



ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки до виконання контрольних робіт
для здобувачів освіти освітньо-професійного ступеня
фаховий молодший бакалавр
галузь знань 19 Архітектура і будівництво
спеціальності 192 Будівництво та цивільна інженерія
освітньо-професійної програми:
Будівництво та експлуатація будівель і споруд
галузь знань 20 Аграрні науки та продовольство
спеціальності 208 Агроінженерія
галузь знань 07 Управління та адміністрування
спеціальності 071 Облік і оподаткування
галузь знань 13 Механічна інженерія
спеціальності 133 Галузеве машинобудування
галузь знань 27 Транспорт
спеціальності 274 Автомобільний транспорт
денної форми навчання

УДК 51 (07)

К 88

До друку

Голова методичної ради ВСП «Любешівський ТФК
ЛНТУ» _____ Герасимик-Чернова Т.П.

(підпис)

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в
репозитарій коледжу

Бібліотекар _____ М.М. Демих

(підпис)

Рекомендовано до видання методичною радою ВСП

«Любешівський ТФК ЛНТУ»

протокол № _____ від _____ 2023 року

Розглянуто і схвалено на засіданні циклової методичної комісії
викладачів математичних та природничо-наукових дисциплін ВСП
«Любешівський ТФК ЛНТУ»,

протокол № _____ від _____ 2023 року

Голова циклової методичної комісії _____ Остимчук А.В.

(підпис)

Укладач: _____ Кулик В.С.,

_____ Баховська М.В.,

_____ Кузьмич Т.П.

Рецензент: _____

(підпис)

Відповідальний за випуск: _____ Т.П. Кузьмич, методист

Вища математика [Текст]: методичні вказівки до виконання
контрольних робіт для здобувачів освіти освітньо-професійного
ступеня фаховий молодший бакалавр галузь знань 19 Архітектура і
будівництво спеціальності 192 Будівництво та цивільна і інженерія
освітньо-професійної програми Будівництво та експлуатація
будівель і споруд галузь знань 20 Аграрні науки та продовольство
спеціальності 208 Агроінженерія галузь знань 07 Управління та
адміністрування спеціальності 071 Облік і оподаткування галузь
знань 27 Транспорт спеціальності 274 Автомобільний транспорт
галузь знань 13 Механічна інженерія спеціальності 133 Галузеве
машинобудування / уклад. В.С.Кулик. М.В. Баховська, Т.П. Кузьмич
– Любешів: ВСП «Любешівський ТФК ЛНТУ», 2023. – 67 с.

Методична робота містить методичні вказівки до виконання
контрольних робіт. Дане видання розроблене з метою перевірки та
контролю навчальних досягнень з дисципліни.

©Кулик В.С., Баховська М.В., Кузьмич Т.П., 2023

П е р е д м о в а

Тести призначені для оперативної перевірки поточної успішності, а також можуть використовуватися для організації контролю.

Тестові завдання мають закриту форму з вибором однієї правильної відповіді з декількох запропонованих. Кожне завдання позначено символом **ТЗ** з порядковим номером, а далі наведено варіанти відповідей, позначені символами А, Б, В, Г.

1 . В и з н а ч н и к и

Розглянемо квадратну матрицю n -го порядку:

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Означення. Детермінантом (визначником) матриці A n -го порядку називається алгебраїчна сума $n!$ доданків, кожен з яких є добутком n елементів цієї матриці, взятих по одному і тільки по одному з кожного рядка і кожного стовпця цієї матриці. Знак кожного такого добутку рівний $(-1)^l$, де l – кількість інверсій у перестановці других індексів, при умові, що перші індекси впорядковані:

$$\det A = \sum_{n!} (-1)^l a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot a_{3\alpha_3} \dots a_{(n-1)\alpha_{n-1}} a_{n\alpha_n}, \quad \text{де}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Формула для визначення детермінанта 2-го порядку має вигляд:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Отже, визначник 2-го порядку можна обчислювати за схемою:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix}.$$

Формула для визначення детермінанта 3-го порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Схема для обчислення визначника 3-го порядку має вигляд:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix}.$$

Для обчислення визначників вищого порядку застосовують теорему Лапласа про розклад визначника n -го порядку за елементами рядка або стовпчика. Визначники з числовими елементами, використовуючи їх властивості, перетворюють так, щоб обернулися на нуль всі, крім одного, елементи деякого рядка або стовпчика. Розкладаючи потім визначник за елементами цього рядка або стовпчика, зводимо задачу обчислення визначника n -го порядку до знаходження одного визначника $(n-1)$ -го порядку.

Приклад 1. Знайти визначники другого порядку:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 7 \cdot 2 = 1;$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab;$$

$$\text{в) } \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix} = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha = \sin(\alpha - \beta);$$

$$\text{г) } \begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix} = 1 - \log_b a \log_a b = 0.$$

Приклад 2. Знайти визначники третього порядку:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 3 + 5 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 4 - 5 \cdot 1 \cdot 3 = 40;$$

$$\text{б)} \begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix} = abc + x^3 + x^3 - bx^2 - ax^2 - cx^2 = 2x^3 - (a + b + c)x^2 + abc;$$

$$\text{в)} \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 1 \\ \sin \beta & \cos \beta & 1 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 1 \end{vmatrix} = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha - \sin \gamma \cos \beta - \\ - \sin \alpha \cos \gamma - \sin \beta \cos \alpha = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\beta - \gamma) + \sin(\gamma - \alpha).$$

Приклад 3. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -6 & -14 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -7 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -6 & -14 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & -7 & 2 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} -1 & -14 & 5 \\ 7 & -2 & 4 \\ 2 & -7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -14 & 5 \\ 0 & -100 & 39 \\ 0 & -35 & 12 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot (-1) \begin{vmatrix} -100 & 39 \\ -35 & 12 \end{vmatrix} = -165.$$

Для утворення нулів у рядку або стовпчику зручно мати ведучий (розв'язувальний) елемент, що дорівнює одиниці. Даний визначник такого елемента не має. Для його утворення можна, наприклад, помножити останній рядок визначника на -1 і додати до передостаннього, при цьому визначник не зміниться. У такий спосіб у третьому рядку утворилися три одиниці (достатньо мати одну). Для утворення нулів, наприклад у третьому рядку, можна взяти за розв'язувальний елемент одиницю, що стоїть на перетині першого стовпчика і третього рядка.

Помножимо елементи першого стовпчика спочатку на -1 і складемо з відповідними елементами другого стовпчика, тоді на місці елемента $(3, 2)$ утвориться нуль. Далі множимо всі елементи того ж першого стовпчика на -3 і складаємо з елементами третього стовпчика. На місці елемента $(3, 3)$ знову утворився нуль. У такий же спосіб, помноживши перший стовпчик на -1 і склавши з останнім, на місці елемента $(3, 4)$ також утвориться нуль. Слід зазначити, що для утворення нулів у рядку працюють з елементами стовпчиків, а для утворення нулів у стовпчиках — з елементами рядків.

Далі, використовуючи теорему Лапласа, розкладаємо визначник 4-го порядку за елементами третього рядка і одержуємо визначник третього порядку. Для його знаходження можна застосувати відповідне правило, але ми ще раз утворимо нулі.

Для одержання одиниці до елементів першого стовпчика додамо відповідні елементи третього стовпчика. На місці елемента (1, 1) утворилася – 1. Далі помножимо елементи першого рядка на 7 і складемо з відповідними елементами другого рядка, одержимо нуль на місці елемента (2, 1). Аналогічно, помноживши елементи першого рядка на 2 і склавши з елементами третього рядка, одержимо нуль на місці елемента (3, 1). Після застосування теореми Лапласа одержуємо визначник другого порядку і остаточний результат.

Шляхом безпосереднього обчислення можна довести такі властивості визначників:

1. Якщо транспонувати визначник буд-якого порядку, то він не зміниться.

2. Якщо елементи якого-небудь рядка або стовпчика визначника рівні нулю, то і визначник дорівнює нулю.

3. Якщо всі елементи якого-небудь рядка або стовпчика помножити на деяке число, то і весь визначник помножиться на це число.

4. Якщо поміняти місцями два рядки або стовпчики визначника, то він змінить знак.

5. Якщо два рядки або стовпчики визначника рівні між собою або пропорційні, то він дорівнює нулю.

6. Якщо кожен елемент деякого рядка або стовпчика визначника можна подати у вигляді суми двох доданків, то початковий визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких всі рядки, крім розглядуваного, такі як у початкового, при цьому розглядуваний рядок першого визначника складається з перших доданків, а в другому визначнику в розглядуваному рядку стоять другі доданки (те саме справджується і для стовпчиків).

7. Якщо до елементів одного з рядків визначника додати відповідні елементи іншого рядка, попередньо помножені на деяке число, то визначник при цьому не зміниться (те саме справджується і для стовпчиків).

Тестові завдання до теми:

«Визначники»

ТЗ 1.1. Що називається мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника Δ_n n -го порядку?

А. Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника Δ_n називається визначник $(n-1)$ -шого порядку, який утворюється з елементів вихідного визначника Δ_n , що залишаються після викреслювання j -го рядка та j -го стовпця.

Б. Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника Δ_n називається визначник $(n-1)$ -шого порядку, який утворюється з елементів вихідного визначника Δ_n , що залишаються після викреслювання i -го рядка та i -го стовпця.

В. Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника Δ_n називається визначник, який утворюється з елементів вихідного визначника Δ_n , якщо переставити місцями відповідні елементи i -го рядка та j -го стовпця.

Г. Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника Δ_n називається визначник $(n-1)$ -шого порядку, який утворюється з елементів вихідного визначника Δ_n , що залишаються після викреслювання i -го рядка та j -го стовпця, на перетині яких розташований елемент a_{ij} .

ТЗ 1.2. Що називається алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника Δ_n n -го порядку?

А. $A_{ij} = (-1)^{i-j} M_{ij}$.

Б. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

В. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ji}$.

Г. $A_{ij} = (-1)^{2+i} M_{ij}$.

ТЗ 1.3. Визначник другого порядку $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ дорівнює:

А. $a_{11}a_{21} + a_{22}a_{12}$. Б. $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. В. $a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}$.

Г. $a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}$.

ТЗ 1.4. Визначник третього порядку $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ дорівнює (через

A_{ij} позначено алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}):

А. $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{11} + a_{13}A_{11}$. Б. $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{21} + a_{13}A_{31}$.

В. $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$. Г. $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23}$.

ТЗ 1.5. Визначник третього порядку $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ дорівнює (через

A_{ij} позначено алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}):

А. $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$. Б. $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{33}$.

В. $a_{11}A_{31} + a_{21}A_{32} + a_{31}A_{33}$. Г. $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{12} + a_{31}A_{13}$.

ТЗ 1.6. Визначник четвертого порядку $\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$

дорівнює (через A_{ij} позначено алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}):

А. $a_{31}A_{11} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{44}$.

Б. $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{12} + a_{31}A_{13} + a_{41}A_{14}$.

В. $a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} + a_{34}A_{24}$.

Г. $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$.

ТЗ 1.7. Чому дорівнює визначник $\Delta = \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ ka_3 & kb_3 & kc_3 \end{vmatrix}$?

А. $k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$. Б. $k^2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$. В. $k^3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

Г. 0.

ТЗ 1.8. Встановити, який з наступних визначників є парним числом?

А. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$. Б. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

$$\text{В. } \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Г. } \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

ТЗ 1.9. Чому дорівнює визначник $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & ka_1 & c_1 \\ a_2 & ka_2 & c_2 \\ a_3 & ka_3 & c_3 \end{vmatrix}$?

А. k . Б. 0 . В. k^3 . Г. 1 .

ТЗ 1.10. Чому дорівнює сума добутків елементів деякого стовпця (рядка)

визначника $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ на алгебраїчні доповнення елементів

іншого паралельного стовпця (рядка): $a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + a_{i3}A_{k3}$, $k \neq i$
 $(a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + a_{3j}A_{3k}, k \neq j)$?

А. 1 . Б. 0 . В. Δ_3 . Г. $k\Delta_3$.

ТЗ 1.11. Встановити, який з наступних визначників ділиться на „3”?

А. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$

Б. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$

В. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$

Г. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$

ТЗ 1.12. Встановити, який з наступних визначників ділиться на „4”?

А. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}.$

Б. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$

В. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$

Г. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$

ТЗ 1.13. Встановити, який з наступних визначників ділиться на „10”?

$$A. \begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 30 & 4 \\ 0 & 10 & 7 \end{vmatrix}.$$

$$B. \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 30 & 3 \\ 0 & 10 & 7 \end{vmatrix}.$$

$$B. \begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 10 & 6 \\ 0 & 9 & 7 \end{vmatrix}.$$

$$Г. \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 10 & 6 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix}.$$

ТЗ 1.14. Встановити, які два визначника відрізняються лише знаком?

$$A. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} \text{ i } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix}. \quad B. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} \text{ i } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$B. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} \text{ i } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 4 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix}. \quad Г. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} \text{ i } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix}.$$

ТЗ 1.15. Встановити, сумою яких двох визначників є визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix}?$$

$$A. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} \text{ i } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix}. \quad B. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} \text{ i } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

$$B. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} \text{ i } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix}. \quad Г. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} \text{ i } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

ТЗ 1.16. Встановити, які визначники рівні між собою?

$$A. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \text{ i } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}. \quad B. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \text{ i } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$\text{В. } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} \text{ i } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} . \quad \text{Г. } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \text{ i } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} .$$

ТЗ 1.17. Встановити, які визначники рівні між собою?

$$\text{А. } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} \text{ i } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} . \quad \text{Б. } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} \text{ i } \begin{vmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} .$$

$$\text{В. } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \text{ i } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} . \quad \text{Г. } \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \text{ i } \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} .$$

ТЗ 1.18. Встановити, який з наступних визначників дорівнює визначнику

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 7 & -5 \end{vmatrix} ?$$

$$\text{А. } \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} . \quad \text{Б. } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} .$$

$$\text{В. } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} . \quad \text{Г. } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} .$$

ТЗ 1.19. Встановити, який з наступних визначників дорівнює „0”?

$$\text{А. } \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} . \quad \text{Б. } \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \end{vmatrix} .$$

$$\text{В. } \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} . \quad \text{Г. } \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} .$$

ТЗ 1.20. Для якого визначника алгебраїчне доповнення A_{31} дорівнює числу „-12”?

$$\text{A. } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} . \text{ Б. } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} . \text{ В. } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} . \text{ Г. } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} .$$

ТЗ 1.21. Для якого визначника мінор A_{21} дорівнює „+9”?

$$\text{A. } \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & 5 \\ 6 & 1 & -3 \end{vmatrix} . \quad \text{Б. } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 4 \end{vmatrix} .$$

$$\text{В. } \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \end{vmatrix} . \quad \text{Г. } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} .$$

ТЗ 1.22. Для якого визначника алгебраїчне доповнення A_{42} дорівнює числу „0”?

$$\text{A. } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ -1 & 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} . \quad \text{Б. } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} .$$

$$\text{В. } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} . \quad \text{Г. } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} .$$

ТЗ 1.23. Який з визначників має діагональну структуру?

$$\text{A. } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} . \text{ Б. } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} . \text{ В. } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} . \text{ Г. } \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} .$$

ТЗ 1.24. Який з визначників має трикутну структуру?

$$\text{A. } \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} . \text{ Б. } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} . \text{ В. } \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} . \text{ Г. } \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} .$$

ТЗ 1.25. Який з визначників дорівнює добутку діагональних елементів

$$a_1 b_2 c_3 ?$$

$$A. \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$$Б. \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$$B. \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$$Г. \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

ТЗ 1.26. Який з визначників дорівнює числу „30”?

$$A. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}. \quad Б. \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}. \quad B. \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \end{vmatrix}. \quad Г. \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

ТЗ 1.27. Який з визначників дорівнює числу „18”?

$$A. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}. \quad Б. \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$B. \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \end{vmatrix}. \quad Г. \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \end{vmatrix}.$$

2. Матриці та дії над ними

Нагадаємо, що матриця, на відміну від визначника, — це таблиця чисел певного розміру. При множенні її на число треба помножити на це число кожен елемент матриці. Додавати можна тільки матриці однакового розміру, їх сумою є матриця, елементи якої є сумами відповідних елементів матриць, що додаються.

Дія множення означена тільки для таких двох матриць, які мають такі розміри: перша $m \times p$, друга $p \times n$. В результаті одержується матриця розміром $m \times n$, елементи якої дорівнюють алгебраїчній сумі добутків

елементів рядків першої матриці на відповідні елементи стовпчиків другої матриці за формулою:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ip} b_{pj}.$$

Зрозуміло, що в загальному випадку дія множення матриць некомутативна, тобто $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Приклад 1. Нехай $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Знайти $A + B$, $3A$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad 3A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -6 & 15 \\ 0 & 12 & 3 & -12 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Нехай $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Знайти $A \times B$.

$$A \times B = \begin{pmatrix} 10 & 8 & -17 \\ -12 & 5 & 18 \end{pmatrix}.$$

Обернену матрицю A^{-1} має тільки квадратна невинроджена матриця A ($\det A \neq 0$), для якої виконується рівність: $A^{-1}A = A \cdot A^{-1} = E$.

Для знаходження оберненої матриці до матриці A складають матрицю виду: $(A | E)$, де E – одинична матриця того ж порядку, що й A . Утворену матрицю за допомогою елементарних перетворень зводять до вигляду: $(E | B)$. Тоді покладають: $A^{-1} = B$.

Приклад 3. Знайти обернену матрицю до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Складаємо матрицю:

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} (1) & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\
& \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 2 & 1 \end{array} \right) \times (-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & (1) & -7 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \\
& \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -4 & 5 & 1 \end{array} \right) \div 12 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -\frac{1}{12} & \frac{2}{12} & 0 \\ 0 & 1 & -7 & \frac{2}{12} & -\frac{3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & (1) & \frac{4}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \end{array} \right) \sim \\
& \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{5}{12} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{7}{12} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \end{array} \right). \\
& \text{Звідси отримаємо: } A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} \frac{8}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{4}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{7}{12} \\ -\frac{4}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \end{array} \right) = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -4 & -1 & 7 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Тестові завдання до теми: «Матриці та дії над ними»

ТЗ 2.1. Яка матриця називається транспонованою A^T до матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} ?$$

$$\begin{aligned}
 & \text{А. } \begin{pmatrix} a_{1n} & a_{2(n-1)} & K & a_{11} \\ a_{2n} & a_{2(n-1)} & K & a_{21} \\ K & K & K & K \\ a_{mn} & a_{m(n-1)} & K & a_{m1} \end{pmatrix}. \quad \text{Б. } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & K & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & K & a_{m2} \\ K & K & K & K \\ a_{1n} & a_{2n} & K & a_{mn} \end{pmatrix}. \\
 & \text{В. } \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & K & a_{mn} \\ a_{(m-1)1} & a_{(m-2)2} & K & a_{(m-1)n} \\ K & K & K & K \\ a_{11} & a_{12} & K & a_{1n} \end{pmatrix}. \quad \text{Г. } A^T = -A.
 \end{aligned}$$

ТЗ 2.2. Які дві матриці є взаємно транспонованими?

$$\text{А. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ і } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Б. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ і } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{В. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ і } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Г. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ і } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ТЗ 2.3. Яка квадратна матриця є одиничною?

$$\text{А. } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & K & 0 \\ 1 & 1 & K & 0 \\ K & K & K & K \\ 1 & 1 & K & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Б. } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & K & 0 \\ 0 & 1 & K & 0 \\ K & K & K & K \\ 0 & 0 & K & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{В. } E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & K & 1 \\ 0 & 1 & K & 1 \\ K & K & K & K \\ 0 & 0 & K & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Г. } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & K & 0 & 0 \\ 1 & 1 & K & 0 & 0 \\ K & K & K & K & K \\ 0 & 0 & K & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ТЗ 2.4. Сумою яких двох матриць є матриця $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$?

$$\text{А. } \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}. \quad \text{Б. } \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{В. } \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}. \quad \text{Г. } \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

ТЗ 2.5. Різницею яких двох матриць є матриця $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -11 \end{pmatrix}$?

$$\text{А. } \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -21 \\ 3 & 40 \end{pmatrix}. \quad \text{Б. } \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{В. } \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}. \quad \text{Г. } \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

ТЗ 2.6. Що називається добутком матриці A на число α ?

А. Добутком матриці A на число α називається нова матриця $C = \alpha A$, яка відрізняється від матриці A тим, що кожний елемент першого рядка матриці A помножається на число α

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & K & \alpha a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & K & a_{2n} \\ K & K & K & K \\ a_{m1} & a_{m2} & K & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Б. Добутком матриці A на число α називається нова матриця $C = \alpha A$, яка відрізняється від матриці A тим, що кожний елемент першого стовпця матриці A помножається на число α

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & a_{12} & K & a_{1n} \\ \alpha a_{21} & a_{22} & K & a_{2n} \\ K & K & K & K \\ \alpha a_{m1} & a_{m2} & K & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

В. Добутком матриці A на число α називається нова матриця $C = \alpha A$, яка відрізняється від матриці A тим, що кожний елемент матриці A помножається на число α

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & K & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & K & \alpha a_{2n} \\ K & K & K & K \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & K & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Г. Добутком матриці A на число α називається нова матриця $C = \alpha A$, яка відрізняється від матриці A тим, що кожний елемент головної діагоналі матриці A помножається на число α

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & a_{12} & K & a_{1n} \\ a_{21} & \alpha a_{22} & K & a_{2n} \\ K & K & K & K \\ a_{m1} & a_{m2} & K & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

ТЗ 2.7. Добутком числа $\alpha = 2$ на матрицю $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \in$

А. $\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}.$

Б. $\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}.$

В. $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$

Г. $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}.$

ТЗ 2.8. Що називається добутком матриці A розміру $m \times n$ на матрицю B розміру $n \times p$?

А. Матриця $C = AB$ розміру $m \times p$, кожний елемент c_{ij} якої обчислюється за правилом $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + K + a_{in} \cdot b_{nj}.$

Б. Матриця $C = AB$ розміру $m \times p$, кожний елемент c_{ij} якої обчислюється за правилом $c_{ij} = a_{j1}b_{1i} + a_{j2} \cdot b_{2i} + K + a_{jn} \cdot b_{ni}.$

В. Матриця $C = AB$ розміру $p \times m$, кожний елемент c_{ij} якої обчислюється за правилом $c_{ij} = a_{i1}b_{1i} + a_{i2} \cdot b_{2i} + K + a_{in} \cdot b_{ni}$.

Г. Квадратна матриця $C = AB$ q -того порядку ($q = \min\{m, n, p\}$), кожний елемент c_{ij} якої обчислюється за правилом $c_{ij} = a_{j1}b_{1i} + a_{j2} \cdot b_{2i} + K + a_{jq} \cdot b_{qi}$.

ТЗ 2.9. Добутком яких двох матриць є матриця $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$?

А. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Б. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

В. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Г. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

ТЗ 2.10. Добутком яких двох матриць є матриця $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$?

А. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Б. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

В. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Г. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

ТЗ 2.11. Добутком яких двох матриць є матриця $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

А. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Б. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

В. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Г. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ТЗ 2.12. Визначник якої матриці A дорівнює 18?

А. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 6 & 7 & 0 \end{pmatrix}$. Б. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$.

В. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$. Г. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.

ТЗ 2.13. Визначник якої матриці A дорівнює 1?

А. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Б. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

В. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Г. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

ТЗ 2.14. Яка з матриць має визначник, що дорівнює 72?

А. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Б. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

В. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Г. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

ТЗ 2.15. Яка матриця A^{-1} називається оберненою до матриці A ?

А. Квадратна матриця A^{-1} того ж порядку, що і A , називається оберненою до A , якщо $A \cdot A^{-1} = 0$.

Б. Квадратна матриця A^{-1} того ж порядку, що і A , називається оберненою до A , якщо $A \cdot A^{-1} = A^{-1}A = E$, де E – одинична матриця того ж порядку.

В. Квадратна матриця A^{-1} того ж порядку, що і A , називається оберненою до A , якщо $A^{-1}A = A$.

Г. Квадратна матриця A^{-1} того ж порядку, що і A , називається оберненою до A , якщо $A \cdot A^{-1} = A$.

ТЗ 2.16. Для якої матриці A існує обернена матриця A^{-1} ?

А. Матриця A повинна бути прямокутною розміру $m \times n$, причому кількість рядків m більша кількості стовпців n ($m > n$).

Б. Матриця A повинна бути квадратною ($m = n$) і особливою ($\det A = 0$).

В. Матриця A повинна бути прямокутною розміру $m \times n$, причому кількість рядків m менша кількості стовпців n ($m < n$).

Г. Для того, щоб матриця A мала обернену A^{-1} необхідно і достатньо, щоб матриця A була квадратною ($m = n$) і неособливою ($\det A \neq 0$).

ТЗ 2.17. Яка матриця S називається приєднаною до матриці A ?

$$\text{А. } \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & K & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & K & M_{2n} \\ K & K & K & K \\ M_{n1} & M_{n2} & K & M_{nn} \end{pmatrix}. \quad \text{Б. } \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & K & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & K & A_{2n} \\ K & K & K & K \\ A_{n1} & A_{n2} & K & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$\text{В. } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & K & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & K & a_{2n} \\ K & K & K & K \\ a_{n1} & a_{n2} & K & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad \text{Г. } \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & K & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & K & A_{n2} \\ K & K & K & K \\ A_{1n} & A_{2n} & K & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

(Тут M_{ij} і A_{ij} – відповідно мінор і алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} матриці A).

ТЗ 2.18. Нехай матриця S є приєднаною до матриці A . За якою формулою обчислюється обернена матриця A^{-1} до матриці A ?

$$\text{А. } A^{-1} = \det A \cdot S^T. \quad \text{Б. } A^{-1} = \det A \cdot S.$$

$$\text{В. } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot S^T. \quad \text{Г. } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot S.$$

ТЗ 2.19. Для якої матриці A оберненою є матриця

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}?$$

$$\text{А. } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}. \quad \text{Б. } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{В. } A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Г. } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

ТЗ 2.20. Яка матриця є виродженою (особливою)?

$$\text{А. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Б. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{В. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Г. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

ТЗ 2.21. Яка з матриць є виродженою (особливою)?

$$\text{А. } \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}. \quad \text{Б. } \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}. \quad \text{В. } \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}. \quad \text{Г. } \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

ТЗ 2.22. Яка з матриць є невиродженою (неособливою)?

$$\text{А. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Б. } \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{В. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Г. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

ТЗ 2.23. Для якої матриці A приєднана матриця S має вигляд

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ?$$

$$\text{А. } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Б. } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{В. } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Г. } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ТЗ 2.24. Для якої матриці A приєднана матриця S має вигляд

$$S = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}?$$

$$\text{А. } A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}. \quad \text{Б. } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{В. } A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -4 & 7 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Г. } A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

ТЗ 2.25. Для якої матриці A обернена матриця має вигляд: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}?$

$$\text{А. } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Б. } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{В. } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Г. } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ТЗ 2.26. При якій умові квадратна система лінійних рівнянь $AX = B$, де A – квадратна матриця, X – матриця-стовпець невідомих, B – матриця-стовпець вільних членів, має єдиний розв'язок і за якою формулою він обчислюється?

А. A – особлива матриця ($\det A = 0$) і $X = A^{-1}B$.

Б. A – неособлива матриця ($\det A \neq 0$) і $X = A^{-1}B$.

В. A – неособлива матриця ($\det A \neq 0$) і $X = BA^{-1}$.

Г. A – неособлива матриця ($\det A \neq 0$) і $X = ABA^{-1}$.

ТЗ 2.27. За якою формулою обчислюється розв'язок X матричного

рівняння $AX = B$, де A – квадратна неособлива матриця ($\det A \neq 0$)?

А. $X = A^{-1}B$.

Б. $X = BA^{-1}$.

В. $X = A^{-1}BA$.

Г. $X = ABA^{-1}$.

ТЗ 2.28. За якою формулою обчислюється розв'язок X матричного рівняння $XA = B$, де A – квадратна неособлива матриця ($\det A \neq 0$)?

А. $X = A^{-1}B$.

Б. $X = BA^{-1}$.

В. $X = A^{-1}BA$.

Г. $X = ABA^{-1}$.

ТЗ 2.29. За якою формулою обчислюється розв'язок X матричного рівняння $AXB = C$, де A і B – квадратні неособливі матриці?

А. $X = B^{-1}CA^{-1}$.

Б. $X = A^{-1}CB^{-1}$.

В. $X = B^{-1}CA^{-1}$.

Г. $X = A^{-1}B^{-1}C$.

ТЗ 2.30. Яке матричне рівняння має розв'язок $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$?

А. $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \end{pmatrix}$. Б. $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 1 \end{pmatrix}$.

В. $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \end{pmatrix}$. Г. $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -4 \end{pmatrix}$.

ТЗ 2.31. Яке матричне рівняння має розв'язок $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$?

А. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Б. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 25 \end{pmatrix}$.

В. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Г. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 23 \end{pmatrix}$.

ТЗ 2.32. Яке матричне рівняння має розв'язок $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$?

А. $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Б. $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$.

$$\text{В. } \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Г. } \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 11 \end{pmatrix}.$$

ТЗ 2.33. Яке матричне рівняння має розв'язок $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

$$\text{А. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad \text{Б. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{В. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad \text{Г. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

ТЗ 2.34. Яке матричне рівняння має розв'язок

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ?$$

$$\text{А. } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Б. } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{В. } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Г. } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

ТЗ 2.35. Яке матричне рівняння має розв'язок

$$\begin{aligned} \text{A. } & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \\ \text{Б. } & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \\ \text{В. } & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \\ \text{Г. } & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Системою k лінійних рівнянь з n невідомими називається система

[illegible]

де $a_{ij}, b_j \in R(i = \overline{1, k}, j = \overline{1, n})$ – задані дійсні числа, $x_j (j = \overline{1, n})$ – змінні.

$\overrightarrow{x_0} = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0)$ такий, що при підстановці його координат замість

відповідних змінних, кожне рівняння системи перетворюється на правильну рівність.

Система, яка має розв'язок, називається *сумісною*, а система, яка не має розв'язку – *несумісною*. Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, *невизначеною* – коли система має безліч розв'язків.

Метод Гауса розв'язування систем лінійних рівнянь полягає у послідовному виключенні невідомих з рівнянь:

x_1 виключаємо з усіх рівнянь, крім першого;

x_2 – з усіх рівнянь, крім першого і другого;

x_3 – з усіх рівнянь, крім першого, другого і третього і т.д.

Для сумісних систем лінійних рівнянь можливі два випадки:

1. В останньому рівнянні залишиться одне невідоме. Тоді система матиме єдиний розв'язок, який шукається «знизу-вгору».

2. В останньому рівнянні залишиться більш, ніж одне невідоме. Тоді лишаємо у лівій частині цього рівняння лише одну змінну, а інші переносимо у праву частину рівняння і називатимемо їх *вільними змінними*. Вільним змінним можна надавати довільних значень і шукати відповідні значення інших невідомих. В цьому випадку система матиме безліч розв'язків, тобто буде невизначеною.

Приклад 1. Розв'язати систему методом Гауса:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 49. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему за допомогою матриць:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 49 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ | -3 \| \\ | -3 \| \| \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & -7 & 4 & -20 \\ 0 & -10 & -2 & -152 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ 7 \| \| -10 \| \end{array} \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & -7 & 4 & -20 \\ 0 & 0 & -54 & -864 \end{array} \right) \div (-54) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & -7 & 4 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 16 \end{array} \right) \end{aligned}$$

З останньої матриці отримуємо систему:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -5, \\ -7x_2 + 4x_3 = -20, \\ x_3 = 16; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = -21, \\ -7x_2 = -84, \\ x_3 = 16; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 9, \\ x_2 = 12, \\ x_3 = 16. \end{cases}$$

Метод Гаусса можна модифікувати, якщо робити послідовне виключення змінних з усіх рівнянь, крім одного. Це можна зробити за допомогою правила прямокутника. При цьому потрібно обирати ведучий елемент (найкраще на кожному кроці вибирати «одиницю»), який має міститися по головній діагоналі матриці, що відповідає даній системі рівнянь. Удосконалений таким способом метод Гаусса називається методом Гаусса - Жордана.

Приклад 2. Розв'язати систему методом Гаусса - Жордана:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -5, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = -4. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & 3 & -4 \end{array} \right) \parallel - \parallel \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & -2 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & 3 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -5 & 7 \\ 0 & 7 & -5 & 12 \end{array} \right) \parallel -3 \parallel \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & (1) & 10 & -9 \\ 0 & 7 & -5 & 12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 22 & -22 \\ 0 & 1 & 10 & -9 \\ 0 & 0 & -75 & 75 \end{array} \right) \div (-75) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 22 & -22 \\ 0 & 1 & 10 & -9 \\ 0 & 0 & (1) & -1 \end{array} \right) \sim \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right). \quad \text{З останньої матриці отримаємо:} \quad \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Методом Крамера можна розв'язувати тільки системи з однаковою кількістю рівнянь та невідомих:

[illegible]

При цьому вводять позначення: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

За правилом Крамера система n лінійних рівнянь з n невідомими сумісна і визначена, якщо $\Delta \neq 0$. Якщо $\Delta = 0$ і всі $\Delta_j = 0$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$, то система сумісна, але невизначена. Якщо $\Delta = 0$, а хоча б один з $\Delta_j \neq 0$, то система лінійних рівнянь несумісна.

Розв'язок сумісної визначеної системи рівнянь обчислюють за

формулами Крамера:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \\ \dots \dots \dots \\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \end{cases}$$

Приклад 3. Розв'язати систему методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 12, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 12,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 12, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Скориставшись формулами Крамера, отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{12}{12} = 1, \\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{12}{12} = 1, \\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{12} = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи системи з однакою кількістю рівнянь і невідомих матричним методом, вводять до розгляду такі матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тоді систему можна записати у вигляді матричного рівняння:

$$A \times X = B,$$

розв'язок якого має вигляд:

$$X = A^{-1} \times B$$

при умові існування оберненої матриці A^{-1} .

Приклад 3. Розв'язати систему матричним методом:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -3, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

Позначимо:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Матриця A^{-1} для даної матриці має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{37} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 1 & 13 & -22 \\ -8 & 7 & -9 \end{pmatrix}$$

Скориставшись формулою $X = A^{-1} \times B$, отримаємо:

$$X = \frac{1}{37} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 1 & 13 & -22 \\ -8 & 7 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{37} \begin{pmatrix} 37 \\ -74 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Звідси: } \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -2, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Тестові завдання до теми:

«Системи лінійних алгебраїчних рівнянь»

ТЗ 3.1. При якій умові квадратна система лінійних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + K + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + K + a_{2n}x_n = b_2 \\ K \ K \ K \ K \dots\dots\dots K \ K \ K \ K \ K \ K \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + K + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right., \text{де } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & K & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & K & a_{2n} \\ K & K & K & K \\ a_{n1} & a_{n1} & K & a_{nn} \end{vmatrix}$$

— ГОЛОВНИЙ ВИЗНАЧНИК СИСТЕМИ, МАЄ ЄДИНИЙ РОЗВ'ЯЗОК?

A. $\Delta = 0$. Б. $\Delta \geq 0$. В. $\Delta \leq 0$. Г. $\Delta \neq 0$.

ТЗ 3.2. При якій достатній умові квадратна система лінійних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + K + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + K + a_{2n}x_n = b_2 \\ K \ K \ K \ K \dots\dots\dots K \ K \ K \ K \ K \ K \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + K + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right., \text{де } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & K & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & K & a_{2n} \\ K & K & K & K \\ a_{n1} & a_{n1} & K & a_{nn} \end{vmatrix}$$

— ГОЛОВНИЙ ВИЗНАЧНИК СИСТЕМИ І

$$\Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \mathbf{K} & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \mathbf{K} & a_{2n} \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ b_n & a_{n2} & \mathbf{K} & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \mathbf{K} & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \mathbf{K} & a_{2n} \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \mathbf{K} & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\dots, \quad \Delta^{(n)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & K & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & K & b_2 \\ K & K & K & K \\ a_{n1} & a_{n2} & K & b_n \end{vmatrix}$$

— допоміжні визначники системи, не має жодного розв'язку?

A. $\Delta \neq 0, \Delta^{(j)} = 0 \ (j = 1, 2, \dots, n).$

Б. $\Delta > 0$, $\Delta^{(j)} \neq 0$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

B. $\Delta = 0$, $\Delta^{(j)} = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

Г. $\Delta=0$, а хоча б один із визначників $\Delta^{(j)}$ ($j=1,2,\dots,n$) відмінний від нуля.

ТЗ 3.3. Необхідною і достатньою умовою наявності ненульового розв'язку однорідної квадратної системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}, \text{де } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

— ГОЛОВНИЙ ВИЗНАЧНИК, €

A. $\Delta = 0$. Б. $\Delta \geq 0$. В. $\Delta \leq 0$. Г. $\Delta \neq 0$.

ТЗ 3.4. Система лінійних рівнянь $AX = B$ має безліч розв’язків тоді і тільки тоді, коли

А. Ранг розширеної матриці $C = (A|B)$ менший рангу основної матриці A і менший числа невідомих.

Б. Ранг розширеної матриці $C = (A|B)$ більший рангу основної матриці A , але менший числа невідомих.

В. Ранг розширеної матриці $C = (A|B)$ дорівнює рангу основної матриці A і менший числа невідомих.

Г. Ранг розширеної матриці $C = (A|B)$ дорівнює рангу основної матриці A і дорівнює числу невідомих.

ТЗ 3.5. Яка система двох лінійних рівнянь має розв'язок $x = 3, y = 4$?

А. $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

Б. $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$

В. $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$

Г. $\begin{cases} x - 2y = 11 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$

ТЗ 3.6. Яка система двох лінійних рівнянь еквівалентна системі

$$\begin{cases} 3x &= 9 \\ &5y = 15 \end{cases} ?$$

А. $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$

Б. $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$

В. $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$

Г. $\begin{cases} x + y = 6 \\ 3x + y = 12 \end{cases}$

ТЗ 3.7. Які пари систем лінійних рівнянь еквівалентні між собою?

А. $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$ і $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 8y = 10 \end{cases}$. Б. $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$ і $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 8y = 8 \end{cases}$.

В. $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ і $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 5y = 6 \end{cases}$. Г. $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 5x - 3y = 7 \end{cases}$ і $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 9y = 18 \end{cases}$.

ТЗ 3.8. Яка система двох лінійних рівнянь має єдиний розв'язок?

А. $\begin{cases} 5x - 3y = 8 \\ 10x - 6y = 15 \end{cases}$

Б. $\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ 15x + 10y = 1 \end{cases}$

В. $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$

Г. $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x - 3y = -3 \end{cases}$

ТЗ 3.9. Яка система двох лінійних рівнянь еквівалентна одному рівнянню з двома невідомими?

$$A. \begin{cases} x+3y=5 \\ 2x+6y=10 \end{cases}.$$

$$Б. \begin{cases} x+3y=5 \\ 2x+6y=9 \end{cases}.$$

$$B. \begin{cases} x+3y=5 \\ 2x+6y=10 \end{cases}.$$

$$Г. \begin{cases} x+3y=5 \\ 2x+5y=9 \end{cases}.$$

ТЗ 3.10. Яка система двох лінійних рівнянь має безліч розв'язків?

$$A. \begin{cases} x+y=3 \\ 2x-3y=-4 \end{cases}.$$

$$Б. \begin{cases} 7x-y=5 \\ 14x-2y=10 \end{cases}.$$

$$B. \begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+y=4 \end{cases}.$$

$$Г. \begin{cases} 7x-y=5 \\ 14x-2y=9 \end{cases}.$$

ТЗ 3.11. Яка система двох лінійних рівнянь не має жодного розв'язку?

$$A. \begin{cases} 7x+y=5 \\ 21x+3y=9 \end{cases}.$$

$$Б. \begin{cases} 7x+y=5 \\ 14x+2y=10 \end{cases}.$$

$$B. \begin{cases} 7x+y=5 \\ 21x-3y=9 \end{cases}.$$

$$Г. \begin{cases} 7x+y=5 \\ 14x-2y=10 \end{cases}.$$

ТЗ 3.12. Яка система трьох лінійних рівнянь має розв'язок $x=1, y=2, z=-3$?

$$A. \begin{cases} x+y-z=6 \\ 2x+3y+z=5 \\ -x+2y-z=6 \end{cases}.$$

$$Б. \begin{cases} x+y-z=6 \\ 2x+3y+z=5 \\ x+2y-z=6 \end{cases}.$$

$$B. \begin{cases} x+y-z=6 \\ 2x-3y+z=5 \\ -x+2y-z=6 \end{cases}.$$

$$Г. \begin{cases} x+y-z=6 \\ 2x+3y+z=6 \\ -x+2y-z=6 \end{cases}.$$

ТЗ 3.13. Яка однорідна квадратна система має ненульовий розв'язок?

$$A. \begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-3y+2z=0 \\ 4x+y-z=0 \end{cases}.$$

$$Б. \begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ 4x+2y-z=0 \end{cases}.$$

$$B. \begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ 4x+y-z=0 \end{cases}.$$

$$Г. \begin{cases} x+2y-2z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ 4x+y-z=0 \end{cases}.$$

ТЗ 3.14. Яка система трьох лінійних рівнянь еквівалентна системі

$$\begin{cases} 3x & = 15 \\ 2y & = 4 \quad ? \\ 5z & = 5 \end{cases}$$

$$\text{A. } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ 3x + y + 2z = 11 \end{cases} \quad \text{Б. } \begin{cases} x + y + z = 8 \\ x - y + z = 4 \\ 3x + y + 2z = 19 \end{cases}$$

$$\text{В. } \begin{cases} x + y + z = 8 \\ x - y + z = 4 \\ 2x - y + 2z = 5 \end{cases} \quad \text{Г. } \begin{cases} x + y + z = 8 \\ x + 2y + z = 5 \\ 3x + y + 2z = 19 \end{cases}$$

ТЗ 3.15. Яка з систем трьох лінійних рівнянь еквівалентна системі

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3y + z = 9 \quad ? \\ 7z = 21 \end{cases}$$

$$\text{А. } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ 5x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \quad \text{Б. } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ 5x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

$$\text{В. } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ 4x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \quad \text{Г. } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 2 \\ 5x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

ТЗ 3.16. Яка система трьох лінійних рівнянь має єдиний розв'язок?

$$\text{А. } \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - 2y = 5 \\ -5x + 5y = 3 \end{cases} \quad \text{Б. } \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - 2y = 5 \\ 7x = 5 \end{cases}$$

$$\text{В. } \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 3y - z = 5 \\ -6y + 2z = 3 \end{cases} \quad \text{Г. } \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + z = 1 \\ 3x + 3z = 4 \end{cases}$$

ТЗ 3.17. Яка система трьох лінійних рівнянь еквівалентна системі двох рівнянь з трьома невідомими?

$$\text{А. } \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + 3z = 5 \\ 3x + y + 4z = 8 \end{cases} \quad \text{Б. } \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + 3z = 5 \\ 3x + 2y + 3z = 8 \end{cases}$$

$$\text{В. } \begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x-y+3z=5 \\ 3x+y+2z=8 \end{cases} \quad \text{Г. } \begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x-y+3z=5 \\ 2x+y+2z=8 \end{cases}$$

ТЗ 3.18. Яка система трьох лінійних рівнянь має безліч розв'язків?

$$\text{А. } \begin{cases} x-y+z=1 \\ 3x+y-z=3 \\ x+2y-z=2 \end{cases} \quad \text{Б. } \begin{cases} x-y+z=1 \\ 3x+y-z=3 \\ 5x-y+z=5 \end{cases}$$

$$\text{В. } \begin{cases} x-y+z=1 \\ 3x+y-z=3 \\ 2x-3y+2z=1 \end{cases} \quad \text{Г. } \begin{cases} x-y+z=1 \\ x+y-z=1 \\ 3x+2y+z=6 \end{cases}$$

ТЗ 3.19. Яка система трьох лінійних рівнянь не має жодного розв'язку?

$$\text{А. } \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+3y-z=4 \\ 5x+6y+2z=13 \end{cases} \quad \text{Б. } \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+3y-z=4 \\ x+2y-z=1 \end{cases}$$

$$\text{В. } \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+3y-z=4 \\ 5x+6y+7z=18 \end{cases} \quad \text{Г. } \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+3y-z=4 \\ 5x+6y+2z=12 \end{cases}$$

ТЗ 3.20. Яка система трьох лінійних рівнянь еквівалентна одному рівнянню з трьома невідомими?

$$\text{А. } \begin{cases} 2x-y+5z=7 \\ 5x-3y+15z=21 \\ 3x-2y+10z=14 \end{cases} \quad \text{Б. } \begin{cases} 2x-y+5z=7 \\ 3x-2y+5z=14 \\ 5x-4y+10z=21 \end{cases}$$

$$\text{В. } \begin{cases} 2x-y+5z=7 \\ 6x-3y+15z=21 \\ 4x-y+10z=14 \end{cases} \quad \text{Г. } \begin{cases} 2x-y+5z=7 \\ 6x-3y+15z=21 \\ 4x-2y+10z=14 \end{cases}$$

ТЗ 3.21. Яка з систем трьох лінійних рівнянь має єдиний розв'язок?

$$\text{А. } \begin{cases} x+y=2 \\ 2x-z=1 \\ 7x+y-3z=5 \end{cases} \quad \text{Б. } \begin{cases} x+y=2 \\ 2x-z=1 \\ 7x+y-3z=6 \end{cases}$$

$$\text{В. } \begin{cases} x+y=2 \\ 2x-z=1 \\ 3y+z=4 \end{cases} \quad \text{Г. } \begin{cases} x+y=2 \\ 2x-z=1 \\ 3x+y-z=3 \end{cases}$$

ТЗ 3.22. Знайти розв'язки системи
$$\begin{cases} x-4y+z=6 \\ x-3y-2z=2 \\ -x+2y+5z=2 \end{cases}.$$

А. $x=12+11t, y=4-3t, z=t, t \in R$.

Б. $x=22+11t, y=4+3t, z=t, t \in R$.

В. $x=2+15t, y=4+2t, z=t, t \in R$.

Г. $x=11-22t, y=2+3t, z=t, t \in R$.

ТЗ 3.23. Знайти розв'язки системи
$$\begin{cases} x+y-3z=2 \\ x+2y+z=1 \\ 3x+5y-z=4 \end{cases}.$$

А. $x=3+7t, y=-1-4t, z=t, t \in R$.

Б. $x=5+2t, y=-1-5t, z=t, t \in R$.

В. $x=2+3t, y=-4+5t, z=t, t \in R$.

Г. $x=8-7t, y=2+3t, z=t, t \in R$.

ТЗ 3.24. Знайти розв'язки системи
$$\begin{cases} x-3y-2z=0 \\ x-2y+2z=0 \\ x-y+6z=0 \end{cases}.$$

А. $x=3t, y=8t, z=t, t \in R$.

Б. $x=-12t, y=-3t, z=t, t \in R$.

В. $x=6t, y=-4t, z=t, t \in R$.

Г. $x=-10t, y=-4t, z=t, t \in R$.

ТЗ 3.25. Яка з систем трьох лінійних рівнянь еквівалентна системі

$$\begin{cases} x+2y-z=2 \\ y-3z=3 \\ z=-1 \end{cases} ?$$

А.
$$\begin{cases} x+2y-z=2 \\ x+y+2z=-1 \\ x-2y+z=2 \end{cases}.$$

Б.
$$\begin{cases} x+2y-z=2 \\ x+y-2z=1 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}.$$

В.
$$\begin{cases} x+2y-z=2 \\ x+y+2z=-1 \\ x-y+z=0 \end{cases}.$$

Г.
$$\begin{cases} x+2y-z=2 \\ x+y+z=-1 \\ x-y+z=1 \end{cases}.$$

ТЗ 3.26. Яка з систем трьох лінійних рівнянь еквівалентна системі

$$\begin{cases} x+2y-z=2 \\ y-3z=3 \quad ? \\ z=-1 \end{cases}$$

$$\text{А. } \begin{cases} x+2y-z=2 \\ x+y+2z=-1 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

$$\text{Б. } \begin{cases} x+2y-z=2 \\ x+y-2z=1 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$$

$$\text{В. } \begin{cases} x+2y-z=2 \\ x+2z=-1 \\ x-2y+z=2 \end{cases}$$

$$\text{Г. } \begin{cases} x+2y-z=2 \\ x+y+z=-1 \\ x-y=3 \end{cases}$$

ТЗ 3.27. Яка з указаних систем двох рівнянь з трьома невідомими

еквівалентна системі
$$\begin{cases} x+4y-z=3 \\ x+3y+z=0 \quad ? \\ x+2y+4z=-3 \end{cases}$$

$$\text{А. } \begin{cases} x+4y-z=3 \\ y-4z=1 \end{cases}$$

$$\text{Б. } \begin{cases} x+4y-z=3 \\ y-3z=3 \end{cases}$$

$$\text{В. } \begin{cases} x+4y-z=3 \\ y+4z=-3 \end{cases}$$

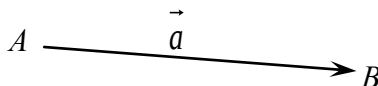
$$\text{Г. } \begin{cases} x+4y-z=3 \\ y-2z=-2 \end{cases}$$

4. Метод координат

Поняття вектора. Колінеарні і компланарні вектори

Під *вектором* будемо розуміти напрямлений відрізок.

Для векторів застосовують позначення: $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$. В останньому випадку точку A називають *початком вектора*, точку B – *кінцем вектора* $\overrightarrow{AB}$ (мал.1).



Мал. 1

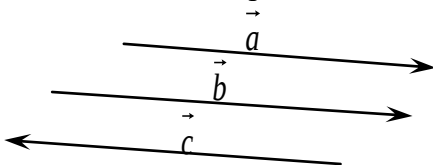
Означення. Вектор, у якого початок співпадає з кінцем, називається *нульовим*.

Нульовий вектор позначається: $\vec{0}$. Напрямок нульового вектора невизначений.

Означення. Вектори називаються *колінеарними*, якщо вони паралельні до однієї прямої або лежать на одній прямій.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – колінеарні, то це позначають так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Означення. Паралельні вектори називаються *співнаправленими*, якщо вони лежать в одній півплощині відносно прямої, що проходять через початки цих векторів; *протилежно напрямленими* – якщо вони лежать в різних півплощинах відносно цієї прямої.



Мал. 2

На мал. 2 вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – співнаправлені: $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$, вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – протилежно напрямлені: $\vec{b} \uparrow \downarrow \vec{c}$.

Вектор $\overrightarrow{BA}$ називається *протилежним до вектора* $\overrightarrow{AB}$, тобто: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Довжина вектора $\vec{a}$ позначається $|\vec{a}|$.

Означення. Вектори називаються *рівними*, якщо вони співнаправлені і мають однакову довжину, тобто:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow 1. \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}, 2. |\vec{a}| = |\vec{b}|.$$

Теорема

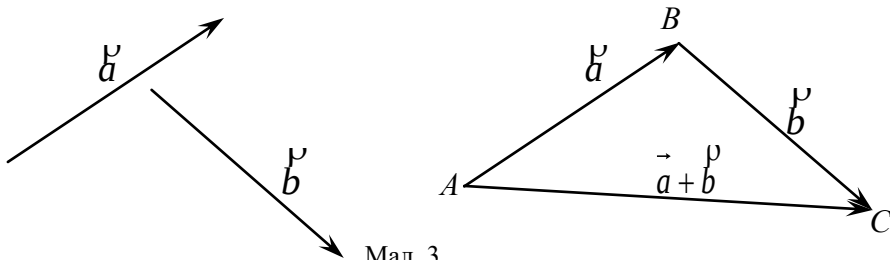
З будь-якої точки простору можна побудувати вектор, рівний даному, і при тому тільки один.

Лінійні операції над векторами

I. Додавання векторів.

Означення. Сумою двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{a} + \vec{b}$, який будується за таким правилом:

- 1) з довільної точки A будуємо вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$;
- 2) з його кінця – точки B будуємо вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$;
- 3) сполучаємо початок вектора $\vec{a}$ – точку A з кінцем вектора $\vec{b}$ – точкою C .



Мал. 3

Таке правило побудови суми двох векторів називається *правилом трикутника*.

Як бачимо з мал. 3, для суми векторів справедлива рівність:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

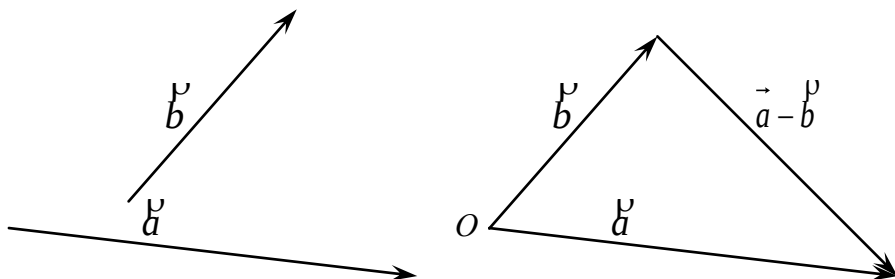
Властивості суми векторів:

1. $\forall \vec{a}, \vec{b} : \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ – комутативність;
2. $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} : (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ – асоціативність;
3. $\forall \vec{a} : \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$;
4. $\forall \vec{a} : \vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$.

II. Віднімання векторів.

Означення. Різницею двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{c}$, який в сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$.

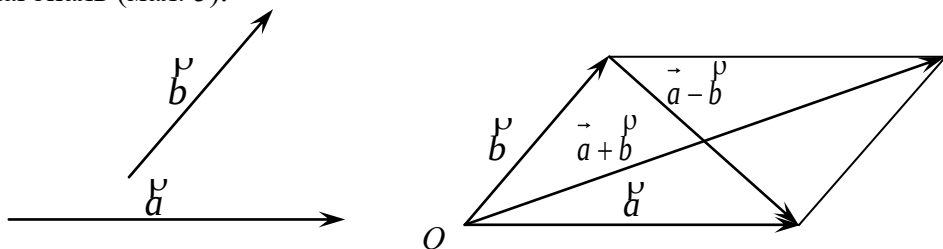
Щоб знайти різницю двох векторів, досить віднести ці вектори до спільного початку, з'єднати їхні кінці і поставити стрілку біля того вектора, від якого віднімаємо (мал. 4).



Мал. 4

Для знаходження суми і різниці двох векторів також користуються *правилом паралелограма*:

З довільної точки будемо обидва вектори, на цих векторах добудовуємо паралелограм. Сумою цих векторів є діагональ паралелограма, яка виходить із спільного початку, їх різницею є інша діагональ (мал. 5).



Мал. 5

III. Множення вектора на число.

Означення. Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називається вектор $\lambda\vec{a}$, довжина якого дорівнює добутку довжини цього вектора на модуль числа. Цей вектор співнапрямлений з даним вектором, якщо число додатне; протилежно напрямлений, якщо число від'ємне і дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли або число дорівнює нулю, або вектор дорівнює нулю.

Тобто вектор $\lambda\vec{a}$ задовольняє наступні умови:

- 1) $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$,
- 2) $\lambda\vec{a} \uparrow \vec{a}$, якщо $\lambda > 0$,
- 3) $\lambda\vec{a} \updownarrow \vec{a}$, якщо $\lambda < 0$,
- 4) $\lambda\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ або $\vec{a} = \vec{0}$.

Властивості добутку вектора на число:

1. $\forall \vec{a} : 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;
2. $\forall \vec{a} \forall \alpha, \beta : \alpha(\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$ – асоціативність множення;
3. $\forall \vec{a} \forall \alpha, \beta : (\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$;
4. $\forall \vec{a}, \vec{b} \forall \alpha : \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$;

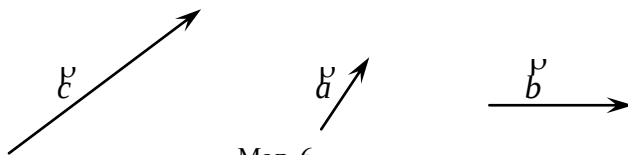
дві останні формули називаються *дистрибутивними законами множення відносно додавання*.

Розклад вектора за даними напрямками

Означення. Розкласти вектор $\vec{c}$ за двома не колінеарними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (на площині) означає знайти такий паралелограм,

для якого $\vec{c}$ буде діагоналлю, а сторонами паралелограма будуть вектори, колінеарні до $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

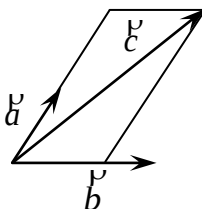
Приклад. Розкласти вектор $\vec{c}$ за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо вектори розміщені так, як показано на мал. 6.



Мал. 6

Віднесемо вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ до спільного початку та побудуємо на основі їх паралелограм так, щоб вектор $\vec{c}$ був діагоналлю цього паралелограма.

Як видно з мал. 7, $\vec{c} = 2\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$.



Мал. 7

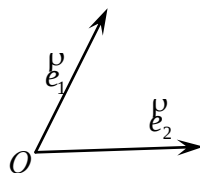
Означення. Розкласти вектор $\vec{a}$ за трьома не колінеарними векторами $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ (на площині) означає знайти такий паралелепіпед, для якого $\vec{a}$ буде діагоналлю, а сторонами паралелепіпеда будуть вектори, колінеарні до $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Базис простору

Означення. Базисом площини називається впорядкована пара не колінеарних векторів.

Базис площини позначається: $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$,

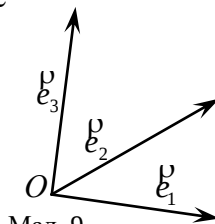
де вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ не колінеарні (мал. 8).



Мал. 8

Означення. Базисом простору називається впорядкована трійка не компланарних векторів.

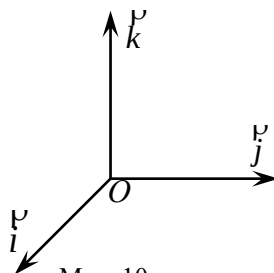
Базис простору позначають: $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, де вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ не компланарні (мал. 9).



Мал. 9

Означення. Базис називається *ортонормованим*, якщо базисні вектори попарно перпендикулярні і довжини базисних векторів рівні одиниці.

Ортонормований базис $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, де $\vec{i} \perp \vec{j}, \vec{i} \perp \vec{k}, \vec{j} \perp \vec{k}, |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ (мал. 10).



Мал. 10

Теорема (про розклад вектора за базисними векторами)

Будь-який вектор простору можна розкласти за базисними векторами, причому єдиним способом.

Тобто довільний вектор $\vec{a}$ простору можна у базисі $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ подати у вигляді: $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$.

Означення. Координатами вектора в даному базисі називається впорядкована трійка дійсних чисел, які є коефіцієнтами в лінійному розкладі цього вектора за базисними векторами.

Якщо вектор $\vec{a}$ задається рівністю: $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$, то координатами цього вектора є впорядкована трійка (x, y, z) , тобто:

$$\vec{a}(x, y, z) \Leftrightarrow \vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3.$$

Властивості операцій над векторами через векторами:

1) Рівні вектори мають рівні відповідні координати в тому самому базисі:

$$\vec{a}(x_1, y_1, z_1) = \vec{b}(x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2.$$

2) Координати суми двох векторів дорівнюють сумам їх відповідних координат:

$$\vec{a}(x_1, y_1, z_1), \vec{b}(x_2, y_2, z_2) \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

3) Координати добутку вектора на число дорівнюють добуткам координат цього вектора на дане число:

$$\vec{a}(x, y, z) \Rightarrow \lambda \vec{a} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z).$$

4) Координати лінійної комбінації кількох векторів дорівнюють тій же лінійній комбінації відповідних координат.

5) Координати вектора $\overrightarrow{AB}$, де $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ обчислюються за формулою:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

тобто дорівнюють різницям відповідних координат його кінця і початку.

Приклад. $\vec{a}(2, 4, -1), \vec{b}(5, -2, -3)$. Знайти $3\vec{a} - 4\vec{b}$.

$$3\vec{a} - 4\vec{b} = (3 \cdot 2 - 4 \cdot 5, 3 \cdot 4 - 4 \cdot (-2), 3 \cdot (-1) - 4 \cdot (-3)) = (-14, 20, 9).$$

Умова колінеарності двох векторів через координати

Нехай в базисі $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають координати: $\vec{a}(x_1, y_1, z_1), \vec{b}(x_2, y_2, z_2)$.

Теорема

Для того, щоб вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ були колінеарними, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2},$$

тобто, щоб були пропорційними їх відповідні координати.

Умова компланарності двох векторів через координати

Нехай в базисі $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ мають координати: $\vec{a}(x_1, y_1, z_1), \vec{b}(x_2, y_2, z_2), \vec{c}(x_3, y_3, z_3)$.

Теорема

Для того, щоб вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ були компланарними, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

тобто, щоб детермінант 3-го порядку, рядки якого складені із координат цих векторів, дорівнював нулю.

Скалярний добуток векторів і його властивості

Означення. Скалярним добутком двох векторів називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi,$$

де $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Результатом скалярного добутку векторів є число (скаляр).

Властивості скалярного добутку:

а) алгебраїчні властивості:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ – комутативність,

2) $\alpha \vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha (\vec{a} \cdot \vec{b})$, $\vec{a} \cdot \beta \vec{b} = \beta (\vec{a} \cdot \vec{b})$, $\alpha \vec{a} \cdot \beta \vec{b} = \alpha \beta (\vec{a} \cdot \vec{b})$ –

асоціативна властивість відносно числового множника.

3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$, $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ –

дистрибутивні закони множення відносно додавання.

Приклад. $(3\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (4\vec{a} - 3\vec{b}) = 12\vec{a} \cdot \vec{a} - 9\vec{a} \cdot \vec{b} + 8\vec{a} \cdot \vec{b} - 6\vec{b} \cdot \vec{b} =$
 $= 12\vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + 6\vec{b} \cdot \vec{b}.$

б) геометричні властивості:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ – скалярний добуток дорівнює нулеві тоді і тільки, коли вектори перпендикулярні.

2) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ – скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини.

$$3) \quad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} -$$

модуль (довжина) вектора дорівнює кореню квадратному із його скалярного квадрата.

$$4) \quad \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} -$$

косинус кута між двома векторами дорівнює скалярному добутку цих векторів, поділеному на добуток їх довжин.

Вираз скалярного добутку двох векторів через їх координати в ортонормованому базисі

Нехай в ортонормованому базисі $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають координати: $\vec{a}(x_1, y_1, z_1), \vec{b}(x_2, y_2, z_2)$. Тоді

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 -$$

скалярний добуток двох векторів в ортонормованому базисі дорівнює сумі попарних добутків їх відповідних координат.

Довжина вектора

Нехай в ортонормованому базисі $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ вектор $\vec{a} = (x, y, z)$. За формулою $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ отримаємо:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} -$$

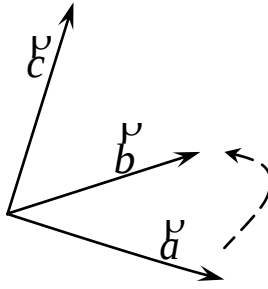
довжина вектора дорівнює кореню квадратному із суми квадратів його координат.

Приклад. Нехай $\vec{a}(2, -2, 1), \vec{b}(3, 1, 5)$. Знайти кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 5}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2 + 5^2}} = \frac{9}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{35}} = \frac{3}{\sqrt{35}}.$$

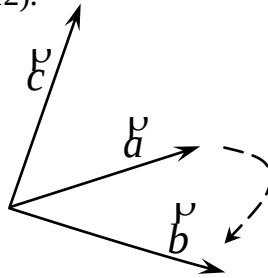
Векторний добуток векторів і його властивості

Кажуть, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють *праву трійку* (або репер $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – *додатно орієнтований*), якщо вони розміщені в просторі проти годинникової стрілки (мал. 11).



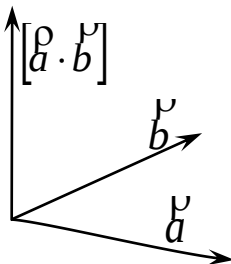
Мал. 11

Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють *ліву трійку* (репер $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – від'ємно орієнтований), якщо вони розміщені в просторі за годинниковою стрілкою (мал. 12).



Мал. 12

Означення. Векторним добутком двох векторів називається вектор, довжина якого дорівнює добутку довжин цих векторів на синус кута між ними; цей вектор перпендикулярний до кожного з перемножуваних векторів і утворює з ними праву трійку (мал. 13):



$$\left| \left[\begin{smallmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{smallmatrix} \right] \right| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$$

Мал. 13

Результатом векторного добутку векторів є вектор.

Властивості векторного добутку:

а) алгебраїчні властивості:

1) $[\vec{a} \cdot \vec{b}] = -[\vec{b} \cdot \vec{a}]$ – антикомутативність,

2) $[\alpha \vec{a} \cdot \vec{b}] = \alpha [\vec{a} \cdot \vec{b}]$, $[\vec{a} \cdot \beta \vec{b}] = \beta [\vec{a} \cdot \vec{b}]$, $[\alpha \vec{a} \cdot \beta \vec{b}] = \alpha \beta [\vec{a} \cdot \vec{b}]$ –

асоціативна властивість відносно числового множника.

3) $[(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}] = [\vec{a} \cdot \vec{c}] + [\vec{b} \cdot \vec{c}]$, $[\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})] = [\vec{a} \cdot \vec{b}] + [\vec{a} \cdot \vec{c}]$ –

дистрибутивні закони множення відносно додавання.

б) геометричні властивості:

1) $[\vec{a} \cdot \vec{b}] \perp \vec{a}$, $[\vec{a} \cdot \vec{b}] \perp \vec{b}$,

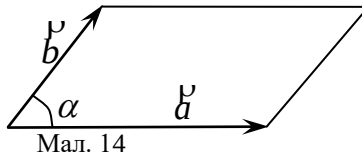
2) $(\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a} \cdot \vec{b}])$ – права трійка,

3) $[\vec{a} \cdot \vec{b}] = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$ – векторний добуток дорівнює

нулеві тоді і тільки, коли вектори колінеарні,

4) $S_{\text{пар-ма}} = \|[\vec{a} \cdot \vec{b}]\|$ –

модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах (віднесених до спільного початку – мал. 14).



Мал. 14

5) $S_{\Delta} = \frac{1}{2} \|[\vec{a} \cdot \vec{b}]\|$

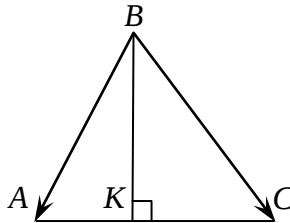
Вираз векторного добутку двох векторів через їх координати в ортонормованому базисі

Нехай в ортонормованому базисі $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають координати: $\vec{a}(x_1, y_1, z_1), \vec{b}(x_2, y_2, z_2)$. Тоді

$$[a \cdot b] = \begin{vmatrix} \overset{p}{i} & \overset{p}{j} & \overset{p}{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} -$$

векторний добуток двох векторів в ортонормованому базисі дорівнює детермінанту третього порядку, в першому рядку якого стоять базисні вектори $\overset{p}{i}, \overset{p}{j}, \overset{p}{k}$, в другому рядку – координати першого множника, в третьому рядку – координати другого множника.

Приклад. Вершини трикутника ABC мають координати: $A(1, -1, 2)$, $B(5, -6, 2)$, $C(1, 3, -1)$. Обчислити площу трикутника і довжину висоти, опущеної з вершини B на сторону AC (мал. 15).



Мал. 15

Площу трикутника обчислюватимемо за формулою:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}] \right|. \text{ З іншого боку: } S_{\Delta} = \frac{1}{2} AC \cdot BK. \text{ Звідси:}$$

$$\frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}] \right| = \frac{1}{2} AC \cdot BK. \text{ З останньої рівності отримаємо:}$$

$$BK = \frac{\left| [\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}] \right|}{AC}.$$

$$\overrightarrow{BA} = (1 - 5, -1 + 6, 2 - 2) = (-4, 5, 0), \overrightarrow{BC} = (1 - 5, 3 + 6, -1 - 2) = (-4, 9, -3).$$

$$[\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}] = \begin{vmatrix} \overset{p}{i} & \overset{p}{j} & \overset{p}{k} \\ -4 & 5 & 0 \\ -4 & 9 & -3 \end{vmatrix} = -15\overset{p}{i} - 12\overset{p}{j} - 16\overset{p}{k}, \text{ тобто } [\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}] = (-15, -12, -16).$$

$$\left| [\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}] \right| = \sqrt{(-15)^2 + (-12)^2 + (-16)^2} = \sqrt{625} = 25,$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 25 = 12,5 \text{ (кв. од.)}$$

$$\overrightarrow{AC} = (1-1, 3+1, -1-2) = (0, 4, -3), AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{16+9} = 5.$$

$$BK = \frac{25}{5} = 5 \text{ (од.)}$$

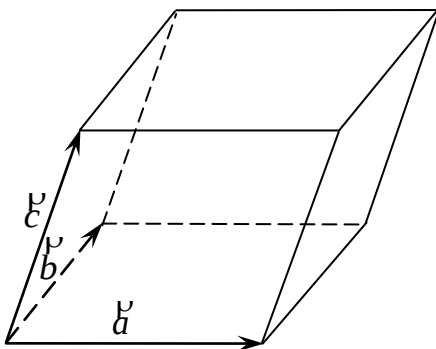
Мішаний добуток трьох векторів і його геометричний зміст

Означення. Мішаним добутком трьох векторів називається число, яке дорівнює скалярному добутку векторного добутку перших двох векторів на третій:

$$a \cdot b \cdot c = [a \cdot b] \cdot c.$$

Теорема (геометричний зміст мішаного добутку)

Модуль мішаного добутку трьох векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах (віднесених до спільного початку – мал. 16). Мішаний добуток – додатне число, якщо вектори утворюють праву трійку; від'ємне число, якщо вектори утворюють ліву трійку і дорівнюють нулю тоді і тільки тоді, коли всі вектори компланарні.



Мал. 16

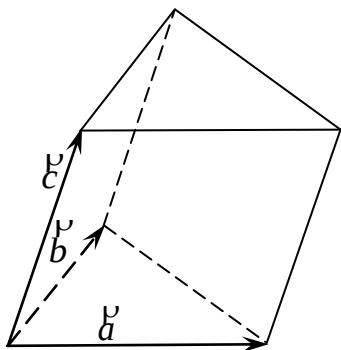
Тобто мішаний добуток має такі властивості:

1)
$$V_{пар-0a} = |a \cdot b \cdot c|,$$

2) $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} > 0$, коли $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – права трійка, $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} < 0$, коли $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – ліва трійка,

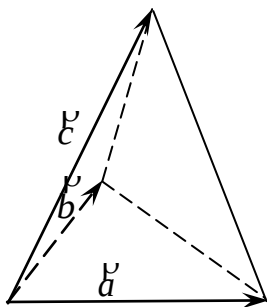
3) $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ тоді і лише тоді, коли вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні.

За допомогою мішаного добутку трьох векторів можна також обчислювати об'єм трикутної призми та трикутної піраміди, побудованих на цих векторах (мал. 17, 18).



Мал. 17

$$V_{тр.призми} = \frac{1}{2} |\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}|$$



Мал. 18

$$V_{тр.пир.} = \frac{1}{6} |\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}|$$

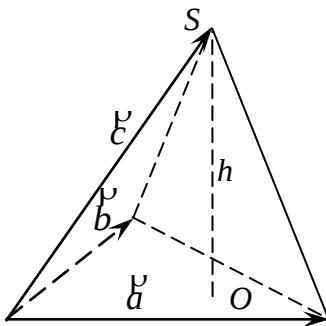
Вираз мішаного добутку трьох векторів через їх координати в ортонормованому базисі

Нехай в ортонормованому базисі $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ мають координати: $\vec{a}(x_1, y_1, z_1), \vec{b}(x_2, y_2, z_2), \vec{c}(x_3, y_3, z_3)$. Тоді

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} -$$

мішаний добуток трьох векторів дорівнює детермінанту третього порядку, в першому рядку якого стоять координати першого вектора, в другому – координати другого вектора, в третьому – координати третього вектора.

Приклад. Обчислити об'єм і висоту трикутної піраміди (мал. 19), побудованої на векторах: $\vec{a}(1, -2, 3), \vec{b}(2, 1, -1), \vec{c}(3, -3, 4)$.



Мал. 19

Об'єм піраміди обчислюватимемо за формулою:

$$V_{тр.пир.} = \frac{1}{6} |\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}|. \text{ З іншого боку: } V_{тр.пир.} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h. \text{ Звідси:}$$

$$\frac{1}{6} |\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}| = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h. \text{ З останньої рівності отримаємо: } h = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}|}{2 \cdot S_{\triangle OAB}}.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 6 - 18 - 9 - 3 + 16 = -4,$$

$$V_{тр.пир.} = \frac{1}{6} \cdot |-4| = \frac{2}{3} \text{ (куб. од.)}$$

$$S_{осн.} = \frac{1}{2} [\vec{a} \cdot \vec{b}], \text{ де } [\vec{a} \cdot \vec{b}] = \begin{vmatrix} i^P & j^P & k^P \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1i^P + 7j^P + 5k^P. \text{ Тоді}$$

$$[\vec{a} \cdot \vec{b}] = (-1, 7, 5), S_{осн.} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 49 + 25} = \frac{1}{2} \sqrt{75} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ (кв. од.)}$$

$$h = \frac{4}{2 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{5\sqrt{3}} \text{ (о д.)}$$

Тестові завдання до теми «Метод координат»

ТЗ 4.1. Що називається проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l^P ?

А. Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l^P називається число $прр\overrightarrow{AB}$, яке дорівнює довжині відрізка $A_l B_l$ між проекціями відповідно початку A і кінця B вектора на вісь l^P .

Б. Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l^P називається число $прр\overrightarrow{AB}$, яке дорівнює довжині відрізка $A_l B_l$ між проекціями відповідно початку A і кінця B вектора на вісь l^P , причому довжина береться зі знаком "+", якщо вектор $\overrightarrow{A_l B_l}$ співнаправлений з віссю l^P $\overrightarrow{A_l B_l} \uparrow \uparrow \vec{l}$, або довжина береться зі знаком "-", якщо вектор $\overrightarrow{A_l B_l}$ напрямлений протилежно осі l^P $\overrightarrow{A_l B_l} \uparrow \downarrow \vec{l}$.

В. Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l^P називається число $прр\overrightarrow{AB}$, яке дорівнює сумі довжин відрізків AA_l і BB_l , де A_l і B_l – проекції відповідно початку A і кінця B вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l^P .

Г. Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l^P називається вектор $прр\overrightarrow{AB}$, який

дорівнює сумі векторів $\vec{AA}_l$ і $\vec{BB}_l$, де A_l і B_l – проекції відповідно початку A і кінця B вектора $\vec{AB}$ на вісь l .

ТЗ 4.2. Чому дорівнює проекція суми $np_f(\vec{a} + \vec{b})$?

А. $np_f(\vec{a} + \vec{b}) = np_f\vec{a} + np_f\vec{b} - 2np_f\vec{a} \cdot np_f\vec{b}$.

Б. $np_f(\vec{a} + \vec{b}) = np_f\vec{a} \cdot np_f\vec{b}$.

В. $np_f(\vec{a} + \vec{b}) = np_f\vec{a} + np_f\vec{b}$.

Г. $np_f(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{b} \cdot np_f\vec{a} + \vec{a} \cdot np_f\vec{b}$.

ТЗ 4.3. Проекція $np_g\vec{b}$ вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$ дорівнює

А. $np_g\vec{b} = |\vec{a}| \sin(\vec{a}^\wedge, \vec{b})$. Б. $np_g\vec{b} = |\vec{a}| \cos(\vec{a}^\wedge, \vec{b})$.

В. $np_g\vec{b} = |\vec{b}| \cos(\vec{a}^\wedge, \vec{b})$. Г. $np_g\vec{b} = |\vec{b}| \sin(\vec{a}^\wedge, \vec{b})$.

ТЗ 4.4. Напрямні косинуси $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ вектора $\vec{a}$ зв'язані співвідношенням

А. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Б. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = |\vec{a}|^2$.

В. $\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma = 1$.

Г. $|\cos\alpha| + |\cos\beta| + |\cos\gamma| = 1$.

ТЗ 4.5. В якому випадку $np_f\vec{a} = 0$?

А. Вектор $\vec{a}$ паралельний до осі l .

Б. Вектор $\vec{a}$ утворює з віссю l кут 30° .

В. Вектор $\vec{a}$ утворює з віссю l кут 45° .

Г. Вектор $\vec{a}$ перпендикулярний до осі l .

ТЗ 4.6. Чому дорівнюють координати вектора $\vec{AB}$, якщо відомі координати його початку $A(x_A, y_A, z_A)$ і кінця $B(x_B, y_B, z_B)$?

А. $\overrightarrow{AB} = (x_A + x_B; y_A + y_B; z_A + z_B)$.

Б. $\overrightarrow{AB} = (x_A - x_B; y_A - y_B; z_A - z_B)$.

В. $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

Г. $\overrightarrow{AB} = (x_A \cdot x_B; y_A \cdot y_B; z_A \cdot z_B)$.

ТЗ 4.7. Як обчислюється модуль (довжина) вектора

$$\vec{\rho} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} ?$$

А. $|\vec{\rho}| = |a_x| + |a_y| + |a_z|$. Б. $|\vec{\rho}| = -\sqrt{a_x^2 + a_y^2 - a_z^2}$.

В. $|\vec{\rho}| = \sqrt{a_x^2 - a_y^2 + a_z^2}$. Г. $|\vec{\rho}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

ТЗ 4.8. Що називається добутком $\lambda \vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на скаляр λ ?

А. Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називається вектор $\lambda \vec{a}$, який має такі властивості: 1) $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$; 2) якщо $\lambda = 0$, то $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$; якщо $\lambda > 0$, то $\lambda \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{a}$; якщо $\lambda < 0$, то $\lambda \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{a}$.

Б. Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називається вектор $\lambda \vec{a}$, який має такі властивості: 1) $|\lambda \vec{a}| = \lambda \cdot |\vec{a}|$; 2) якщо $\lambda = 0$, то $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$; якщо $\lambda > 0$, то $\lambda \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{a}$; якщо $\lambda < 0$, то $\lambda \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{a}$.

В. Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називається вектор $\lambda \vec{a}$, який має такі властивості: 1) $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$; 2) якщо $\lambda = 0$, то $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$; якщо $\lambda \neq 0$, то $\lambda \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{a}$.

Г. Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називається вектор $\lambda \vec{a}$, який має такі властивості: 1) $|\lambda \vec{a}| = \lambda \cdot |\vec{a}|$; 2) якщо $\lambda = 0$, то $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$; якщо $\lambda \neq 0$, то $\lambda \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{a}$.

ТЗ 4.9. Довжина якого з векторів дорівнює $|\vec{a}| = 5$?

А. $\vec{\rho} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$. Б. $\vec{\rho} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\sqrt{3}\vec{k}$.

В. $\vec{\rho} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\sqrt{3}\vec{k}$. Г. $\vec{\rho} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

ТЗ 4.10. Що називається скалярним добутком $\vec{a} \cdot \vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$?

А. Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\angle \vec{a}, \vec{b})$.

Б. Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$.

В. Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$.

Г. Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\angle \vec{a}, \vec{b})$.

ТЗ 4.11. Чому дорівнює скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$ векторів

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad \text{і} \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} ?$$

А. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z$. Б. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x - a_y b_y + a_z b_z$.

В. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_y + a_y b_z + a_z b_x$. Г. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

ТЗ 4.12. Чому дорівнює косинус кута $\varphi = \angle \vec{a}, \vec{b}$ між двома векторами $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ і $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$?

А. $\cos(\angle \vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} + \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$.

Б. $\cos(\angle \vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} - \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$.

В. $\cos(\angle \vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} + \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$.

Г. $\cos(\angle \vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$.

ТЗ 4.13. Для того, щоб ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ були ортогональними (перпендикулярними) $\vec{a} \perp \vec{b}$, необхідно і достатньо, щоб

А. $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$. Б. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. В. $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$. Г. $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$.

ТЗ 4.14. Для того, щоб ненульові вектори $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ і $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ були колінеарними (паралельними) $\vec{a} \parallel \vec{b}$, необхідно і достатньо, щоб

А. $a_x b_y + a_y b_z + a_z b_x = 0$. Б. $a_x b_x - a_y b_y + a_z b_z \neq 0$.

В. $\frac{a_x}{b_x} \neq \frac{a_y}{b_y} \neq \frac{a_z}{b_z}$. Г. $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$.

ТЗ 4.15. Які два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ортогональні (перпендикулярні)?

А. $\begin{cases} \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \\ \vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k} \end{cases}$. Б. $\begin{cases} \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \\ \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k} \end{cases}$.

В. $\begin{cases} \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \\ \vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k} \end{cases}$. Г. $\begin{cases} \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \\ \vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k} \end{cases}$.

ТЗ 4.16. Які два вектори утворюють між собою гострий кут ($\cos \varphi > 0$)?

А. $\begin{cases} \vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k} \\ \vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} \end{cases}$. Б. $\begin{cases} \vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k} \\ \vec{b} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k} \end{cases}$.

В. $\begin{cases} \vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \\ \vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \end{cases}$. Г. $\begin{cases} \vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k} \\ \vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \end{cases}$.

ТЗ 4.17. Які два вектори утворюють між собою тупий кут ($\cos \varphi < 0$)?

А. $\begin{cases} \vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \\ \vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k} \end{cases}$. Б. $\begin{cases} \vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \\ \vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \end{cases}$.

В. $\begin{cases} \vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \\ \vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} \end{cases}$. Г. $\begin{cases} \vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \\ \vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k} \end{cases}$.

ТЗ 4.18. Для яких двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ кут φ між ними дорівнює

$$\varphi = \pi/3 \quad (\cos\varphi = \cos(\pi/3) = 1/2)?$$

$$\text{А. } \begin{cases} \vec{a} = \vec{i} + \sqrt{3}\vec{k} \\ \vec{b} = \sqrt{2}\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j} \end{cases}.$$

$$\text{Б. } \begin{cases} \vec{a} = \vec{j} - \sqrt{3}\vec{k} \\ \vec{b} = \sqrt{6}\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j} \end{cases}.$$

$$\text{В. } \begin{cases} \vec{a} = \vec{i} - \sqrt{3}\vec{k} \\ \vec{b} = 2\vec{j} + \sqrt{3}\vec{k} \end{cases}.$$

$$\text{Г. } \begin{cases} \vec{a} = \vec{j} + \sqrt{3}\vec{k} \\ \vec{b} = \sqrt{6}\vec{i} + \sqrt{3}\vec{k} \end{cases}.$$

ТЗ 4.19. Які два вектори колінеарні (паралельні)?

$$\text{А. } \begin{cases} \vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k} \\ \vec{b} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 8\vec{k} \end{cases}.$$

$$\text{Б. } \begin{cases} \vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k} \\ \vec{b} = 4\vec{i} - 6\vec{j} - 8\vec{k} \end{cases}.$$

$$\text{В. } \begin{cases} \vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k} \\ \vec{b} = -4\vec{i} + 6\vec{j} - 8\vec{k} \end{cases}.$$

$$\text{Г. } \begin{cases} \vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k} \\ \vec{b} = 4\vec{i} - 6\vec{j} - 8\vec{k} \end{cases}.$$

ТЗ 4.20. Який з векторів утворює з віссю Ox напрямний кут $\alpha = 60^\circ$ ($\cos\alpha = a_x/|\vec{a}|$, $\cos 60^\circ = 1/2$)?

$$\text{А. } \vec{a} = \vec{i} + \sqrt{2}\vec{j} + 4\vec{k}.$$

$$\text{Б. } \vec{a} = \sqrt{2}\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j} + \sqrt{3}\vec{k}.$$

$$\text{В. } \vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}.$$

$$\text{Г. } \vec{a} = \vec{i} + 2\sqrt{2}\vec{j} + \sqrt{3}\vec{k}.$$

ТЗ 4.21. Який з векторів утворює з віссю Oy напрямний кут $\beta = 45^\circ$ ($\cos\beta = a_y/|\vec{a}|$, $\cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$)?

$$\text{А. } \vec{a} = \sqrt{2}\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

$$\text{Б. } \vec{a} = \vec{i} + \sqrt{2}\vec{j} + \vec{k}.$$

$$\text{В. } \vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}.$$

$$\text{Г. } \vec{a} = -\vec{i} + \vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}.$$

ТЗ 4.22. Який з векторів утворює з віссю Oz напрямний кут $\gamma = 30^\circ$ ($\cos\gamma = a_z/|\vec{a}|$, $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$)?

$$\text{А. } \vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \sqrt{3}\vec{k}.$$

$$\text{Б. } \vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \sqrt{3}\vec{k}.$$

$$\text{В. } \vec{a} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} + \sqrt{3}\vec{k}.$$

$$\text{Г. } \vec{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}.$$

ТЗ 4.23. Що називається векторним добутком $\left[\vec{r} \cdot \vec{i} \right]$ вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$?

А. Векторним добутком $\left[\overset{\text{r}}{a} \cdot \overset{\text{r}}{b} \right]$ називається вектор $\overset{\text{r}}{c}$, який задовольняє умовам: 1) $|\overset{\text{r}}{c}| = |\overset{\text{r}}{a}| |\overset{\text{r}}{b}| \sin(\overset{\text{r}}{a} \wedge \overset{\text{r}}{b})$; 2) $\overset{\text{r}}{c} \perp \overset{\text{r}}{a}, \overset{\text{r}}{c} \parallel \overset{\text{r}}{b}$; 3) якщо вектори $\overset{\text{r}}{a}, \overset{\text{r}}{b}, \overset{\text{r}}{c}$ відкласти від однієї точки, то з кінця вектора $\overset{\text{r}}{c}$ найкоротший поворот вектора $\overset{\text{r}}{a}$ до суміщення з вектором $\overset{\text{r}}{b}$ видно здійснюваним проти ходу годинникової стрілки.

Б. Векторним добутком $\left[\overset{\text{r}}{a} \cdot \overset{\text{r}}{b} \right]$ називається вектор $\overset{\text{r}}{c}$, який задовольняє умовам: 1) $|\overset{\text{r}}{c}| = |\overset{\text{r}}{a}| |\overset{\text{r}}{b}| \cos(\overset{\text{r}}{a} \wedge \overset{\text{r}}{b})$; 2) $\overset{\text{r}}{c} \perp \overset{\text{r}}{a}, \overset{\text{r}}{c} \perp \overset{\text{r}}{b}$; 3) якщо вектори $\overset{\text{r}}{a}, \overset{\text{r}}{b}, \overset{\text{r}}{c}$ відкласти від однієї точки, то з кінця вектора $\overset{\text{r}}{c}$ найкоротший поворот вектора $\overset{\text{r}}{a}$ до суміщення з вектором $\overset{\text{r}}{b}$ видно здійснюваним проти ходу годинникової стрілки.

В. Векторним добутком $\left[\overset{\text{r}}{a} \cdot \overset{\text{r}}{b} \right]$ називається вектор $\overset{\text{r}}{c}$, який задовольняє умовам: 1) $|\overset{\text{r}}{c}| = |\overset{\text{r}}{a}| |\overset{\text{r}}{b}| \sin(\overset{\text{r}}{a} \wedge \overset{\text{r}}{b})$; 2) $\overset{\text{r}}{c} \perp \overset{\text{r}}{a}, \overset{\text{r}}{c} \perp \overset{\text{r}}{b}$; 3) якщо вектори $\overset{\text{r}}{a}, \overset{\text{r}}{b}, \overset{\text{r}}{c}$ відкласти від однієї точки, то з кінця вектора $\overset{\text{r}}{c}$ найкоротший поворот вектора $\overset{\text{r}}{a}$ до суміщення з вектором $\overset{\text{r}}{b}$ видно здійснюваним проти ходу годинникової стрілки.

Г. Векторним добутком $\left[\overset{\text{r}}{a} \cdot \overset{\text{r}}{b} \right]$ називається вектор $\overset{\text{r}}{c}$, який задовольняє умовам: 1) $|\overset{\text{r}}{c}| = |\overset{\text{r}}{a}| |\overset{\text{r}}{b}| \sin(\overset{\text{r}}{a} \wedge \overset{\text{r}}{b})$; 2) $\overset{\text{r}}{c} \perp \overset{\text{r}}{a}, \overset{\text{r}}{c} \perp \overset{\text{r}}{b}$; 3) якщо вектори $\overset{\text{r}}{a}, \overset{\text{r}}{b}, \overset{\text{r}}{c}$ відкласти від однієї точки, то з кінця вектора $\overset{\text{r}}{c}$ найкоротший поворот вектора $\overset{\text{r}}{a}$ до суміщення з вектором $\overset{\text{r}}{b}$ видно здійснюваним за ходом годинникової стрілки.

ТЗ 4.24. Векторний добуток $\left[\overset{\text{r}}{a} \cdot \overset{\text{r}}{b} \right]$ векторів $\overset{\text{r}}{a}$ і $\overset{\text{r}}{b}$ дорівнює нулю, якщо

А. Вектори $\overset{\text{r}}{a}$ і $\overset{\text{r}}{b}$ перпендикулярні ($\overset{\text{r}}{a} \perp \overset{\text{r}}{b}$).

Б. Вектори $\overset{\text{r}}{a}$ і $\overset{\text{r}}{b}$ колінеарні $\overset{\text{r}}{a} \parallel \overset{\text{r}}{b}$.

В. Вектори $\overset{\text{r}}{a}$ і $\overset{\text{r}}{b}$ утворюють між собою кут $\overset{\text{r}}{a} \wedge \overset{\text{r}}{b} = \pi/4$.

Г. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють між собою кут $\angle \vec{a}, \vec{b} = \pi/6$.

ТЗ 4.25. Чому дорівнює векторний добуток $[\vec{a} \cdot \vec{b}]$ векторів

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad \text{і} \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} ?$$

$$\text{А. } [\vec{a} \cdot \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad \text{Б. } [\vec{a} \cdot \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

$$\text{В. } [\vec{a} \cdot \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & -a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad \text{Г. } [\vec{a} \cdot \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & b_x & a_x \\ \vec{j} & b_y & a_y \\ \vec{k} & b_z & a_z \end{vmatrix}.$$

ТЗ 4.26. Модуль (довжина) векторного добутку $[\vec{a} \cdot \vec{b}]$ дорівнює

$$\text{А. } \left| [\vec{a} \cdot \vec{b}] \right| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\angle \vec{a}, \vec{b}). \quad \text{Б. } \left| [\vec{a} \cdot \vec{b}] \right| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \sin(\angle \vec{a}, \vec{b}).$$

$$\text{В. } \left| [\vec{a} \cdot \vec{b}] \right| = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\angle \vec{a}, \vec{b}). \quad \text{Г. } \left| [\vec{a} \cdot \vec{b}] \right| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \sin(\angle \vec{a}, \vec{b}).$$

ТЗ 4.27. Як розташований векторний добуток $[\vec{a} \cdot \vec{b}] = \vec{c}$ у відношенні до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$?

$$\text{А. } [\vec{a} \cdot \vec{b}] = \vec{c} \perp \vec{a}; \vec{c} \parallel \vec{b}. \quad \text{Б. } [\vec{a} \cdot \vec{b}] = \vec{c} \parallel \vec{a}; \vec{c} \parallel \vec{b}.$$

$$\text{В. } [\vec{a} \cdot \vec{b}] = \vec{c} \parallel \vec{a}; \vec{c} \perp \vec{b}. \quad \text{Г. } [\vec{a} \cdot \vec{b}] = \vec{c} \perp \vec{a}; \vec{c} \perp \vec{b}.$$

ТЗ 4.28. Для якої пари векторів площа паралелограма, побудованого на них, як на сторонах, дорівнює $S = \sqrt{26}$ кв. од.?

$$\text{А. } \begin{cases} \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \\ \vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} \end{cases}. \quad \text{Б. } \begin{cases} \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \\ \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} \end{cases}.$$

$$\text{В. } \begin{cases} \vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \\ \vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} \end{cases}. \quad \text{Г. } \begin{cases} \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \\ \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k} \end{cases}.$$

ТЗ 4.29. Для якої пари векторів векторний добуток $\begin{bmatrix} \vec{r} & \vec{l} \\ \vec{a} & \vec{b} \end{bmatrix}$ колінеарний (паралельний) до вектора $\vec{c} = 8\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}$?

- А. $\begin{cases} \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \\ \vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} \end{cases}$. Б. $\begin{cases} \vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} \\ \vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k} \end{cases}$.
- В. $\begin{cases} \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \\ \vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \end{cases}$. Г. $\begin{cases} \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \\ \vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k} \end{cases}$.

ТЗ 4.30. Для якої пари векторів їх векторний добуток $\begin{bmatrix} \vec{r} & \vec{l} \\ \vec{a} & \vec{b} \end{bmatrix}$ дорівнює нулю?

- А. $\begin{cases} \vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \\ \vec{b} = 4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \end{cases}$. Б. $\begin{cases} \vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} \\ \vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k} \end{cases}$.
- В. $\begin{cases} \vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} \\ \vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \end{cases}$. Г. $\begin{cases} \vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \\ \vec{b} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k} \end{cases}$.

ТЗ 4.31. Для якої пари векторів їх векторний добуток $\begin{bmatrix} \vec{r} & \vec{l} \\ \vec{a} & \vec{b} \end{bmatrix}$ ортогональний (перпендикулярний) до вектора $\vec{c} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$?

- А. $\begin{cases} \vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \\ \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \end{cases}$. Б. $\begin{cases} \vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \\ \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} \end{cases}$.
- В. $\begin{cases} \vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \\ \vec{b} = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k} \end{cases}$. Г. $\begin{cases} \vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \\ \vec{b} = 4\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k} \end{cases}$.

ТЗ 4.32. Чому дорівнює мішаний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ трьох векторів $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ і $\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$?

- А. $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$. Б. $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$.

$$\text{В. } \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad \text{Г. } \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

ТЗ 4.33. В якому випадку мішаний добуток трьох векторів $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ дорівнює нулю?

А. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ взаємно перпендикулярні.

Б. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лінійно незалежні.

В. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарні (розташовані в одній площині або в паралельних площинах).

Г. Вектор $\vec{a} + \vec{b}$ перпендикулярний до вектора $\vec{c}$.

ТЗ 4.34. Для якої трійки векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ їх мішаний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ дорівнює нулю?

$$\text{А. } \begin{cases} \vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \\ \vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k} \\ \vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \end{cases} \quad \text{Б. } \begin{cases} \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \\ \vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k} \\ \vec{c} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \end{cases}.$$

$$\text{В. } \begin{cases} \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \\ \vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k} \\ \vec{c} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} \end{cases} \quad \text{Г. } \begin{cases} \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \\ \vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k} \\ \vec{c} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} \end{cases}.$$

ТЗ 4.35. Яка трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ є правою?

$$\text{А. } \begin{cases} \vec{a} = 3\vec{i} \\ \vec{b} = 2\vec{i} - 5\vec{j} \\ \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k} \end{cases} \quad \text{Б. } \begin{cases} \vec{a} = 3\vec{i} \\ \vec{b} = 2\vec{i} + 5\vec{j} \\ \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} \end{cases}.$$

$$\text{В. } \begin{cases} \vec{a} = 3\vec{i} \\ \vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} \\ \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k} \end{cases} \quad \text{Г. } \begin{cases} \vec{a} = -2\vec{i} \\ \vec{b} = 2\vec{i} - 5\vec{j} \\ \vec{c} = \vec{j} + \vec{i} - 4\vec{k} \end{cases}.$$

ТЗ 4.36. Яка трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ є лівою?

A.
$$\begin{cases} \vec{a} = 3\vec{i} \\ \vec{b} = 2\vec{i} - 5\vec{j} \\ \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k} \end{cases}.$$

Б.
$$\begin{cases} \vec{a} = 3\vec{i} \\ \vec{b} = 2\vec{i} - 5\vec{j} \\ \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k} \end{cases}.$$

В.
$$\begin{cases} \vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \\ \vec{b} = \vec{j} + 2\vec{k} \\ \vec{c} = 5\vec{k} \end{cases}.$$

Г.
$$\begin{cases} \vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \\ \vec{b} = -\vec{j} + \vec{k} \\ \vec{c} = -5\vec{k} \end{cases}.$$

ТЗ 4.37. Яка трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ є ребрами паралелепіпеда, об'єм якого дорівнює $V = 2$ куб.од.?

A.
$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{i} + \vec{k} \\ \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} \\ \vec{c} = \vec{j} + \vec{k} \end{cases}.$$

Б.
$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{i} - \vec{k} \\ \vec{b} = \vec{j} + \vec{k} \\ \vec{c} = \vec{i} + \vec{k} \end{cases}.$$

В.
$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{i} + \vec{k} \\ \vec{b} = 2\vec{j} - \vec{k} \\ \vec{c} = \vec{i} - 2\vec{k} \end{cases}.$$

Г.
$$\begin{cases} \vec{a} = 3\vec{i} + \vec{k} \\ \vec{b} = \vec{j} - \vec{k} \\ \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} \end{cases}.$$

ТЗ 4.38. Які три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис у тривимірному просторі?

A. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють у просторі базис, якщо вони лінійно залежні.

Б. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють у просторі базис, якщо їх мішаний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$.

В. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють у просторі базис, якщо $\vec{a} \parallel \vec{b} \parallel \vec{c}$.

Г. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють у просторі базис, якщо вони лінійно незалежні.

ТЗ 4.39. Яка трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лінійно незалежна?

А.
$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} \\ \vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k} \\ \vec{c} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k} \end{cases}.$$

Б.
$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \\ \vec{b} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} \\ \vec{c} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \end{cases}.$$

В.
$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \\ \vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k} \\ \vec{c} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k} \end{cases}.$$

Г.
$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} \\ \vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} \\ \vec{c} = 4\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k} \end{cases}.$$

ТЗ 4.40. Яка трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лінійно залежна?

А.
$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} \\ \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k} \\ \vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k} \end{cases}.$$

Б.
$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \\ \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k} \\ \vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k} \end{cases}.$$

В.
$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \\ \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \\ \vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} \end{cases}.$$

Г.
$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \\ \vec{b} = 6\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} \\ \vec{c} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \end{cases}.$$

ТЗ 4.41. Яка трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворює базис у просторі?

А.
$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{i} + \vec{k} \\ \vec{b} = \vec{j} + \vec{k} \\ \vec{c} = \vec{i} - \vec{k} \end{cases}.$$

Б.
$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{i} + 2\vec{k} \\ \vec{b} = \vec{j} + \vec{k} \\ \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} \end{cases}.$$

В.
$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{j} + 2\vec{k} \\ \vec{b} = \vec{i} - 2\vec{k} \\ \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} \end{cases}.$$

Г.
$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{i} + \vec{k} \\ \vec{b} = \vec{j} - \vec{k} \\ \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} \end{cases}.$$

Список використаної літератури

1. Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник. – Львів: «Новий світ–2000», 2007. – 436 с.
2. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: Видавництво А. С. К., 2004, – 648 с.
3. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник. / За ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика – К.: Видавництво А. С. К., 2003, – 480 с.
4. Рудницький В.Б., Кантемір І.І. Практичні заняття з курсу вищої математики. Частина 2.: Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. – Хмельницький.: ТУП. 2000. – 315 с.
5. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник. / За ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика – К.: Видавництво А. С. К., 2003, – 480 с.

6. Клепко В. Ю., Голець В. Л., Вища математика в прикладах і задачах: Навч. посібник. 2-ге видання. – К.: Центр учбової літератури, 2009, – 594с.
7. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 1: навч. посібник. – Харків: ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015, – 250 с.
8. Валєєв К. Г., Лютий О. І., Макаренко О. І. та інші. Вища математика: навч. метод посібник для сам. вивчення дисципліни. – К.: КНЕУ, 2002, – 606 с.
9. Лютий О. І., Макаренко О. І. Збірник задач з вищої математики. – К.: КНЕУ, 2003, – 305 с.
10. Лісовська В. П., Перестюк М. О. Вища математика. Практикум. ч. I – К.: КНЕУ, 2009, – 720 с.
11. Лісовська В. П., Перестюк М. О. Вища математика. Практикум. ч. II. – К.: КНЕУ, 2012, – 448 с.
12. Тевяшев А. Д., Литвин О. Г. Вища математика у прикладах та задачах. Ч. 1. - Харків: ХНУРЕ; Фактор, 2004. – 592 с. 2.

З М І С Т

Передмова	3
1. Визначники	3
Тестові завдання до теми	
«Визначники»	7
2. Матриці та дії над ними	13
Тестові завдання до теми	
«Матриці та дії над ними»	15
3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь .	26
Тестові завдання до теми	

<i>« Системи лінійних алгебраїчних рівнянь » ..</i>	31
4. Метод координат	38
Тестові завдання до теми	
<i>« Метод координат »</i>	53
<i>Список використаної літератури</i>	65

Вища математика [Текст]: методичні вказівки до виконання контрольних робіт для здобувачів освіти освітньо-професійного ступеня фаховий молодший бакалавр галузь знань 19 Архітектура і будівництво спеціальності 192 Будівництво та цивільна і інженерія освітньо-професійної програми Будівництво та експлуатація будівель і споруд галузь знань 20 Аграрні науки та продовольство спеціальності 208 Агроінженерія галузь знань 07 Управління та адміністрування спеціальності 071 Облік і оподаткування галузь знань 27 Транспорт спеціальності 274 Автомобільний транспорт галузь знань 13 Механічна інженерія спеціальності 133 Галузеве машинобудування / уклад. В.С.Кулик. М.В. Баховська, Т.П. Кузьмич – Любешів: ВСП «Любешівський ТФК ЛНТУ, 2023. – 67 с.

Редактор:

М.В. Баховська

Підр. до друку _____ 2023р. Формат А5.
Папір офіс. Гарн.Таймс. Ум.друк. арк. 3,5.
Обл. вид. арк. 3,4. Тираж 15 прим. Зам. _____