrac{2+i\sqrt{16}}{2}=\dfrac{2+4i}{2}=1+2i$,

$x_2=\dfrac{2-i\sqrt{16}}{2}=\dfrac{2-4i}{2}=1-2i$.

§-3. Геометричне тлумачення комплексних чисел та дій над ними

Якщо в площині введено прямокутну декартову систему координат, то між сукупністю всіх точок координатної площини і множиною комплексних чисел $\boldsymbol{C}$ можна встановити взаємно однозначну відповідність за таким правилом: комплексному числу $z = x + iy \in \boldsymbol{C}$ відповідає єдина точка $M(x, y)$ цієї площини і навпаки (мал. 55). При цьому кажуть, що точка $M(x, y)$ є *зображенням комплексного числа* $z = x + iy$ *на площині*.



мал.55

Оскільки дійсні числа $x = (x, 0)$ зображаються точками осі *Ox*, то ця вісь називається *дійсною віссю*. Оскільки уявні числа виду $iy = (0, y)$ зображаються точками осі *Oy*, то ця вісь називається *уявною віссю*.

Комплексне число $z = x + iy$ можна також зобразити на координатній площині вектором $\overrightarrow{OM}$ із початком в точці $O(0,0)$ і кінцем в точці $M(x, y)$. Тоді сума $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ зобразиться вектором, що є діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах, які зображають комплексні числа z_1 та z_2. Комплексне число $z_1 - z_2$ зобразиться вектором, який є іншою діагоналлю цього паралелограма, або вектором, що виходить з початку координат і паралельний до цієї діагоналі (мал. 55).

Модуль $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ комплексного числа $z = x + iy$ дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{OM}$, який зображає це комплексне число, а величина $|z_1 - z_2|$ є відстань між точками, що зображають комплексні числа z_1 та z_2 на площині.

Як випливає з геометричних міркувань, для довільних комплексних чисел z_1 і z_2 справедливі нерівності:

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|, \tag{5.21}$$

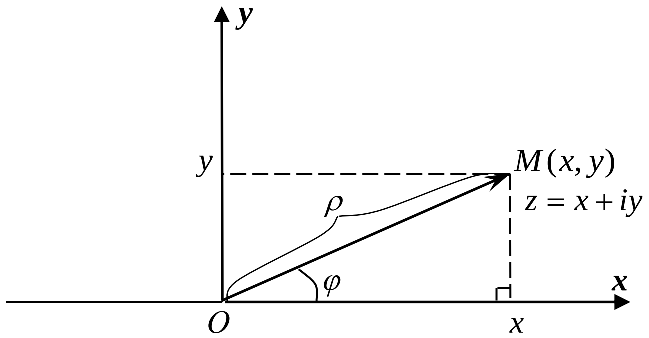
$$\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 - z_2|. \tag{5.22}$$

§-4. Тригонометрична і показникова форми комплексного числа

Поряд із прямокутними декартовими координатами (x, y) точки *M*, яка на комплексній площині зображає комплексне число $z = x + iy$, розглянемо її полярні координати (ρ, φ), де

ρ – довжина радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$ точки *M*, φ – полярний кут точки *M*, тобто кут між додатним напрямком осі *Ox* і вектором $\overrightarrow{OM}$ (мал. 56). При цьому кут φ вважається від'ємним, якщо він вимірюється в напрямку, що відповідає руху годинникової стрілки, і додатним – в протилежному випадку.

Очевидно, що завжди $\rho \geq 0$ і $-\infty < \varphi < +\infty$.



мал. 56

Якщо (ρ, φ) – полярні координати точки $M(x, y)$, що зображає комплексне число $z = x + iy$ на комплексній площині, то

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \tag{5.23}$$

а число φ називається *аргументом комплексного числа z*.

Для комплексного числа $z = x + iy$ з полярними координатами (ρ, φ) справедливі рівності:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \tag{5.24}$$

Звідси отримаємо:

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{5.25}$$

– *тригонометрична форма комплексного числа z*.

Введемо позначення: $$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi\,. \tag{5.26}$$

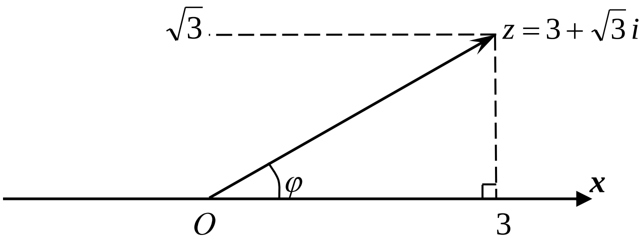
Тоді з формули (5.25) отримаємо:

$$z = \rho e^{i\varphi} \tag{5.27}$$

– *показникова форма комплексного числа*.

<u>Приклад.</u> Знайти тригонометричну та показникову форми комплексного числа $z = 3 + \sqrt{3}\,i$.

Комплексне число $z = 3 + \sqrt{3}\,i$ зображається вектором із початком в точці *O*(0,0) і кінцем в точці $(3, \sqrt{3})$ (мал. 57).



мал. 57

Знайдемо ρ за формулою (5.23):

$$\rho = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Знайдемо φ за формулою (5.24):

$$\cos\varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \text{Звідси } \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Отже, тригонометрична форма комплексного числа $z = 3+\sqrt{3}\,i$ за формулою (5.25) має вигляд:

$$z = 2\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}).$$

Показникову форму знайдемо за формулою (5.27):

$$z = 2\sqrt{3}\,e^{\frac{\pi}{6}i}.$$

§-5. Дії над комплексними числами в тригонометричній та показниковій формах

Над комплексними чисел z_1 і z_2, записаними в тригонометричній формі:

$$\begin{aligned} z_1 &= \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \\ z_2 &= \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2), \end{aligned} \tag{5.28}$$

дії множення і ділення виконуються за такими правилами:

I. Множення комплексних чисел

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= \rho_1\cdot\rho_2(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2) =$$
$$= \rho_1\cdot\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Отже, отримаємо: $$z_1\cdot z_2 = \rho_1\cdot\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)) \tag{5.29}$$

– модуль добутку комплексних чисел дорівнює добутку їх модулів, аргумент добутку дорівнює сумі їх аргументів.

II. Ділення комплексних чисел

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\cdot(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Звідси матимемо: $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \qquad (5.30)$$

– *модуль частки комплексних чисел дорівнює частці їх модулів, аргумент частки дорівнює різниці їх аргументів*.

III. Піднесення комплексних чисел до цілого степеня (формула Муавра)

Нехай маємо комплексне число z, записане в тригонометричній формі:

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Застосовуючи до цього числа формулу (5.29), можна отримати таку рівність:

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad (5.31)$$

– *формула Муавра*.

IV. Добування кореня з комплексних чисел

<u>Означення.</u> Коренем n-го степеня з комплексного числа z називається таке комплексне число ω, що $\omega^n = z$.

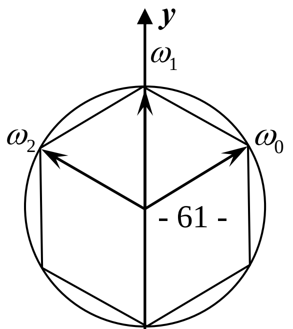
При $z \neq 0$ існує n різних комплексних чисел $\omega_0, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_{n-1}$, що є коренями n-го степеня з комплексного числа z.

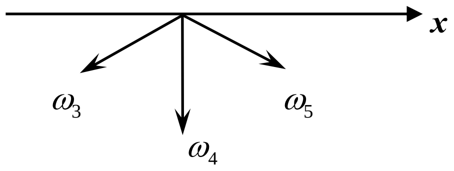
Корені ω_k n-го степеня з комплексного числа $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ обчислюються за формулами:

$$\omega_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad (5.32)$$

де $k = \overline{0, n-1}$.

Всі корені ω_k n-го степеня з комплексного числа z лежать на колі радіусом $\sqrt[n]{\rho}$ з центром в початку координат. Сполучивши їх послідовно, отримаємо правильний n-кутник, вписаний у це коло (мал. 58 – випадок кореня 6-го степеня).





мал. 58

Приклад. Знайти корені 4-го степеня з числа $z=-1$.

Знайдемо тригонометричну форму числа $z=-1$. Очевидно, що $\rho=1, \varphi=\pi$. Звідси отримаємо: $$z=1\cdot(\cos\pi+i\sin\pi).$$

Тоді за формулою (5.32) матимемо:

$$\omega_0=\sqrt[4]{1}(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 0}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 0}{4})=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$\omega_1=\sqrt[4]{1}(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 1}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 1}{4})=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$\omega_2=\sqrt[4]{1}(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 2}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 2}{4})=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$\omega_3=\sqrt[4]{1}(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 3}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 3}{4})=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Якщо комплексні числа z_1 і z_2 записані в показниковій формі:

$$z_1=\rho_1 e^{i\varphi_1},\quad z_2=\rho_2 e^{i\varphi_2}, \tag{5.33}$$

то дії множення і ділення згідно із формулами (2.29) і (2.30) виконуються так:

$$z_1\cdot z_2=\rho_1\cdot\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \tag{5.34}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}. \tag{5.35}$$

Для комплексного числа z, записаного в показниковій формі:

$z=\rho e^{i\varphi}$, піднесення цього числа до n-го степеня і добування з нього кореня n-го степеня виконуються відповідно до формул (5.31), (5.32) за правилами:

$$z^n=\rho^n\cdot e^{in\varphi}, \tag{5.36}$$

– формула Муавра.

$$\omega_k=\sqrt[n]{\rho}\cdot e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n}}, \tag{5.37}$$

де $k=\overline{0,n-1}$.

Розділ 6

Диференціальне числення

§-1. Числова послідовність. Границя числової послідовності

<u>*Означення.*</u> Правило, згідно з яким кожному натуральному числу n ставиться у відповідність деяке дійсне число x_n, називається *числовою послідовністю*.

Числову послідовність записують так: $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ або $\{x_n\}$. Число x_1 називається *першим елементом послідовності*, x_2 – *другим елементом*,…, x_n – *n-ним* або *загальним елементом послідовності*.

<u>Приклад.</u>

1) $1, 4, 9, 16, ..., n^2, \ldots$; $x_n = n^2$.

2) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...$; $x_n = \frac{1}{n}$.

3) $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$; $x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$.

<u>*Означення.*</u> Число a називається *границею послідовності*, якщо:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \boldsymbol{N}: \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon. \tag{6.1}$$

Якщо число a є границею послідовності $\{x_n\}$, то це записують так:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a. \tag{6.2}$$

Послідовність, яка має границю, називається *збіжною*.

Приклад. Користуючись означенням границі послідовності, довести, що: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

Доведемо, що $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\boldsymbol{N}: \forall n>n_0 \Rightarrow \left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$.

Спростимо останню нерівність:

$$\left|\frac{-1}{n+1}\right|<\varepsilon,\quad \frac{1}{n+1}<\varepsilon,\quad n+1>\frac{1}{\varepsilon},\quad n>\frac{1}{\varepsilon}-1.$$

Тоді в ролі n_0 можна взяти цілу частину числа $\frac{1}{\varepsilon}-1$, тобто:

$$n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right].$$

Теорема (***властивості границь послідовностей***)

Нехай послідовності $\{x_n\}$ *і* $\{y_n\}$ *мають границі:* $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=a$ *і* $\lim\limits_{x\to\infty}y_n=b$. *Тоді*:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}(x_n\pm y_n)=a\pm b$ (6.3)

– границя суми (різниці) дорівнює сумі (різниці) границь,

2) $\lim\limits_{x\to\infty}(x_n\cdot y_n)=a\cdot b$ (6.4)

– границя добутку дорівнює добутку границь,

3) *Якщо* $b\neq 0$, *то*: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{a}{b}$ (6.5)

– границя частки дорівнює частці границь,

4) *Якщо* $c=const$, *то*: $\lim\limits_{x\to\infty}(c\cdot x_n)=c\cdot a$ (6.6)

– сталий множник можна виносити за знак границі.

Приклад. Обчислити границі:

1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{5n^2+8}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{5+\frac{8}{n^2}}=\frac{0}{5}=0.$$

2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+n-3}{n-5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{1}{n^2}-\frac{3}{n^3}}{\frac{1}{n^2}-\frac{5}{n^3}}=\left(\frac{4}{0}\right)=\infty.$$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2n+1}{2n^2-5}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{5}{n^2}}=\dfrac{3}{2}=1{,}5$.

§-2. Означення і способи задання функції. Основні властивості функцій

<u>Означення.</u> Нехай X, Y – дві непорожні множини. *Функцією, визначеною на множині X*, називається правило, згідно з яким кожному елементу $x\in X$ ставиться у відповідність єдиний елемент $y\in Y$.

Для запису функцій застосовують позначення:

$y=f(x)$, $f: X\to Y$, $X\xrightarrow{f}Y$ та ін.

Якщо маємо функцію $f: X\to Y$, то множину X називають *областю визначення функції* і позначають: $D(f)=X$, множину Y називають *областю значень функції* і позначають: $E(f)=Y$.

<u>Означення.</u> *Графіком функції* називається множина точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати – відповідним значенням функції.

Способи задання функцій:

1) *Аналітичний* – функція задається за допомогою формули.
2) *Табличний* – функція задається у вигляді таблиці з відповідними значеннями *x* та *y*.
3) *Графічний* – функція задається за допомогою графіка.
4) *Словесний* – описовий метод задання функції.
5) *Параметричний* – функція задається за допомогою системи:

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad t\in(\alpha,\beta). \tag{6.7}$$

Властивості функцій:

1. <u>Означення.</u> Функція $f(x)$ називається *парною*, якщо: $\forall x\in D(f):(-x)\in D(f)$ і $f(-x)=f(x)$.

Функція $f(x)$ називається *непарною*, якщо: $\forall x\in D(f):(-x)\in D(f)$ і $f(-x)=-f(x)$.

2. <u>Означення.</u> Функція $f(x)$ називається *періодичною*, якщо: $\forall x\in D(f)\,\exists T>0:(x+T),(x-T)\in D(f)$ і $f(x+T)=f(x-T)=f(x)$. Найменше додатне число *T* (якщо воно існує) називається *найменшим додатним періодом функції*.

3. *Означення.* Функція $f(x)$ називається *зростаючою* (*неспадною*), якщо:

4. $\forall x_1, x_2 \in D(f): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\ \left(f(x_1) \le f(x_2)\right)$.

Функція $f(x)$ називається *спадною* (*незростаючою*), якщо:

$\forall x_1, x_2 \in D(f): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)\ \left(f(x_1) \ge f(x_2)\right)$.

§-3. Границі функції в точці. Різні означення границі. Перша і друга важливі границі

Означення. ε-*околом точки a* називається інтервал: $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Означення. Точка x_0 називається *точкою скупчення множини X*, якщо в довільному ε-околі цієї точки міститься хоча б одна точка з множини *X*, відмінна від x_0.

Означення. Точка x_0 називається *ізольованою точкою множини X*, якщо існує ε-окіл цієї точки, в якому немає жодної точки з множини *X*, відмінної від x_0.

Нехай функція $f(x)$ визначена на множині *X* і x_0 – точка скупчення множини *X*.

Означення. (границі на мові «$\varepsilon - \delta$» або Коші). Число *A* називається *границею функції* $f(x)$ *в точці* x_0, якщо:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{6.8}$$

Означення. (границі на мові послідовностей або Гейне). Число *A* називається *границею функції* $f(x)$ *в точці* x_0, якщо для довільної послідовності $\{x_n\} \subset X$, яка збігається до x_0, відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ збігається до А. Тобто:

$$\forall \{x_n\} \subset X: \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A. \tag{6.9}$$

Якщо число *A* є границею функції $f(x)$ в точці x_0, то це записують так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A. \tag{6.10}$$

Приклад. Користуючись означенням Коші, довести, що:

$$\lim_{x\to 2}(3x-5) = 1.$$

Доведемо, що $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in \boldsymbol{R}, 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |3x-5-1| < \varepsilon$.

Спростимо останню нерівність:

$$|3x-6| < \varepsilon, \quad 3|x-2| < \varepsilon, \quad |x-2| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отже, в ролі δ можна взяти число $\frac{\varepsilon}{3}$, тобто: $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

Теорема (***властивості границь функцій***)

Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ *в точці* x_0 *мають границі*: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ *і* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$. *Тоді*:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \pm g(x) \right) = A \pm B$ (6.11)

– *границя суми* (*різниці*) *дорівнює сумі* (*різниці*) *границь*,

2) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = A \cdot B$ (6.12)

– *границя добутку дорівнює добутку границь*,

3) *Якщо* $B \neq 0$, *то*: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$ (6.13)

– *границя частки дорівнює частці границь*,

4) *Якщо* $c = const$, *то*: $\lim\limits_{x \to x_0} \left(c \cdot f(x) \right) = c \cdot A$ (6.14)

– *сталий множник можна виносити за знак границі*.

Приклад. Знайти границю: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2 + x - 2)}{(x-1)(x^3 + x^2 + x - 3)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 + x - 3} =$$

$$= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2 + 2x + 3)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x+2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{3}{6} = 0{,}5.$$

Теорема (***перша важлива границя***)

Має місце рівність:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (6.15)$$

Теорема (***друга важлива границя***)

Справедлива рівність:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e. \qquad (6.16)$$

Приклад. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$,

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x+5} \right)^{x-1}$.

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{x} = \left(\dfrac{0}{0} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5 \sin 5x}{5x} = 5 \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{5x} = 5 \cdot 1 = 5$

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x+5} \right)^{x-1} = \left(1^{\infty} \right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{2x+1}{2x+5} - 1 \right)^{x-1} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{-4}{2x+5} \right)^{x-1} =$

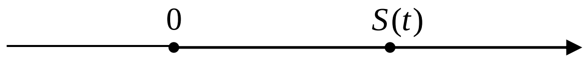
$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2x+5}\right)^{\frac{2x+5}{-4}\cdot\frac{-4}{2x+5}\cdot(x-1)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4\cdot(x-1)}{2x+5}} = e^{\frac{-4}{2}} = e^{-2}.$$

§-4.Основні задачі, що приводять до поняття похідної. Геометричний та фізичний зміст похідної

Нехай деяке тіло рухається прямолінійно і відомо його закон руху:

$$S = S(t), \tag{6.17}$$

де t – час, S – шлях, який пройшло тіло за час t (мал. 59).



мал. 59

Розглянемо задачу про знаходження швидкості в момент часу $t = t_0$. Для цього візьмемо деякий час Δt і знайдемо шлях, який пройде тіло за проміжок часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$. Цей шлях буде рівний: $\Delta S = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)$.

Середня швидкість на вказаному проміжку часу знаходиться за формулою:

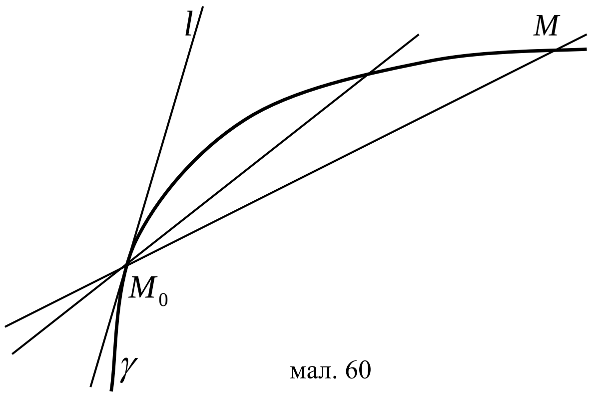
$$\upsilon_c = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}. \tag{6.18}$$

Якщо Δt буде досить малим, то υ_c буде наближено рівна швидкості тіла в момент часу t_0. Тобто:

$$\upsilon(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}. \tag{6.19}$$

– *миттєва швидкість тіла в момент часу* t_0.

Розглянемо деяку лінію γ (мал. 60).



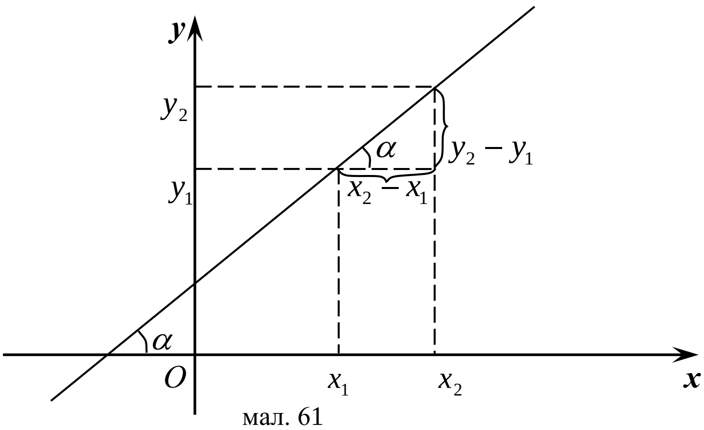
мал. 60

Візьмемо на цій кривій деяку точку M_0 і зафіксуємо її. Крім точки M_0, на кривій виберемо ще одну точку *M*. Проведемо через точки M_0 і M пряму. Ця пряма називається *січною*.

Тепер точку M по кривій γ будемо наближати до точки M_0. Відповідні січні M_0M будуть повертатись в точці M_0. Може так відбутись, що при наближенні точки M по кривій γ до точки M_0 січні будуть наближатись до деякої прямої l. В цьому випадку кажуть, що крива γ є *гладкою в точці* M_0, а пряму l називають *дотичною до кривої* γ *в точці* M_0.

Існують також криві, які в деяких точках не мають дотичних.

Розглянемо пряму: $y = kx + b$, де k – кутовий коефіцієнт прямої. Візьмемо дві точки на цій прямій (x_1, y_1) і (x_2, y_2) (мал. 61).

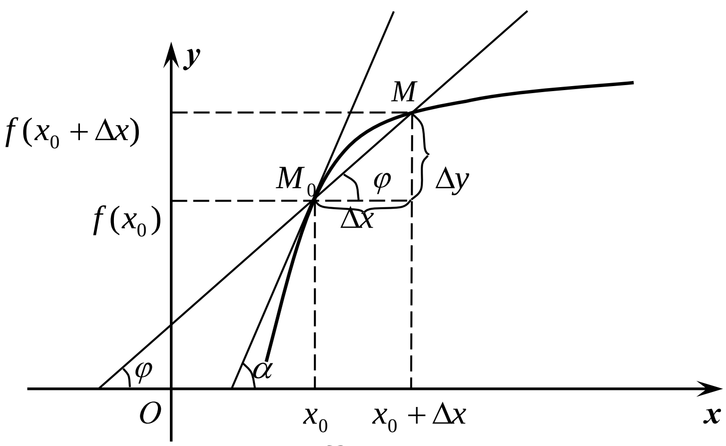


мал. 61

Як відомо, кутовий коефіцієнт прямої дорівнює тангенсу кута нахилу прямої до додатного напряму осі *Ox*. Крім того, як видно з малюнка:

$$k = tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (6.20)$$

Нехай лінія γ є графіком неперервної функції $y = f(x)$ (мал. 62). Візьмемо на цій кривій точку $M_0(x_0, f(x_0))$. Крім цього візьмемо також точку $M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$.



мал. 62

Коли $\Delta x \to 0$, то внаслідок неперервності функції точка M по кривій γ буде наближатись до точки M_0. Кутовий коефіцієнт січної $M_0 M$ знайдемо за формулою:

$$k_c = tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (6.21)$$

В тому випадку, коли в точці M_0 до кривої можна провести дотичну, при наближенні M до M_0 січні будуть наближатися до дотичної. А тому: $\varphi \to \alpha$. Звідки слідує, що: $tg\varphi \to tg\alpha$. Отже кутовий коефіцієнт дотичної знайдемо з рівностей:

$$k_{дот} = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (6.22)$$

Як бачимо, задача про знаходження миттєвої швидкості і задача про знаходження кутового коефіцієнта дотичної приводять до обчислення границь виду:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Різниця

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0) \qquad (6.23)$$

називається *приростом функції в точці* x_0.

<u>*Означення.*</u> Границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля, називається *похідною функції в точці*, тобто:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (6.24)$$

<u>*Означення.*</u> Функція, яка має похідну в точці x_0, називається *диференційовною в цій точці*. Якщо функція має похідну в кожній точці деякого проміжку (a,b), то вона називається *диференційною на цьому проміжку*.

Для похідної функції вживають також позначення: $y', y'_x, f', f'_x, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{df}{dx}$.

<u>Приклад.</u> Знайти $f'(2)$, якщо $f(x) = x^2 \sin(x-2)$.

Оскільки $x_0 = 2$, то з формули (6.20) отримаємо:

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 \cdot \sin(2+\Delta x - 2) - 2^2 \cdot \sin 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 \cdot \sin \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2+\Delta x)^2 \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 2^2 \cdot 1 = 4.$$

Із задач про миттєву швидкість і кутовий коефіцієнт дотичної випливає, що **механічно** *швидкість є похідною від шляху по часу*:

$$\upsilon = S'(t). \qquad (6.25)$$

Геометрично *похідна є кутовий коефіцієнт дотичної*. *Рівняння дотичної* має вигляд:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0). \qquad (6.26)$$

Крім рівняння дотичної, розглядають ще рівняння *нормалі* до кривої (прямої, яка перпендикулярна до дотичної). Враховуючи умову перпендикулярності прямих:

$$k_{нор} = -\frac{1}{k_{дот}}, \tag{6.27}$$

отримаємо, що *рівняння нормалі* має вигляд:

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0). \tag{6.28}$$

Таблиця похідних

<u>*Означення.*</u> *Другою похідною функції* $f(x)$ називається похідна від функції $f'(x)$ (якщо вона існує).

$f(x)$	C	x	x^2	x^3	x^n	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[n]{x}$	e^x	a^x
$f'(x)$	0	1	$2x$	$3x^2$	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	e^x	$a^x \ln a$

$f(x)$	$\ln x$	$\log_a x$	$\sin x$	$\cos x$	tgx	$ctgx$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$arctgx$	$arcctgx$
$f'(x)$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x\ln a}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Друга похідна позначається: $f''(x) = \big(f'(x$.

(6.29)

<u>*Означення.*</u> Функція, яка має другу похідну в точці x_0, називається *двічі диференційовною в цій точці*. Якщо функція має другу похідну в кожній точці деякого проміжку (a, b), то вона називається *двічі диференційною на цьому проміжку*.

Аналогічно означаються похідні 3-го, 4-го,…, n-го порядку. Вони відповідно позначаються: $f'''(x), f^{IV}(x), ..., f^{(n)}(x)$.

§-5. Правила диференціювання функцій. Похідна складної функції

<u>Теорема</u>

Якщо функції $U = f(x), V = g(x)$ *є диференційовними в точці* x_0, *то в цій точці виконуються рівності*:

1) $(U \pm V)' = U' \pm V'$ (6.30)

– *похідна суми* (*різниці*) *дорівнює сумі* (*різниці*) *похідних,*

2) $(CU)' = CU'$, *де* $C = const$ (6.31)

– *сталий множник можна виносити за знак похідної.*

3) $(U \cdot V)' = U'V + UV'$, (6.32)

4) $\left(\dfrac{U}{V}\right) = \dfrac{U'V - UV'}{V^2}$. (6.33)

Нехай маємо дві функції: $U = \varphi(x)$ і $y = f(U)$. Тоді функція $F(x) = f(\varphi(x))$ *складною функцією*.

Теорема

Якщо функція $U = \varphi(x)$ *диференційовна в точці* x_0, *а функція* $y = f(U)$ *диференційовна в точці* $U_0 = \varphi(x_0)$, *то складна функція* $F(x) = f(\varphi(x))$ *є диференційовною в точці* x_0. *При цьому виконується рівність*:

$$F'(x_0) = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0). \qquad (6.34)$$

Приклад. Знайти похідну:

1) $y = 5\sin x$,

2) $y = (x+1)(x+2)^2$,

3) $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$,

4) $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$.

1) $y' = 5(\sin x)' = 5\cos x$,

2) $y' = (x+1)' \cdot (x+2)^2 + (x+1) \cdot \left((x+2)^2\right)' = 1 \cdot (x+2)^2 + +(x+1) \cdot 2(x+2) \cdot (x+2)' =$
$= (x+2)^2 + 2(x+1)(x+2) = (x+2)(3x+4)$,

3) $y' = \dfrac{(2x)' \cdot (1-x^2) - 2x \cdot (1-x^2)'}{(1-x^2)^2} = \dfrac{2 \cdot (1-x^2) - 2x \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = \dfrac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$,

4) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \left(x + \sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \dfrac{1 + 2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

§-6. Диференціал функції і його застосування для наближених обчислень

Теорема

Для того, щоб функція $f(x)$ *була диференційовною в точці* x_0, *необхідно і достатньо, щоб в околі цієї точки приріст функції можна було подати у вигляді*:

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + \varepsilon\,\Delta x\,, \tag{6.35}$$

де A – стала, $\varepsilon \to 0$ *при* $\Delta x \to 0$.

<u>*Означення.*</u> В рівності (6.35) перший доданок $A\Delta x$ називається *головною частиною приросту функції.*

<u>*Означення.*</u> Головну частину приросту функції називають *диференціалом функції в точці* x_0.

Диференціал функції в точці x_0 позначається: $df(x_0)$.

З рівності (6.35) матимемо:

$$df(x_0) = A\Delta x. \tag{6.36}$$

Оскільки для похідної виконується рівність:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\Delta x + \varepsilon\,\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(A+\varepsilon) = A,$$

то з (6.36) отримаємо:

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x. \tag{6.37}$$

Для аргументу покладають: $\Delta x = dx$, де dx – *диференціал змінної*. З формули (6.37) дістанемо:

$$df(x_0) = f'(x_0)\,dx. \tag{6.38}$$

Розглянемо рівність:

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + \big(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\big) = f(x_0) + \Delta f(x_0). \tag{6.39}$$

В рівності (6.39) вважають, що $\Delta f(x_0) \approx df(x_0)$.

Тоді отримаємо:

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0). \tag{6.40}$$

Формулу (6.40) застосовують для наближених обчислень.

<u>Приклад.</u> Обчислити наближено: $\sqrt[3]{1{,}02}$.

Розглянемо функцію: $y = \sqrt[3]{x}$.

Скористаємось рівністю (6.40), в якій матимемо: $x_0 + \Delta x = 1{,}02$.

Покладемо: $x_0 = 1, \Delta x = 0{,}02$. Тоді: $f(x_0) = f(1) = \sqrt[3]{1} = 1$.

$df(x) = f'(x)\,dx = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cdot dx$, де $dx \approx \Delta x = 0{,}02$.

$df(x_0) = df(1) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}\cdot 0{,}02 = \dfrac{0{,}02}{3} = \dfrac{1}{150}$. Отже, отримаємо: $\sqrt[3]{1{,}02} \approx 1 + \dfrac{1}{150} = \dfrac{151}{150}$.

§-7. Умови сталості, зростання і спадання функцій

<u>Теорема</u> (*умова сталості функції*)

Для того, щоб функція $f(x)$ *була сталою на проміжку* (a,b), *необхідно і достатньо, щоб вона була диференційовною на цьому проміжку і її похідна була рівна нулю, тобто*:

$$f(x) = const \Leftrightarrow f'(x) = 0 .$$

Цю теорему часто застосовують при доведенні тотожностей.

<u>Приклад.</u> Довести тотожність: $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$.

Розглянемо функцію: $f(x) = \arcsin x + \arccos x$.

Знайдемо похідну: $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$. Тоді за попередньою теоремою:

$f(x) = f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$. Звідси: $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$.

<u>Означення.</u> Функція $f(x)$ називається *зростаючою* (*неспадною*) на проміжку (a,b), якщо:

$$\forall x_1, x_2 : a < x_1 < x_2 < b \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \left(f(x_1) \le f(x_2) \right).$$

Функція $f(x)$ називається *спадною* (*незростаючою*) на проміжку (a,b), якщо:

$$\forall x_1, x_2 : a < x_1 < x_2 < b \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \ \left(f(x_1) \ge f(x_2) \right).$$

Функція, яка є зростаючою або спадною на проміжку (a,b), називається *монотонною на цьому проміжку*.

<u>Теорема</u> (*умови зростання і спадання функцій*)

Якщо функція $f(x)$ *є диференційовною на проміжку* (a,b) *і* $f'(x) > 0$, *то на цьому проміжку функція* $f(x)$ *зростає. Якщо функція* $f(x)$ *є диференційовною на проміжку* (a,b) *і* $f'(x) < 0$, *то на цьому проміжку функція* $f(x)$ *спадає.*

<u>Приклад.</u> Знайти проміжки монотонності функції:

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5.$$

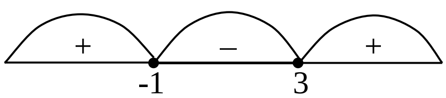
Знайдемо похідну: $y' = 3x^2 - 6x + 9$.

Знак похідної знайдемо методом інтервалів. Прирівняємо похідну до нуля:

$$3x^2 - 6x - 9 = 0 \text{ або } x^2 - 2x - 3 = 0 . \qquad .$$

Розкладемо на множники ліву частину рівняння:

$$(x+1)(x-3) = 0 .$$



мал. 63

Як випливає з теореми і з мал. 63 , $f(x)\nearrow (-\infty,-1)\cup(3,\infty)$, $f(x)\searrow (-1,3)$.

§-8. Екстремуми функції

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку (a,b) і точка $x_0 \in (a,b)$.

<u>*Означення.*</u> Точка x_0 називається *точкою максимуму функції* $f(x)$, якщо існує деякий окіл цієї точки $(x_0-\delta, x_0+\delta)$:

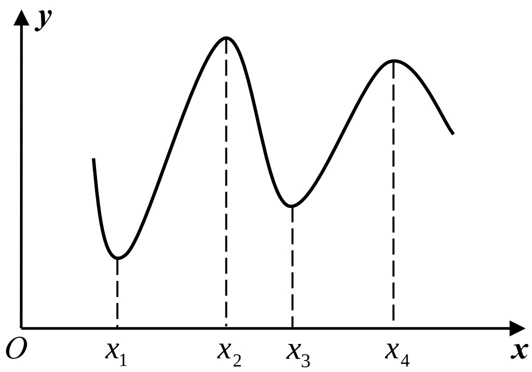
$$\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \Rightarrow f(x) \le f(x_0).$$

Точка x_0 називається *точкою мінімуму функції* $f(x)$, якщо існує деякий окіл цієї точки $(x_0-\delta, x_0+\delta)$:

$$\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \Rightarrow f(x) \ge f(x_0).$$

Відповідні значення функцій називаються відповідно *максимумом* і *мінімумом функції*.

Точки мінімуму і максимуму називаються *точками екстремуму*.



мал. 64

На мал. 64 точки x_1 і x_3 – точки мінімуму, x_2 і x_4 – точки максимуму.

<u>Теорема</u> (*необхідна умова екстремуму*)

Якщо точка x_0 є точкою екстремуму неперервної функції $f(x)$ і в точці x_0 функція диференційовна, то:

$$f'(x_0) = 0. \tag{6.41}$$

<u>*Означення.*</u> Точки, в яких похідна дорівнює нулю, називаються *стаціонарними* або *підозрілими на екстремум*.

Рівність нулю похідної є лише необхідною, але не достатньою умовою екстремуму. Тобто існують точки, в яких похідна рівна нулю, але в цих точках екстремуму немає. Є також функції, які мають екстремум в тих точках, в яких похідна не існує.

Означення. Точки, в яких похідна рівна нулю або не існує, називаються *критичними точками функції*.

Теорема (***достатня умова екстремуму***)

Нехай функція $f(x)$ *є неперервною на проміжку* (a,b) *і* $x_0 \in (a,b)$. *Тоді у випадку, коли* $f(x)$ *є диференційовною в деякому околі точки* $x_0 : (x_0-\delta, x_0+\delta)$, *за винятком хіба що точки* x_0, *то*:

1. *У випадку, коли на проміжку* $(x_0-\delta, x_0)$ $f'(x) < 0$, *а на проміжку* $(x_0, x_0+\delta)$ $f'(x) > 0$, *то* x_0 *– точка мінімуму. Іншими словами, якщо при переході через точку* x_0 *похідна змінює знак з «–» на «+», то* x_0 *–* ***точка мінімуму***.

2. *У випадку, коли на проміжку* $(x_0-\delta, x_0)$ $f'(x) > 0$, *а на проміжку* $(x_0, x_0+\delta)$ $f'(x) < 0$, *то* x_0 *– точка максимуму. Іншими словами, якщо при переході через точку* x_0 *похідна змінює знак з «+» на «–», то* x_0 *–* ***точка максимуму***.

3. *Якщо на кожному з проміжків* $(x_0-\delta, x_0)$, $(x_0, x_0+\delta)$ *похідна є одночасно або додатною, або від'ємною, то* x_0 *не є точкою екстремуму.*

У прикладі попереднього параграфу за цією теоремою точками екстремуму функції є такі точки: $x_{\max} = -1, x_{\min} = 3$. Максимум і мінімум функції відповідно рівні:

$$y_{\max} = f(x_{\max}) = f(-1) = (-1)^3 - 3\cdot(-1)^2 - 9\cdot(-1) + 5 = -1 - 3 + 9 + 5 = 10,$$

$$y_{\min} = f(x_{\min}) = f(3) = 3^3 - 3\cdot 3^2 - 9\cdot 3 + 5 = 27 - 27 - 27 + 5 = -22.$$

Теорема

Якщо функція $f(x)$ *є неперервною і диференційовною на проміжку* (a,b) *і в точці* x_0 *виконуються умови*:

1. $f'(x_0) = 0$.
2. *В деякому околі* $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ *функція* $f(x)$ *має другу похідну* $f''(x)$, *яка є неперервною в точці* x_0, *то*:
   а) *у випадку, коли* $f''(x_0) > 0$, x_0 *є точкою мінімуму*;
   б) *у випадку, коли* $f''(x_0) < 0$, x_0 *є точкою максимуму*.

Теорема

Якщо в точці x_0 *виконуються умови*:

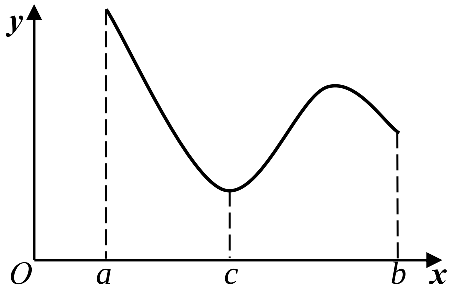
$f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ *і* $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, *то у випадку, коли* $n = 2k$, x_0 *є точкою екстремуму, а у випадку, коли* $n = 2k + 1$, x_0 *не є точкою екстремуму.*

§-9. Найбільше і найменше значення функції на проміжку

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на сегменті $[a,b]$. Серед множини значень такої функції є найбільше і найменше значення. Ці числа називаються відповідно *найбільшим* і *найменшим значеннями функції на проміжку* $[a,b]$.

Функція може набувати свого найбільшого і найменшого значень як на кінцях сегмента $[a,b]$, так і у внутрішніх точках цього сегмента.

На мал. 65 зображено графік функції, яка у внутрішній точці *c* набуває найменшого значення, а в лівому кінці сегмента (точці *a*) – найбільшого значення.



мал. 65

***Алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значень на проміжку*:**

Щоб знайти найбільше (*найменше*) *значення неперервної функції на сегменті* $[a,b]$, *треба знайти всі локальні максимуми* (*мінімуми*) *і порівняти їх зі значеннями функції, яких вона набуває на кінцях сегмента. Найбільше* (*найменше*) *число серед утворених чисел і буде найбільшим* (*найменшим*) *значенням функції, заданої на сегменті* $[a,b]$.

<u>Приклад.</u> Знайти найбільше і найменше значення функції: $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$ на сегменті $[-3,3]$.

Визначимо стаціонарні точки. Знайдемо похідну:

$$y' = 6x^2 - 6x - 12.$$

Прирівняємо похідну до нуля:

$$6x^2 - 6x - 12 = 0,$$

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Одержимо стаціонарні точки: $x_1 = -1, x_2 = 2$.

Обчислимо значення функцій в точках x_1, x_2 і на кінцях сегмента, тобто в точках $x_3 = -3, x_2 = 3$. Матимемо:

$f(-1) = 8, f(2) = -19, f(-3) = -46, f(3) = -10$.

Отже, найбільше значення функції на проміжку $[-3,3]$ дорівнює $f(-1) = 8$, найменше – $f(-3) = -46$.

§-10. Опуклість, точки перегину графіка функції

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на деякому проміжку (a,b).

Означення. Функція $f(x)$ називається *опуклою на проміжку* (a,b), якщо:

$\forall x_1, x_2 \in (a,b), \forall q_1 > 0, q_2 > 0 : q_1 + q_2 = 1 \Rightarrow f(q_1x_1 + q_2x_2) \le q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)$.

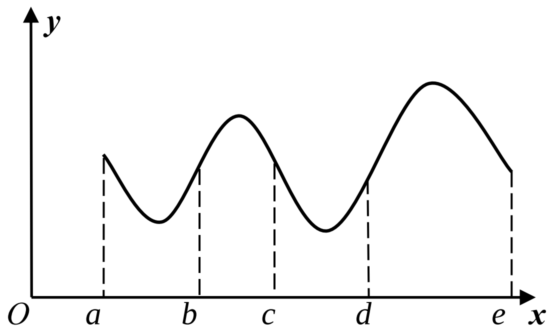
Функція $f(x)$ називається *вгнутою*, якщо:

$\forall x_1, x_2 \in (a,b), \forall q_1 > 0, q_2 > 0 : q_1 + q_2 = 1 \Rightarrow f(q_1x_1 + q_2x_2) \ge q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)$.

Часто означення опуклості і вгнутості функції дають так:

Означення. Функція $f(x)$ називається *опуклою на проміжку* (a,b), якщо графік функції лежить не нижче довільної її дотичної на даному проміжку.

Функція $f(x)$ називається *вгнутою на проміжку* (a,b), якщо графік функції лежить не вище довільної її дотичної на даному проміжку.



мал. 66

Функція, графік якої зображено на мал. 66, є опуклою на проміжках $(a,b),(c,d)$ і вгнутою на проміжках $(b,c),(d,e)$.

Теорема

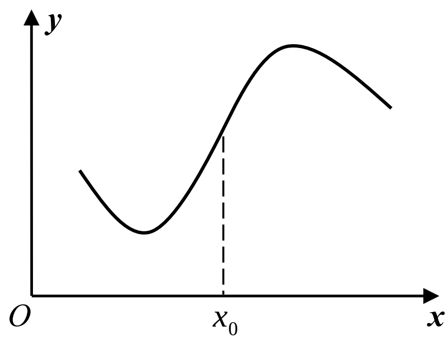
Для того, щоб диференційовна функція $f(x)$ була опуклою (вгнутою) на проміжку (a,b), необхідно і достатньо, щоб її похідна була неспадною (незростаючою) на цьому проміжку.

Враховуючи умови зростання і спадання функцій, з попередньої теореми отримаємо наступну:

Теорема

Якщо функція $f(x)$ *двічі диференційовна на проміжку* (a,b) *і* $f''(x) \geq 0$, *то на цьому проміжку функція* $f(x)$ *опукла. Якщо* $f''(x) \leq 0$, *то на цьому проміжку функція* $f(x)$ *вгнута*.

<u>*Означення.*</u> Точка x_0 називається *точкою перегину функції* $f(x)$, якщо існує деякий окіл $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, для якого функція має різну опуклість на проміжках $(x_0 - \delta, x_0)$ і $(x_0, x_0 + \delta)$ (мал. 67).



мал. 67

<u>Теорема</u> (*необхідна умова перегину*)

Якщо функція $f(x)$ *є двічі диференційовною на проміжку* (a,b) *і* x_0 *– точка перегину функції, то її друга похідна в цій точці рівна нулю, тобто*:

$$f''(x_0) = 0. \tag{6.42}$$

<u>Теорема</u> (*достатня умова перегину*)

Якщо функція $f(x)$ *є двічі диференційовною на проміжку* (a,b) *і* $f''(x_0) = 0$, *причому при переході через точку* x_0 *друга похідна функції змінює знак, то* x_0 *– точка перегину.*

§-11. Асимптоти

Розглянемо функцію, задану рівнянням: $y = f(x)$. Нехай графіком цієї функції є деяка лінія γ.

<u>*Означення.*</u> Пряма l називається *асимптотою до графіка функції*, якщо відстань від точки $M \in \gamma$ до прямої l прямує до нуля, коли точка M по кривій γ прямує до нескінченності.

<u>*Означення.*</u> Пряма $x = x_0$ називається *вертикальною асимптотою до графіка функції* $y = f(x)$, якщо виконується рівність:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty. \tag{6.43}$$

Наприклад, пряма $x=1$ є вертикальною асимптотою до графіка функції $y=\dfrac{1}{x-1}$.

<u>Теорема</u>

Для того, щоб пряма $y=kx+b$ *була похилою асимптотою до графіка функції* $y=f(x)$ *при* $x\to\infty(x\to-\infty)$, *необхідно і достатньо, щоб виконувались рівності*:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}, \tag{6.44}$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-kx\big). \tag{6.45}$$

§-12. Дослідження функцій та побудова їх графіків

Загальна схема дослідження функцій:

1. Знаходимо область визначення функції.
2. Знаходимо точки перетину з осями координат.
3. Досліджуємо функцію на парність.
4. Досліджуємо функцію на періодичність; у випадку періодичності знаходимо найменший додатний період.
5. Знаходимо проміжки монотонності функції.
6. Знаходимо точки екстремуму, максимуми та мінімуми функції.
7. Знаходимо проміжки опуклості і вгнутості.
8. Знаходимо точки перегину.
9. Знаходимо асимптоти.
10. Всі одержані дані заносимо до таблиці і будуємо графік функції.

<u>Приклад.</u> Дослідити функцію та побудувати її графік:

$$y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}.$$

1. $D(f)=(-\infty,1)\cup(1,\infty)$.
2. Нулі функції (точки перетину з віссю Ox) визначаємо із системи:

$$\begin{cases} y=f(x), \\ y=0. \end{cases}$$

Отримаємо рівняння:

$$\frac{2x-1}{(x-1)^2}=0.$$

Звідси: $2x-1=0$. Дістанемо: $x_0=\frac{1}{2}$. Отже, $\left(\frac{1}{2},0\right)$ – точка перетину з віссю *Ox*.

Точку перетину з віссю *Oy* знайдемо з системи:

$$\begin{cases} y=f(x), \\ x=0. \end{cases}$$

Отримаємо: $y_0=f(0)=\frac{2\cdot 0-1}{(0-1)^2}=-1$. Звідси: $(0,–1)$ – точка перетину з віссю *Oy*.

3. Знайдемо $f(-x)=\frac{2(-x)-1}{(-x-1)^2}=-\frac{2x+1}{(x+1)^2}$ – функція ні парна, ні непарна.

4. Функція неперіодична.

5. Знайдемо похідну:

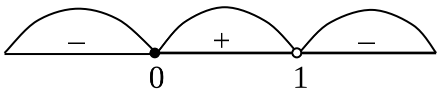
$$y'=\frac{(2x-1)'\cdot(x-1)^2-(2x-1)\cdot\left((x-1)^2\right)'}{(x-1)^4}=\frac{2\cdot(x-1)^2-(2x-1)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{2(x-1)(x-1-2x+1)}{(x-1)^4}=$$
$$=\frac{2\cdot(-x)}{(x-1)^3}=-\frac{2x}{(x-1)^3}.$$

Прирівняємо похідну до нуля:

$$-\frac{2x}{(x-1)^3}=0.$$

Знаходимо критичні точки: $x_1=0, x_2=1$.

Скористаємось методом інтервалів (мал. 68):



мал. 68

Отримаємо: $f(x)\nearrow(0,1)$, $f(x)\searrow(-\infty,0)\cup(1,\infty)$.

6. Як видно з мал.68, $x_{min}=0$ – точка мінімуму. Тоді мінімум функції: $y_{min}=f(x_{min})=f(0)=-1$. Максимуму функція не має.

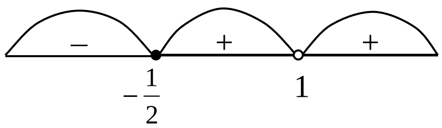
7. Знайдемо другу похідну:

$$y''=\left(-\frac{2x}{(x-1)^3}\right)'=-\frac{(2x)'\cdot(x-1)^3-2x\cdot\left((x-1)^3\right)'}{(x-1)^6}=-\frac{2\cdot(x-1)^3-2x\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6}=$$
$$=-\frac{2\cdot(x-1)^2(x-1-3x)}{(x-1)^6}=-\frac{2(-2x-1)}{(x-1)^4}=\frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}.$$

Прирівняємо другу похідну до нуля:

$$\frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}=0.$$

Отримаємо точку: $x = -\dfrac{1}{2}$.



мал. 69

З мал. 69 слідує, що функція опукла на проміжку $(-\dfrac{1}{2},1) \cup (1,\infty)$, вгнута на проміжку $(-\dfrac{1}{2},1)$.

8. $x = -\dfrac{1}{2}$ — точка перегину. В цій точці функція набуває значення:

$$y = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-1}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2} = \frac{-2}{\frac{9}{4}} = -\frac{8}{9}.$$

9. Так як $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-1}{(x-1)^2} = \infty$,то $x = 1$ – вертикальна асимптота.

Знайдемо похилу асимптоту $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x(x-1)^2} = 0.$$

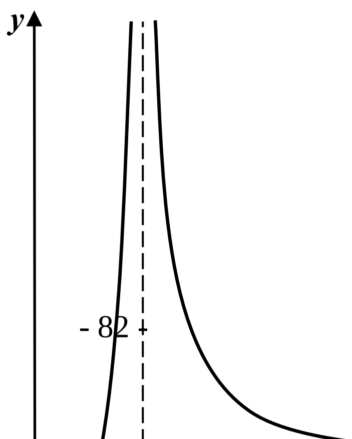
$$b = \lim_{x\to\infty}\bigl(f(x) - kx\bigr) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0.$$

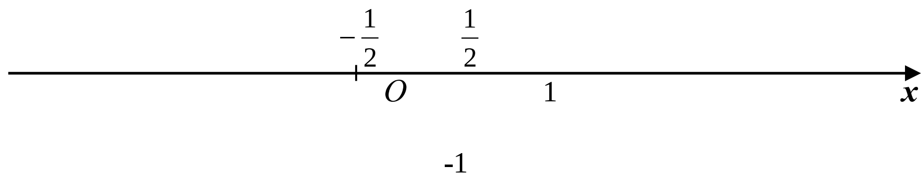
Отже, $y = 0$ – похила асимптота.

10. Складаємо таблицю:

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},0\right)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
$f'(x)$	–	–	–	0	+	∞	–
$f''(x)$	–	0	+	+	+	∞	+
$f(x)$	$\searrow \frown$	$-\frac{8}{9}$ перегин	$\searrow \smile$	-1 min	$\nearrow \smile$	∞	$\searrow \smile$

Користуючись цією таблицею, отримаємо такий графік функції (мал. 70):





мал. 70

Розділ 7

Невизначений інтеграл

§-1. Первісна і невизначений інтеграл

Нехай функція $f(x)$ визначена на деякому проміжку (a,b).

<u>*Означення.*</u> Функція $F(x)$ називається *первісною для функції* $f(x)$ *на проміжку* (a,b), якщо на цьому проміжку виконується рівність:

$$F'(x) = f(x). \tag{7.1}$$

Наприклад, функція $F(x) = 2\sin x + x - 4$ є первісною для функції $f(x) = 2\cos x + 1$. А для функції $f(x) = 2\sin x + x - 4$ первісною є функція $F(x) = -2\cos x + \frac{x^2}{2} - 4x + 5$.

<u>Теорема</u>

Якщо $F(x)$ *– одна із первісних функції* $f(x)$, *то множина всіх первісних функції* $f(x)$ *співпадає з множиною функцій виду*:

$$F(x) + C,\ \text{де}\ C = const.$$

<u>Доведення.</u> Маємо: $F'(x) = f(x)$. Так як

$\left(F(x) + C\right)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$, то кожна функція $F(x) + C$ є первісною функції $f(x)$.

Покажемо, що кожну первісну функції $f(x)$ можна подати у вигляді: $F(x) + C$.

Нехай $\Phi(x)$ – довільна первісна функції $f(x)$, тоді $\Phi'(x) = f(x)$. Розглянемо функцію $g(x) = \Phi(x) - F(x)$. Для цієї функції матимемо: $g'(x) = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. За необхідною і достатньою умовою сталості функції дістанемо, що: $g(x) = C = const$. Звідки: $\Phi(x) - F(x) = C$. Тоді $\Phi(x) = F(x) + C$.

<u>*Теорему доведено*</u>

<u>*Означення.*</u> Множина всіх первісних функції $f(x)$ називається *невизначеним інтегралом*.

Невизначений інтеграл функції $f(x)$ позначається: $\int f(x)dx$, де добуток $f(x)dx$ називається *підінтегральним виразом*, а $f(x)$ – *підінтегральною функцією*.

Якщо $F(x)$ – одна із первісних функції $f(x)$, то за доведеною теоремою матимемо:

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \tag{7.2}$$

З рівностей (7.1) і (7.2) слідує, що:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \tag{7.3}$$

тобто, *операція інтегрування є оберненою до операції диференціювання*.

Таблиця інтегралів

$f(x)$	0	1	x	x^2	x^n	$\sqrt{x}$	$\sqrt[n]{x}$
$\int f(x)dx$	C	$x+C$	$\frac{x^2}{2}+C$	$\frac{x^3}{3}+C$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	$\frac{2\sqrt{x^3}}{3}+C$	$\frac{n\sqrt[n]{x^{n+1}}}{n+1}+C$
$f(x)$	$\frac{1}{x}$	e^x	a^x	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
$\int f(x)dx$	$\ln\lvert x\rvert+C$	e^x+C	$\frac{a^x}{\ln a}+C$	$-\cos x+C$	$\sin x+C$	$tgx+C$	$-ctgx+C$

$f(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\frac{1}{x^2-1}$
$\int f(x)dx$	$arctgx+C$	$\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$	$\arcsin x+C$	$\arcsin\frac{x}{a}+C$	$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{x-1}{x+1}\right\rvert+C$
$f(x)$	$\frac{1}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$
$\int f(x)dx$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$	$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$	$\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert+C$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert+C$

$f(x)$	$\frac{x}{a^2\pm x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{a^2\pm x^2}}$	$\sqrt{a^2-x^2}$	$\sqrt{x^2\pm a^2}$
$\int f(x)dx$	$\pm\frac{1}{2}\ln\lvert a^2\pm x^2\rvert+C$	$\pm\sqrt{a^2\pm x^2}+C$	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\rvert+C$

§-2.Властивості невизначеного інтеграла. Заміна змінної у невизначеному інтегралі

1) $\int C\cdot f(x)dx = C\cdot\int f(x)dx$ (7.4)

– сталий множник можна виносити за знак інтеграла.

2) $\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ (7.5)

– інтеграл суми (різниці)дорівнює сумі (різниці) інтегралів.

3) *Якщо* $\int f(x)dx = F(x)+C$, *то* $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C$. (7.6)

Доведення. За означенням: $F'(x) = f(x)$. Тоді:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)+C\right)' = \frac{1}{k}F'(kx+b) = \frac{1}{k}f(kx+b)\cdot k = f(kx+b).$$

Приклад. Знайти інтеграли:

1) $\int 3x^2dx$,

2) $\int\left(3\sqrt{x}-3^x\right)dx$,

3) $\int\cos(4x-1)\,dx$.

1) $\int 3x^2dx = 3\int x^2dx = 3\cdot\frac{x^3}{3}+C = x^3+C$,

2) $\int\left(3\sqrt{x}-3^x\right)dx = \int 3\sqrt{x}\,dx - \int 3^x\,dx = 3\cdot\frac{2\sqrt{x^3}}{3}-\frac{3^x}{\ln 3}+C = 2\sqrt{x^3}-\frac{3^x}{\ln 3}+C$,

3) $\int\cos(4x-1)\,dx = \frac{1}{4}\sin(4x-1)+C$.

Теорема (*заміна змінної у невизначеному інтегралі*)

Якщо функція $f(x)$ *неперервна, а функція* $\varphi(x)$ *неперервна разом із своєю похідною, то виконується рівність*:

$$\int f\left(\varphi(x)\right)\cdot\varphi'(x)dx = \int f(t)dt \qquad (7.7)$$

Рівність (7.7) називається *заміною змінної* або *методом підстановки*.

Доведення. Нехай $\int f(t)dt = F(t)+C$. Тоді: $F'(t) = f(t)$. Звідси:

$\left(F(\varphi(x))\right)' = f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$. Отже, функція $F(\varphi(x))$ є первісною для функції $f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$.
Ввівши заміну: $\varphi(x)=t$, отримаємо:

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x))+C = F(t)+C = \int f(t)dt.$$

Теорему доведено

Приклад. Знайти інтеграл: $\int \sin^2 x \cos x\, dx$.

Поклавши: $t = \sin x, dt = \cos x\, dx$, з формули (7.7) отримаємо:

$$\int \sin^2 x \cos x\, dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

§-3. Інтегрування частинами у невизначеному інтегралі

Нехай функція $f(x)$ має похідну $f'(x)$. Тоді з рівності (7.2) одержимо:

$$\int f'(x)dx = f(x) + C. \tag{7.8}$$

Розглянемо диференційовні функції $U(x)$ та $V(x)$. Матимемо:

$$\left(U(x)\cdot V(x)\right)' = U'(x)\cdot V(x) + U(x)\cdot V'(x).$$

Проінтегруємо обидві частини цієї рівності:

$$\int \left(U(x)\cdot V(x)\right)' dx = \int U'(x)\cdot V(x)\, dx + \int U(x)\cdot V'(x)\, dx.$$

З рівності (7.8) отримаємо:

$$U(x)\cdot V(x) = \int U'(x)\cdot V(x)\, dx + \int U(x)\cdot V'(x)\, dx.$$

Звідси:
$$\int U(x)\cdot V'(x)\, dx = U(x)\cdot V(x) - \int V(x)\ \cdot U'(x)dx. \tag{7.9}$$

Рівність (7.9) називається *інтегруванням частинами*.

Врахувавши, що $dV = V'(x)dx, dU = U'(x)dx$, рівність (7.8) можна спрощено записати у вигляді:

$$\int U\, dV = U\cdot V - \int V dU. \tag{7.10}$$

Приклад. Знайти інтеграл: $\int x \cos x\, dx$.

Поклавши: $U = x, dV = \cos x\, dx$, отримаємо: $dU = dx, V = \sin x$. Звідси за формулою (7.10) одержимо:

$$\int x\cos x\, dx = x\sin x - \int \sin x\, dx = x\sin x + \cos x + C.$$

§-4. Інтегрування простих раціональних дробів

Означення. Простими раціональними дробами називаються функції виду:

I. $\dfrac{B}{x-a}$,

II. $\dfrac{B}{(x-a)^k}, k \ge 2$,

III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$,

IV. $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}, k \ge 2$,

причому для дробів 3-го і 4-го квадратний тричлен x^2+px+q не має дійсних коренів, тобто його дискримінант $p^2-4q<0$.

Проінтегруємо раціональні дроби I.–IV.

I. Введемо заміну: $t=x-a, dt=dx$. Одержимо:

$$\int \frac{B}{x-a}dx = B\int \frac{dt}{t} = B\ln|t| + C = B\ln|x-a| + C. \tag{7.11}$$

II. $$\int \frac{B}{(x-a)^k}dx = B\int \frac{dt}{t^k} = B\int t^{-k}dt = B\frac{t^{-k+1}}{-k+1}+C = \frac{B}{1-k}t^{1-k}+C = \frac{B}{1-k}(x-a)^{1-k}+C. \tag{7.12}$$

III. $x^2+px+q = x^2+2\cdot x\cdot \dfrac{p}{2}+\dfrac{p^2}{4}+q-\dfrac{p^2}{4} = \left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+\dfrac{4q-p^2}{4}$.

Оскільки $p^2-4q<0$, то $\dfrac{4q-p^2}{4}<0$ і тому можна позначити: $\dfrac{4q-p^2}{4}=a^2$. Тоді, зробивши заміну: $t=x+\dfrac{p}{2}$ отримаємо:

$$dt=dx,\ x^2+px+q=t^2+a^2,\ x=t-\frac{p}{2},$$

$$Mx+N = M\cdot\left(t-\frac{p}{2}\right)+N = Mt+N-\frac{Mp}{2} = Mt+\frac{2N-Mp}{2}.$$ Звідси:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Mt+\frac{2N-Mp}{2}}{t^2+a^2}dt = M\int \frac{t}{t^2+a^2}dt + \frac{2N-Mp}{2}\int \frac{dt}{t^2+a^2}.$$

В першому інтегралі зробимо заміну: $z=t^2+a^2$. Тоді:

$$dz=2t\,dt, t\,dt=\frac{1}{2}dz.$$ Звідси:

$$M\int \frac{t}{t^2+a^2}dt = \frac{M}{2}\int\frac{dz}{z} = \frac{M}{2}\ln|z|+C_1 = \frac{M}{2}\ln\left(t^2+a^2\right)+C_1 = \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+C_1.$$

Другий інтеграл в цій рівності є табличним:

$$\frac{2N-Mp}{2}\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{2N-Mp}{2}\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}+C_2=\frac{2N-Mp}{2}\frac{2}{\sqrt{4x-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4x-p^2}}+C_2=$$

$$=\frac{2N-Mp}{\sqrt{4x-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4x-p^2}}+C_2 .$$

Остаточно одержимо:

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4x-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4x-p^2}}+C. \qquad (7.13)$$

<u>Приклад.</u> Знайти інтеграл: $\int\frac{2x+1}{x^2+4x+5}dx$.

$$\int\frac{2x+1}{x^2+4x+5}dx=\int\frac{(2x+4)-3}{x^2+4x+5}dx=\int\frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx-3\int\frac{dx}{x^2+4x+5}=$$

$$=\int\frac{d\left(x^2+4x+5\right)}{x^2+4x+5}-3\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1}=\ln\left(x^2+4x+5\right)-3arctg(x+2)+C .$$

IV. $$\int\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx=\int\frac{Mt+\frac{2N-Mp}{2}}{\left(t^2+a^2\right)^k}dt=\int\frac{Mt}{\left(t^2+a^2\right)^k}dt+\frac{2N-Mp}{2}\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k} .$$

В першому інтегралі зробимо заміну: $z=t^2+a^2$. Тоді: $dz=2t\,dt, t\,dt=\frac{1}{2}dz$.

Звідси:

$$M\int\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^k}dt=\frac{M}{2}\int\frac{dz}{z^k}=\frac{M}{2}\int z^{-k}dz=\frac{M}{2}\frac{z^{1-k}}{1-k}+C_1=\frac{M}{2(1-k)}\left(x^2+px+q\right)^{1-k}+C_1 .$$

Другий інтеграл в цій рівності знаходиться за рекурентною формулою:

$$I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}\cdot I_n,\quad \text{де } I_n=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} . \qquad (7.14)$$

<u>Приклад.</u> Знайти інтеграл: $\int\frac{3x+4}{\left(x^2+4x+5\right)^2}dx$.

$$\int\frac{3x+4}{\left(x^2+2x+5\right)^2}dx=\frac{3}{2}\int\frac{(2x+2)+\frac{2}{3}}{\left(x^2+2x+5\right)^2}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x+2}{\left(x^2+2x+5\right)^2}dx+\int\frac{dx}{\left(x^2+2x+5\right)^2}=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{d\left(x^2+2x+5\right)}{\left(x^2+2x+5\right)^2}+\int\frac{dx}{\left((x+1)^2+4\right)^2}=-\frac{3}{2\left(x^2+2x+5\right)}+C_1+\int\frac{dx}{\left((x+1)^2+4\right)^2} .$$

Другий інтеграл знайдемо за формулою (7.14), в якій: $n=1, a^2=4$.

$$\int \frac{dx}{\left((x+1)^2+4\right)^2} = \frac{1}{2\cdot 1\cdot 4}\frac{x+1}{(x+1)^2+4} + \frac{2\cdot 1-1}{2\cdot 1\cdot 4}\int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{x+1}{8\left(x^2+2x+5\right)} +$$

$$+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2} + C_2 = \frac{x+1}{8\left(x^2+2x+5\right)} + \frac{1}{16}arctg\frac{x+1}{2} + C_2 .$$

Остаточно одержимо:

$$\int \frac{3x+4}{\left(x^2+4x+5\right)^2}dx = -\frac{3}{2\left(x^2+2x+5\right)} + \frac{x+1}{8\left(x^2+2x+5\right)} + \frac{1}{16}arctg\frac{x+1}{2} + C .$$

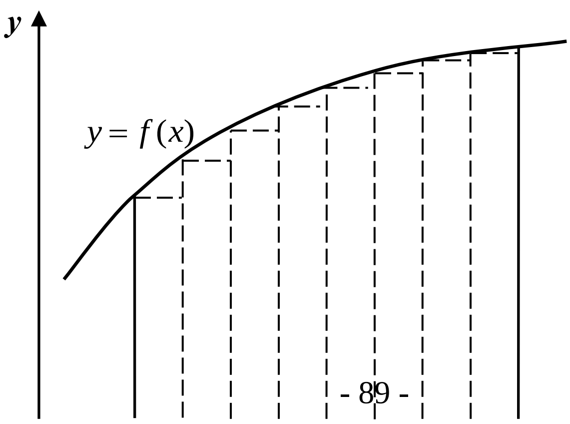
Розділ 8

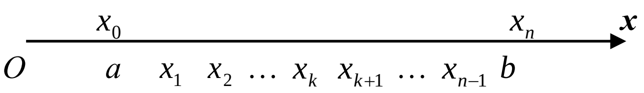
Визначений інтеграл

§-1. Визначений інтеграл як границя інтегральних сум

Нехай на деякому проміжку $[a,b]$ задана неперервна функція $y = f(x)$.

<u>*Означення.*</u> *Криволінійною трапецією* називається фігура, яка обмежена лініями: $y = f(x), y = 0, x = a, x = b$ (мал. 71).





мал. 71

Виберемо на сегменті $[a,b]$ множину точок:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = b. \qquad (8.1)$$

Прямими $x = a, x = x_1, x = x_2, \ldots, x = x_k, x = x_{k+1}, \ldots, x = x_{n-1}, x = b$ криволінійна трапеція розбивається на n менших частинок. Кожну із таких частинок можна замінити прямокутником. Якщо покласти: $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k, k = \overline{0, n-1}$, то отримаємо, що площа кожного такого прямокутника дорівнює: $f(x_k) \cdot \Delta x_k$. Для суми площ усіх прямокутників одержимо вираз:

$$f(x_0) \cdot \Delta x_0 + f(x_1) \cdot \Delta x_1 + \ldots + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \cdot \Delta x_k. \qquad (8.2)$$

Суму (8.2) можна вважати наближеним значенням площі криволінійної трапеції. Очевидно, коли поділ (8.1) буде досить дрібним, сума (8.2) мало відрізнятиметься від площі криволінійної трапеції.

Нехай на проміжку $[a,b]$ визначена довільна функція $f(x)$. Вибір точок (8.1) називається *Т-розбиттям сегмента* $[a,b]$. Тобто:

$$T : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Покладемо: $\lambda(T) = \max \Delta x_k$ – *діаметр розбиття.*

На кожному із проміжків: $[x_k, x_{k+1}]$ виберемо довільним способом деяку точку ξ_k.

<u>*Означення.*</u> Сума

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \cdot \Delta x_k \qquad (8.3)$$

називається *інтегральною сумою функції* $f(x)$, яка відповідає даному *Т*-розбиттю сегмента $[a,b]$ і вибору точок ξ_k.

Сума σ залежить від функції, розбиття і вибору точок ξ_k, тобто: $\sigma = \sigma(f, T, \xi_k)$. Суми виду (8.3) називаються *інтегральними сумами Рімана*.

<u>*Означення.*</u> Число I називається границею інтегральних сум (8.3), якщо: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: яке б не брали *Т*-розбиття і як би не вибирали точки ξ_k, як тільки

$$\lambda(T) < \delta, \text{ то } |\sigma - I| < \varepsilon.$$

Якщо число I є границею інтегральних сум (8.3), то цей факт записують так:

$$I = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\cdot \Delta x_k \ . \qquad (8.4)$$

<u>*Означення.*</u> Якщо існує границя інтегральних сум (8.3), то функція $f(x)$ називається *інтегровною на сегменті* $[a,b]$, а значення I границі інтегральних сум називається *визначеним інтегралом* і позначається: $\int_a^b f(x)dx$.

Отже, *визначений інтеграл є границя інтегральних сум*:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\cdot \Delta x_k \ . \qquad (8.5)$$

§-2. Властивості визначених інтегралів. Формула Ньютона-Лейбніца

1) $\int_a^b C\cdot f(x)dx = C\int_a^b f(x)dx,$ (8.6)

2) $\int_a^b \big(f(x)\pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx,$ (8.7)

3) $\int_a^a f(x)dx = 0,$ (8.8)

4) $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx,$ (8.9)

5) Якщо $a<c<b$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$ (8.10)

6) Якщо $f(x)\ge 0$, то $\int_a^b f(x)dx \ge 0,$

7) Якщо $f(x)>0$, то $\int_a^b f(x)dx > 0,$

8) Якщо на сегменті $[a,b]$ виконується нерівність: $f(x)\le g(x)$, то:

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx .$$

<u>**Теорема**</u>

Якщо функція $f(x)$ є неперервною на сегменті $[a,b]$ і $F(x)$ – одна із первісних функції $f(x)$, то має місце рівність:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{8.11}$$

– ***формула Ньютона-Лейбніца***.

Формула Ньютона-Лейбніца можна записати у вигляді:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b . \tag{8.12}$$

Приклад. Обчислити інтеграли:

1) $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$,

2) $\int_1^4 \left(4x + 3\sqrt{x}\right)dx$,

3) $\int_{-2}^{3} |x|\,dx$.

1) Однією з первісних функції $f(x) = \sin x$ є $F(x) = -\cos x$. Тоді за формулою Ньютона-Лейбніца отримаємо:

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2 .$$

2) $\int_1^4 \left(4x + 3\sqrt{x}\right)dx = 4\int_1^4 x\,dx + 3\int_1^4 \sqrt{x}\,dx = 4\frac{x^2}{2}\Big|_1^4 + 3\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\Big|_1^4 = 4\frac{x^2}{2}\Big|_1^4 + 3\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\Big|_1^4 = 2x^2\Big|_1^4 + 2\sqrt{x^3}\Big|_1^4 =$

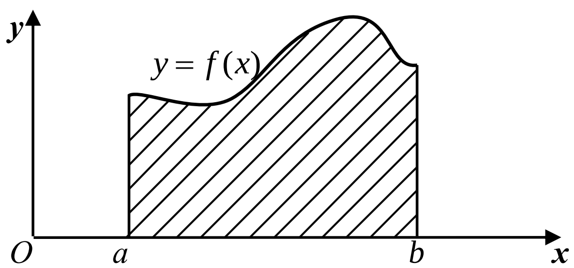
$= 2\cdot(16-1) + 2\cdot\left(\sqrt{64} - 1\right) = 30 + 14 = 44$,

3) $\int_{-2}^{3} |x|\,dx = \int_{-2}^{0} (-x)\,dx + \int_0^3 x\,dx = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^3 = \frac{4}{2} + \frac{9}{2} = \frac{13}{2} = 6{,}5$.

§-3. Застосування визначеного інтегралу

1. Площа криволінійної трапеції.

Нехай маємо криволінійну трапецію, обмежену лініями: $y = f(x), y = 0, x = a, x = b$ (мал. 72).

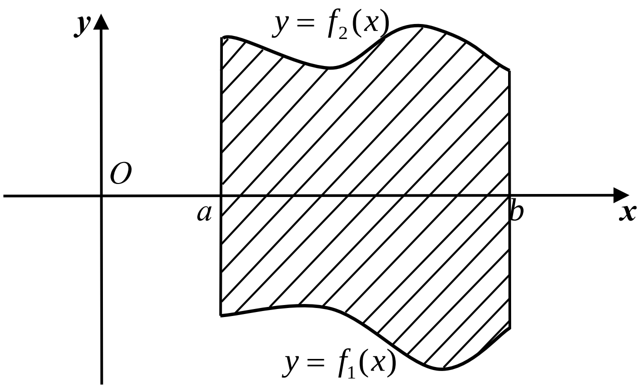


мал. 72

Площа криволінійної трапеції обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{8.13}$$

Нехай фігура обмежена прямими $x = a, x = b$, знизу графіком функції $y = f_1(x)$, а зверху графіком функції $y = f_2(x)$ (мал. 73).

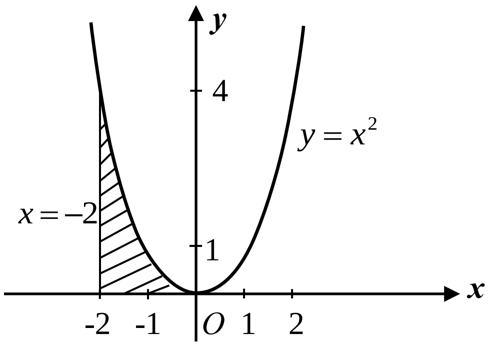


мал. 73

Площа такої фігури обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx. \tag{8.14}$$

<u>Приклад.</u> Обчислити площу фігури, обмеженої лініями: $y = x^2, y = 0, x = -2$ (мал. 74).



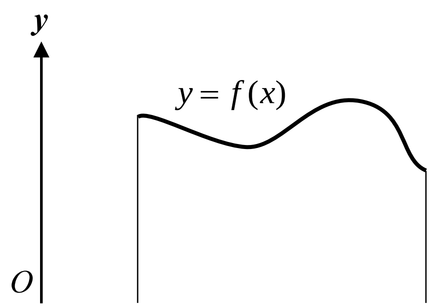
мал. 74

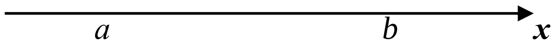
За формулою (8.13) отримаємо:

$$S = \int_{-2}^{0} x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-2}^{0} = 0 + \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} \text{ (кв.од.)}$$

2. Довжина кривої.

Нехай маємо неперервну криву, задану рівнянням: $y = f(x)$, де $x \in [a, b]$ (мал. 75).





мал. 75

Довжина цієї кривої обчислюється за формулою:

$$l=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx. \tag{8.15}$$

<u>Приклад.</u> Обчислити довжину кривої, заданої рівнянням:

$$y=\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2}, 1\le x\le e.$$

Знайдемо $f'(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}$. Тоді за формулою (8.15):

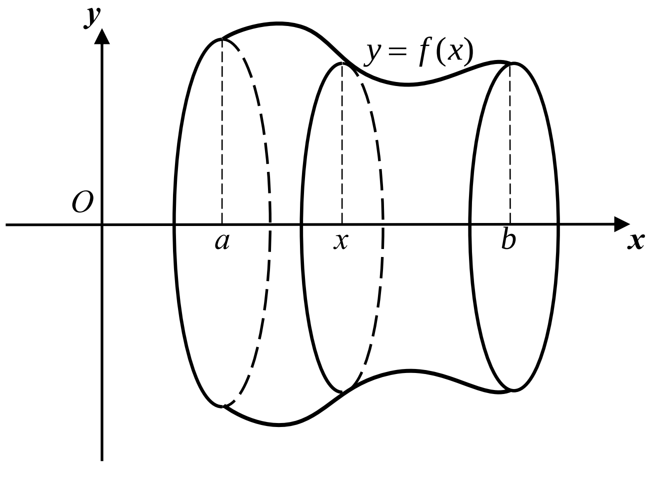
$$l=\int_1^e \sqrt{1+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx=\int_1^e \sqrt{1+\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}}\,dx=\int_1^e \sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}}\,dx=$$

$$=\int_1^e \sqrt{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx=\int_1^e \left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)dx=\frac{1}{2}\int_1^e \left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+\ln x\right)\Bigg|_1^e=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2}+\ln e-\frac{1}{2}-\ln 1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2}+1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(e^2+1\right) \text{ (од.)}$$

3. Обчислення об’єму тіла обертання.

Нехай функція $y=f(x)$ неперервна на сегменті $[a,b]$ і графік цієї функції не перетинає осі *Ox* на даному проміжку (мал. 76).

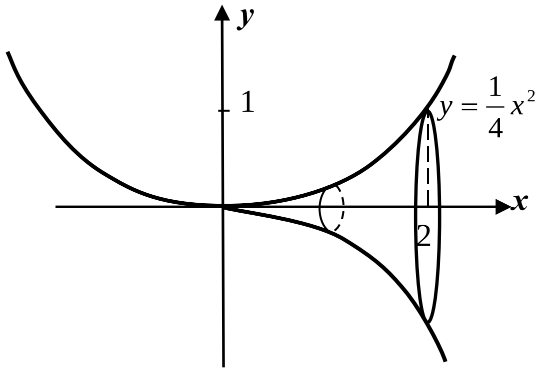


мал. 76

Об’єм тіла, обмеженого площинами $x=a, x=b$ і поверхнею, утвореною обертанням графіка функції $y=f(x)$ навколо осі *Ox*, обчислюється за формулою:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{8.16}$$

Приклад. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої параболою $y=\frac{1}{4}x^2$ і прямою $x=2$ (мал. 7).



мал. 77

За формулою (8.16) отримаємо:

$$V=\pi\int_0^2 \frac{1}{16}x^4dx=\frac{\pi}{16}\cdot\frac{x^5}{5}\bigg|_0^2=\frac{\pi}{80}\cdot 32=\frac{2\pi}{5} \text{ (куб.од.)}$$

Розділ 9

Диференціальні рівняння

§-1. Задачі, які приводять до диференціальних рівнянь

I. Задача про колонію бактерій.

Нехай маємо деяку колонію бактерій. Експериментально встановлено, що швидкість росту цієї колонії пропорційна наявній в даний момент часу кількості бактерій. Знайти закон розвитку колонії бактерій.

Позначимо $N(t)$ – кількість бактерій у момент часу *t*. Вважатимемо функцію $N(t)$ неперервною функцією часу. Нехай відомо, що в початковий момент часу $t = t_0$ кількість бактерій була $N(t_0) = N_0 = const$. За умовою: $N'(t) = kN(t)$.

Або, враховуючи рівність (6.38), одержимо:
$$\frac{dN}{dt} = k\,N(t), \tag{9.1}$$

де *k* – коефіцієнт пропорційності.

Співвідношення (9.1) являє собою рівність, в яку входить шукана функція $N(t)$ і похідна цієї функції $\frac{dN}{dt}$. Формула (9.1) називається *динамічною моделлю* росту колонії бактерій.

Розв'язавши це рівняння, знайдемо закон розвитку колонії бактерій. Функція $N = N(t)$, яка показує наявну кількість бактерій в момент часу *t*, називається *кінематичною моделлю* росту колонії бактерій.

II. Задача про рівнозмінний прямолінійний рух.

Тіло масою *m* рухається під дією сили *F* по прямій. Відомо, що в момент часу $t_0 = 0$ відстань від точки відліку до тіла була s_0, а швидкість тіла була υ_0. Написати закон руху точки.

Нехай закон руху точки задається рівнянням: $s = s(t)$. Тоді:
$$\upsilon = s'(t). \tag{9.2}$$

Звідси:
$$a = \upsilon'(t) = s''(t), \tag{9.3}$$

тобто:
$$s''(t) = a. \tag{9.4}$$

– *динамічна модель руху*.

З другого закону Ньютона слідує, що: $F = m \cdot a$. Звідси:
$$a = \frac{F}{m} = const. \tag{9.5}$$

З рівностей (9.4), (9.5) і з умови задачі одержимо:
$$s'(t) = at + \upsilon_0,$$

або:
$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + \upsilon_0 t + s_0. \tag{9.6}$$

– *кінематична модель руху*.

§-2. Поняття про диференціальне рівняння першого порядку і множину його розв'язків. Задача Коші

<u>*Означення.*</u> Скалярна нетотожна рівність, яка пов'язує заданою функціонально залежністю незалежну змінну *x*, залежну функцію *y* цієї незалежної змінної і її похідну y', де змінна y' обов'язково входить у цю рівність, називається *диференціальним рівнянням першого порядку*.

Диференціальне рівняння першого порядку записують у вигляді:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{9.7}$$

<u>*Означення.*</u> Диференціальне рівняння першого порядку виду:

$$y' = f(x, y) \tag{9.8}$$

називається *диференціальним рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної*.

Рівняння (9.8) можна також записати у вигляді:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{9.9}$$

<u>*Означення.*</u> *Розв'язком диференціального рівняння* (9.8) *на проміжку* (a, b) називається неперервно - диференційовна функція $y = y(x)$, яка, будучи підставлена в рівняння (9.8), перетворює його в тотожність на проміжку (a, b).

<u>*Означення.*</u> Розв'язок диференціального рівняння (9.8) виду:

$$y = \varphi(x, C), \tag{9.10}$$

де $C = const$, називається *загальним розв'язком* цього рівняння.

<u>*Означення.*</u> Довільний розв'язок диференціального рівняння (9.8), який отримується із загального при деякому конкретному значенні *C*, називається *частинним розв'язком* цього рівняння.

<u>*Означення.*</u> Розв'язок диференціального рівняння (9.8), який не можна отримати із загального розв'язку, називається *особливим розв'язком* цього рівняння.

<u>*Означення.*</u> Розв'язок диференціального рівняння (9.8) виду:

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{9.11}$$

де $C = const$, називається *загальним розв'язком у неявному вигляді*.

<u>*Означення.*</u> Розв'язок диференціального рівняння (9.8) виду:

$$\psi(x, y) = C \tag{9.12}$$

називається *загальним інтегралом* цього рівняння.

Нехай рівняння (9.8) має загальний розв'язок $y = \varphi(x, C)$. Надаючи сталій *C* різних значень, отримаємо нескінченну множину частинних розв'язків цього рівняння. Для того, щоб з цієї нескінченної множини виділити один розв'язок, необхідно задати додаткову умову.

Однією з таких умов для рівняння (9.8) є так звана *початкова умова* або *умова Коші*. Це означає, що з нескінченної множини розв'язків рівняння (9.8) потрібно знайти такий, який задовольняє умові:

$$y(x_0) = y_0\,, \tag{9.13}$$

де x_0, y_0 задані числа. Ці числа називаються *початковими даними* або *даними Коші*.

Задача:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{9.14}$$

називається *початковою задачею* або *задачею Коші*.

§-3. Найпростіші диференціальні рівняння першого порядку

I. Неповні диференціальні рівняння

а) Диференціальні рівняння виду:

$$y' = f(x). \tag{9.15}$$

Загальним розв'язком рівняння (9.15) є функція виду:

$$y = \int f(x)\,dx + C\,. \tag{9.16}$$

б) Диференціальні рівняння виду:

$$y' = f(y). \tag{9.17}$$

Запишемо рівняння (9.17) у вигляді:

$$\frac{dy}{dx} = f(y)\,, \qquad \text{або:} \qquad dx = \frac{dy}{f(y)}\,.$$

Вважаючи в цій рівності змінну y аргументом, а змінну x – функцією, отримаємо загальний розв'язок диференціального рівняння (9.17) у вигляді:

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + C\,. \tag{9.18}$$

II. Диференціальні рівняння з відокремленими змінними

Означення. Диференціальне рівняння виду:

$$a(x)dx + b(y)dy = 0\,. \tag{9.19}$$

де $a(x), b(y)$ – задані і неперервні функції, називається *рівнянням з відокремленими змінними*.

Загальний інтеграл диференціального рівняння має вигляд:

$$\int a(x)dx + \int b(y)dy = C\,. \tag{9.20}$$

III. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Означення. Диференціальне рівняння виду:

$$a_1(x)b_1(y)dx + a_2(x)b_2(y)dy = 0\,. \tag{9.21}$$

де $a_1(x), a_2(x), b_1(y), b_2(y)$ – задані і неперервні функції, називається *рівнянням з відокремлюваними змінними*.

Якщо $a_2(x)\cdot b_1(y)\neq 0$, то, поділивши почленно рівняння (9.21) на цей добуток, отримаємо:

$$\frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx+\frac{b_2(y)}{b_1(y)}dy=0\,. \qquad (9.22)$$

Рівняння (9.22) є диференціальним рівнянням з відокремленими змінними. Загальний інтеграл цього рівняння, а отже, й рівняння (9.21), за формулою (9.20) має вигляд:

$$\int\frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx+\int\frac{b_2(y)}{b_1(y)}dy=C\,. \qquad (9.23)$$

Приклад. Розв'язати диференціальні рівняння:

1) $y'=tgx$,

2) $x^2+3y\,y'=0$,

3) $xydx+(x+1)dy=0$.

1) $y=\int tgx\,dx+C=\int\frac{\sin x dx}{\cos x}=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}+C=-\ln|\cos x|+C$,

2) Оскільки $y'=\frac{dy}{dx}$, то отримаємо:

$$x^2+3y\frac{dy}{dx}=0\,.$$

Домноживши на dx, дістанемо:

$x^2dx+3y\,dy=0$ – диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

Тоді: $\int x^2dx+\int 3y\,dy=C$,

$\frac{x^3}{3}+3\frac{y^2}{2}=C$ – загальний інтеграл.

$$3\frac{y^2}{2}=C-\frac{x^3}{3}\,,\quad y^2=\frac{6C-2x^3}{9}\,,$$

$y=\sqrt{\frac{6C-2x^3}{9}}$ – загальний розв'язок.

3) Поділимо обидві частини рівняння на добуток $(x+1)y\neq 0$:

$$\frac{x}{x+1}dx+\frac{dy}{y}=0$$

– диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\int\frac{x}{x+1}dx+\int\frac{dy}{y}=C\,,$$

$$\int\frac{(x+1)-1}{x+1}dx+\int\frac{dy}{y}=C\,,$$

$$\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx+\int\frac{dy}{y}=C\,,$$

$x-\ln(x+1)+\ln|y|=C$ – загальний інтеграл.

$$\ln|y|=\ln(x+1)-x+C\,,$$

$y=(x+1)e^{C-x}$ – загальний розв'язок.

§-4. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку

<u>*Означення.*</u> Скалярна нетотожна рівність, яка пов'язує заданою функціональною залежністю незалежну змінну *x*, залежну функцію *y* цієї незалежної змінної і її похідні y', y'', де змінна y'' обов'язково входить у цю рівність, називається *диференціальним рівнянням другого порядку*.

Диференціальне рівняння другого порядку записують у вигляді:

$$F(x,y,y',y'')=0. \tag{9.24}$$

<u>*Означення.*</u> Диференціальне рівняння другого порядку виду:

$$y''=f(x,y,y') \tag{9.25}$$

називається *диференціальним рівнянням другого порядку*, *розв'язаним відносно старшої похідної*.

<u>*Означення.*</u> Розв'язок диференціального рівняння (9.25) виду:

$$y=\varphi(x,C_1,C_2)\,, \tag{9.26}$$

де $C=const$, називається *загальним розв'язком* цього рівняння.

<u>*Означення.*</u> Довільний розв'язок диференціального рівняння (9.25), який містить одну або зовсім не містить довільних сталих, називається *частинним розв'язком* цього рівняння.

<u>*Означення.*</u> *Лінійним диференціальним рівнянням другого порядку* називається диференціальне рівняння виду:

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)\,, \tag{9.27}$$

де $p(x),q(x),f(x)$ – задані і неперервні функції.

Диференціальне рівняння (9.27), в якому $f(x)=0$, називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку*.

<u>*Означення.*</u> *Лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами* називається диференціальне рівняння виду:

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0, \tag{9.28}$$

де p, q – сталі числа.

<u>*Означення.*</u> *Характеристичним рівнянням* диференціального рівняння (9.28) називається рівняння:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \tag{9.29}$$

а його корені – *характеристичними коренями* цього рівняння.

Характеристичне рівняння (9.29) є квадратним рівнянням відносно змінної λ. Розглянемо різні можливі випадки відносно характеристичних коренів:

1. Рівняння (9.29) має два різні дійсні корені λ_1, λ_2.

В цьому випадку загальний розв'язок диференціального рівняння (9.28) має вигляд:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}. \tag{9.30}$$

2. Рівняння (9.29) має один дійсний корінь λ.

Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння (9.28) має вигляд:

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}. \tag{9.31}$$

3. Рівняння (9.29) має два різні комплексно – спряжені корені $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \lambda_2 = \alpha - \beta i$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння (9.28) матиме вигляд:

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right). \tag{9.32}$$

<u>Приклад.</u> Розв'язати диференціальні рівняння:

1) $y'' - 5y' + 4y = 0$,

2) $y'' + 6y' + 9y = 0$,

3) $y'' - 2y' + 5y = 0$.

1) Складемо характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0.$$

Рівняння має два різні дійсні корені: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$.

Тоді загальний розв'язок за формулою (9.30) має вигляд:

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x}.$$

2) Характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0,$$

або: $$(\lambda + 3)^2 = 0.$$

Рівняння має один дійсний корінь: $\lambda = -3$. Загальний розв'язок:

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}.$$

3) Характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0.$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16 < 0.$$

Тоді з формули (5.20) отримаємо два комплексно – спряжені корені:

$$\lambda_1 = \frac{2 + i\sqrt{16}}{2} = \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i, \quad \lambda_2 = \frac{2 - i\sqrt{16}}{2} = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i.$$

Загальний розв'язок за формулою (9.32) має вигляд:

$$y = e^x \left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x \right).$$

Список використаної літератури:

1. Кагадій Л.П., Павленко А.В., Чуднов К.У. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Ч. 1,2: Конспект лекцій. – Дніпропетровськ, НМетАУ. – 2004.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – Київ, "А.С.К.", 2005. – 648 с.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевников Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Наука, 2000, ч. 1,2.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Підручник в 2-х томах, т. І. – М.: Інтеграл – Прес, 2002. – 416 с.
5. Рудавський Ю.К., Костробій П.П. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. – Львів, 1999.
6. Соколенко О.І., Новик Г.А. Вища математика в прикладах і задачах. – К.: "Либідь", 2001 р.

Зміст:

Основи вищої математика [Текст]: конспект лекцій для здобувачів освіти освітньо-професійного ступеня фаховий молодший бакалавр галузь знань 19 Архітектура і будівництво спеціальності 192 Будівництво та цивільна інженерія освітньо-професійної програми: Опорядження будівель і споруд та будівельний дизайн галузь знань 24 Сфера обслуговування спеціальності 241 Готельно-ресторанна справа освітньо-професійної програми:Готельно-ресторанна справа денної форми навчання / уклад. В.С.Кулик., Т.П. Кузьмич, М.В. Баховська – Любешів: Любешівський технічний коледж Луцького НТУ, 2021 –105 с.

Комп'ютерний набір В.С. Кулик

Редактор: В.С. Кулик

Підр. до друку _________ 2021р. Формат А4. Папір офіс.

Гарн.Таймс. Умов.друк, арк. 3,5. Обл.вид.арк.3,4.

Тираж 15 прим. Зам.