

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ВІДОКРЕМЛЕНИЙ СТРУКТУРНИЙ ПІДРОЗДІЛ «ЛЮБЕШІВСЬКИЙ ТЕХНІЧНИЙ ФАХОВИЙ КОЛЕДЖ
ЛУЦЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ»

Циклова комісія викладачів математичних та
природничо-наукових дисциплін



Вища математика

Конспект лекцій

для здобувачів освіти освітньо-професійного ступеня фаховий молодший
бакалавр

галузь знань 19 Архітектура і будівництво
спеціальності 192 Будівництво та цивільна інженерія
освітньо-професійної програми
Будівництво та експлуатація будівель і споруд
галузь знань 20 Аграрні науки та продовольство
спеціальності 208 Агроінженерія
галузь знань 07 Управління та адміністрування
спеціальності 071 Облік і оподаткування
галузь знань 13 Механічна інженерія
спеціальності 133 Галузеве машинобудування
галузь знань 27 Транспорт
спеціальності 274 Автомобільний транспорт
денної форми навчання

Любешів 2023

УДК 51 (07)

К 88

До друку

Голова методичної ради ВСП «Любешівський ТФК ЛНТУ»

_____ Герасимик-Чернова Т.П.

(підпис)

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в

репозитарій коледжу

Бібліотекар _____ М.М. Демих

(підпис)

Рекомендовано до видання методичною радою ВСП «Любешівський ТФК ЛНТУ»

протокол № _____ від _____ 2023 року

Розглянуто і схвалено на засіданні циклової методичної комісії

викладачів математичних та природничо-наукових дисциплін ВСП «Любешівський ТФК ЛНТУ»,

протокол № _____ від _____ 2023 року

Голова циклової методичної комісії _____ Остимчук А.В.

(підпис)

Укладачі: _____ Кулик В.С.,

_____ Баховська М.В.,

_____ Кузьмич Т.П.

(підпис)

Вища математика [Текст]: конспект лекцій для здобувачів освіти освітньо-професійного ступеня фаховий молодший бакалавр галузь знань 19 Архітектура і будівництво спеціальності 192 Будівництво та цивільна інженерія освітньо-професійної програми Будівництво та експлуатація будівель і споруд галузь знань 20 Аграрні науки та продовольство спеціальності 208 Агроінженерія галузь знань 07 Управління та адміністрування спеціальності 071 Облік і оподаткування галузь знань 27 Транспорт спеціальності 274 Автомобільний транспорт галузь знань 13 Механічна інженерія спеціальності 133 Галузеве машинобудування денної форми навчання / уклад. В.С.Кулик., Т.П. Кузьмич, М.В. Баховська – Любешів: ВСП «Любешівський ТФК ЛНТУ», 2023 –104 с.

Методична робота містить курс лекцій з основ вищої математики та приклади розв'язання основних типів задач. Дане видання розроблене на допомогу у підготовці до здачі екзамену з основ вищої математики студентам вищих навчальних закладів I-II рівнів акредитації.

© В.С. Кулик, Т.П. Кузьмич, М.В. Баховська 2023

Розділ 1

Елементи лінійної алгебри

§-1. Перестановки n -го порядку. Поняття матриці.

Означення детермінанта n -го порядку

Розглянемо множину $M_n = \{1, 2, 3, 4, \dots, n-1, n\}$ перших n натуральних чисел. Запис усіх елементів цієї множини у будь-якому порядку називається *перестановкою n -го порядку*. Обчислимо, скільки таких перестановок n -го порядку можна утворити.

На перше місце елемент можна обрати n способами, на друге – $n-1$ способом, на третє – $n-2$ способами і т.д., на n -не місце елемент можна буде обрати єдиним способом. Тому кількість усіх перестановок з n елементів буде рівна $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Добуток перших n натуральних чисел позначають $n!$ (читається n -факторіал), тобто

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n. \quad (1.1)$$

Отже, перестановок n -го порядку є $n!$.

Наприклад, перестановок другого порядку є $2! = 1 \cdot 2 = 2$, третього – $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, четвертого – $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, і т.д.

Означення. Кажуть, що два елементи перестановки i та j утворюють *інверсію*, якщо число $i < j$, але воно записане пізніше за j . Якщо кількість інверсій у перестановці парне число, то така перестановка називається *парною*, якщо кількість інверсій у перестановці непарне число, то перестановка називається *непарною*.

Приклад 1. Визначити кількість інверсій у перестановці 5-го порядку: (4,2,3,1,5)

Оскільки 1 утворює інверсію з 4,2,3;

2 – з 4;

3 – з 4;

4 і 5 не утворюють інверсій, то всього інверсій: $3+1+1+0+0=5$.

Введемо поняття матриці:

Означення. Матрицею порядку $m \times k$ називається прямокутна таблиця, що складається з m рядків, k стовбців і $m \times k$ чисел, що стоять у ній.

Матриці записують у вигляді:

$$A_{m \times k} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Розглянемо квадратну матрицю n -го порядку:

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Означення. Детермінантом (визначником) матриці A n -го порядку називається алгебраїчна сума $n!$ доданків, кожен з яких є добутком n елементів цієї матриці, взятих по одному і тільки по одному з кожного рядка і кожного стовбця цієї матриці. Знак кожного такого добутку рівний $(-1)^l$, де l – кількість інверсій у перестановці других індексів, при умові, що перші індекси впорядковані:

$$\det A = \sum_{n!} (-1)^l a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot a_{3\alpha_3} \dots a_{(n-1)\alpha_{n-1}} a_{n\alpha_n}, \quad (1.4)$$

де

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.5)$$

Знайдемо формулу для визначення визначника 2-го порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Для цього складемо таблицю:

Добуток	Перестановка других індексів	Кількість інверсій	Знак добутку
$a_{11} \cdot a_{22}$	(1,2)	0	$(-1)^0 = +1$
$a_{12} \cdot a_{21}$	(2,1)	1	$(-1)^1 = -1$

За означенням детермінанта отримаємо:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \quad (1.6)$$

Отже, визначник 2-го порядку можна обчислювати за схемою:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix}.$$

Приклад. Обчислити:

$$\begin{vmatrix} 11 & -4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 11 \cdot 5 - 6 \cdot (-4) = 55 + 24 = 79.$$

Знайдемо формулу для визначення визначника 3-го порядку:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} \end{vmatrix}$$

Складемо таблицю:

Добуток	Перестановка других індексів	Кількість інверсій	Знак добутку
$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$	(1,2,3)	0	$(-1)^0 = +1$
$a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$	(1,3,2)	1	$(-1)^1 = -1$
$a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$	(2,1,3)	1	$(-1)^1 = -1$
$a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$	(2,3,1)	2	$(-1)^2 = +1$
$a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$	(3,2,1)	3	$(-1)^3 = -1$
$a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$	(3,1,2)	2	$(-1)^2 = +1$

За означенням детермінанта отримаємо:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}. \quad (1.7)$$

Отже, визначник 3-го порядку можна обчислювати за схемою:

Приклад. Обчислити:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 7 + (-1) \cdot 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 \cdot 5 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot 5 - (-1) \cdot 0 \cdot 7 = 45.$$

§-2. Метод Гаусса і метод Гаусса-Жордана розв'язування систем лінійних рівнянь

Означення. Системою k лінійних рівнянь з n невідомими називається система виду:

[illegible]

де $a_{ij}, b_i \in R(i = \overline{1, k}, j = \overline{1, n})$ – задані дійсні числа, $x_j (j = \overline{1, n})$ – змінні. Розв'язком системи

називається n -вимірний вектор $\vec{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0)$ такий, що при підстановці його

координат замість відповідних змінних, кожне рівняння системи (1.8) перетворюється на правильну рівність.

Означення. Система, яка має розв'язок, називається *сумісною*, а система, яка не має розв'язку – *несумісною*.

Означення. Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, *невизначеною* – коли система має безліч розв'язків.

Метод Гаусса полягає у послідовному виключенні невідомих з рівнянь:

x_1 виключаємо з усіх рівнянь, крім першого;

x_2 – з усіх рівнянь, крім першого і другого;

x_3 – з усіх рівнянь, крім першого, другого і третього і т.д.

Для сумісних систем лінійних рівнянь можливі два випадки:

1. В останньому рівнянні залишиться одне невідоме. Тоді система матиме єдиний розв'язок, який шукається «знизу-вгору».

2. В останньому рівнянні залишиться більш, ніж одне невідоме. Тоді лишаємо у лівій частині цього рівняння лише одну змінну, а інші переносимо у праву частину рівняння і називатимемо їх *вільними змінними*. Вільним змінним можна надавати довільних значень і шукати відповідні значення інших невідомих. В цьому випадку система матиме безліч розв'язків, тобто буде невизначеною.

Приклад. Розв'язати систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 49. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему за допомогою матриць:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & | & -5 \\ 1 & 1 & -1 & | & 5 \\ 1 & 2 & 1 & | & 49 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-3\parallel \\ -3\parallel\parallel}} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & | & -5 \\ 0 & -7 & 4 & | & -20 \\ 0 & -10 & -2 & | & -152 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{7\parallel\parallel \\ -10\parallel}} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & | & -5 \\ 0 & -7 & 4 & | & -20 \\ 0 & 0 & -54 & | & -864 \end{pmatrix} \xrightarrow{\div(-54)} \sim \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & | & -5 \\ 0 & -7 & 4 & | & -20 \\ 0 & 0 & 1 & | & 16 \end{pmatrix}.$$

З останньої матриці отримаємо систему:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -5, \\ -7x_2 + 4x_3 = -20, \\ x_3 = 16; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = -21, \\ -7x_2 = -84, \\ x_3 = 16; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 9, \\ x_2 = 12, \\ x_3 = 16. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(9;12;16)\}$.

Приклад2. Розв'язати систему методом Гаусса - Жордана:

З останньої матриці отримуємо:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = -1. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(0;1;-1)\}$.

§-3. Метод Крамера розв'язування систем лінійних рівнянь

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими:

[illegible]

Введемо позначення:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta \neq 0$, то розв'язок системи (1.9) шукають за формулами Крамера:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \\ \dots \\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \end{cases} \quad (1.10)$$

Приклад. Розв'язати систему методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 12, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 12, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 12, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Скориставшись формулами Крамера, отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{12}{12} = 1, \\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{12}{12} = 1, \\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{12} = 0. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(1;1;0)\}$.

§-4. Дії над матрицями

Означення. Сумою двох матриць $A_{m \times k} = (a_{ij})$ і $B_{m \times k} = (b_{ij})$, де $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, k}$,

називається матриця $C_{m \times k} = (c_{ij})$, де $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для $\forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, k}$.

Означення. Добутком матриці $A_{m \times k} = (a_{ij})$ на число λ називається матриця

$\lambda A_{m \times k} = (\lambda a_{ij})$, де $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, k}$.

Означення. Добутком двох матриць $A_{m \times k} = (a_{ir})$ і $B_{k \times p} = (b_{rj})$, де $i = \overline{1, m}, r = \overline{1, k}, j = \overline{1, p}$, називається матриця $C_{m \times p} = (c_{ij})$, де

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \dots + a_{ik} \cdot b_{kj} = \sum_{r=1}^k a_{ir} \cdot b_{rj} \quad (1.11)$$

для $\forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, p}$.

Приклад. Нехай $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Знайти $A + B$, $3A$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad 3A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -6 & 15 \\ 0 & 12 & 3 & -12 \end{pmatrix}.$$

Приклад. Нехай $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Знайти $A \times B$.

$$A \times B = \begin{pmatrix} 10 & 8 & -17 \\ -12 & 5 & 18 \end{pmatrix}.$$

Властивості дій над матрицями:

1. $\forall A, B : A + B = B + A$;
2. $\forall A, B, C : (A + B) + C = A + (B + C)$;
3. $\forall A, B, \forall \lambda : \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
4. $\forall A, \forall \lambda, \mu : (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
5. $A \times B \neq B \times A$ (в загальному випадку);
6. $\forall A, B, C : (A \times B) \times C = A \times (B \times C)$;
7. $\forall A, B, C : (A + B) \times C = A \times C + B \times C$.

§-5. Одинична матриця. Обернена матриця та її обчислення за допомогою елементарних перетворень

Означення. Одиничною матрицею n -го порядку називається така квадратна матриця, в якій по головній діагоналі розміщені «одиниці», а інші елементи – нулі.

Наприклад, одинична матриця 4-го порядку має вигляд:

$$E_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Одинична матриця E має ту властивість, що при множенні її чи зліва, чи справа на довільну матрицю одержуємо ту ж матрицю. Тобто, для будь-якої матриці A виконуються рівності:

$$A \times E = E \times A = A. \quad (1.12)$$

Означення. Матриця B називається *оберненою до матриці A* , якщо виконуються рівності:

$$A \times B = B \times A = E. \quad (1.13)$$

Обернену матрицю до матриці A позначають A^{-1} .

З означення слідує, що якщо матриця B обернена до матриці A , то і A – обернена до B , тобто має місце рівність:

$$(A^{-1})^{-1} = A. \quad (1.14)$$

Обернені матриці існують тільки для квадратних матриць A , причому таких, що $\det A \neq 0$.

Для знаходження оберненої матриці до матриці A складають матрицю виду: $(A|E)$, де E – одинична матриця того ж порядку, що й A . Утворену матрицю за допомогою елементарних перетворень зводять до вигляду: $(E|B)$. Тоді покладають: $A^{-1} = B$.

Приклад. Знайти обернену матрицю до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Складаємо матрицю:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} (1) & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 2 & 1 \end{array} \right) \times (-1) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 2 & 1 \end{array} \right) \times (-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & (1) & -7 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -4 & 5 & 1 \end{array} \right) \div 12 \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -\frac{1}{12} & \frac{2}{12} & 0 \\ 0 & 1 & -7 & \frac{2}{12} & -\frac{3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & (1) & -\frac{4}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{5}{12} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{7}{12} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \end{array} \right) \sim \\ & \text{Звідси отримаємо: } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{4}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{7}{12} \\ -\frac{4}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -4 & -1 & 7 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

§-6. Обчислення оберненої матриці за допомогою алгебраїчних доповнень

Нехай маємо квадратну матрицю n -го порядку:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Розглянемо детермінант n -го порядку, що відповідає цій матриці:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.16)$$

Означення. Мінором елемента a_{ij} детермінанта n -го порядку називається детермінант $(n-1)$ -го порядку, який одержується з даного детермінанта викресленням i -того рядка та j -того стовбця.

Мінор елемента a_{ij} позначається: M_{ij} .

Означення. Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} називається число:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \quad (1.17)$$

Теорема

Нехай задано матрицю A рівністю (1.15). Тоді, якщо $\det A = \Delta \neq 0$, то обернену матрицю до матриці A можна обчислити за допомогою рівності:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \dots & A_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

Приклад. Знайти обернену матрицю до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ за допомогою

алгебраїчних доповнень.

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \text{ де } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 37,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -3, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

Позначимо:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Матриця A^{-1} для даної матриці була знайдена в прикладі у §-6:

$$A^{-1} = \frac{1}{37} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 1 & 13 & -22 \\ -8 & 7 & -9 \end{pmatrix}$$

Скориставшись формулою (1.21), отримаємо:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{37} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 1 & 13 & -22 \\ -8 & 7 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{37} \begin{pmatrix} 37 \\ -74 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Звідси: } \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -2, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(1; -2; 0)\}$.

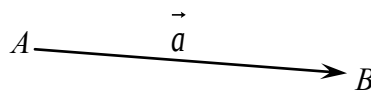
Розділ 2

Метод координат

§-1. Поняття вектора. Колінеарні і компланарні вектори

Під *вектором* будемо розуміти напрямлений відрізок.

Для векторів застосовують позначення: $\vec{a}, \overrightarrow{AB}$. В останньому випадку точку A називають *початком вектора*, точку B – *кінцем вектора* $\overrightarrow{AB}$ (мал.1).



мал. 1

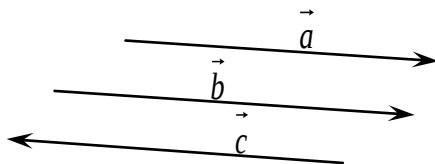
Означення. Вектор, у якого початок співпадає з кінцем, називається *нульовим*.

Нульовий вектор позначається: $\vec{0}$. Напрямок нульового вектора невизначений.

Означення. Вектори називаються *колінеарними*, якщо вони паралельні до однієї прямої або лежать на одній прямій.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – колінеарні, то це позначають так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Означення. Паралельні вектори називаються *співнаправленими*, якщо вони лежать в одній півплощині відносно прямої, що проходить через початки цих векторів; *протилежно напрямленими* – якщо вони лежать в різних півплощинах відносно цієї прямої.



мал. 2

На мал.2 вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – співнаправлені: $\vec{a} \uparrow \vec{b}$, вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – протилежно напрямлені: $\vec{b} \downarrow \vec{c}$.

Вектор $\overrightarrow{BA}$ називається *протилежним* до вектора $\overrightarrow{AB}$, тобто: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Означення. Три вектори називаються *компланарними*, якщо вони паралельні до однієї площини або лежать в одній площині.

Довжина вектора $\vec{a}$ позначається $|\vec{a}|$.

Означення. Вектори називаються *рівними*, якщо вони співнаправлені і мають однакову довжину, тобто:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow 1. \vec{a} \uparrow \vec{b}, 2. |\vec{a}| = |\vec{b}|.$$

Теорема

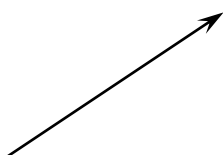
З будь-якої точки простору можна побудувати вектор, рівний даному, і при тому тільки один.

§-2. Лінійні операції над векторами

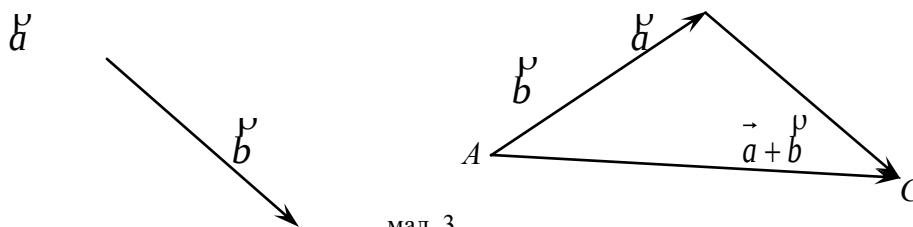
I. Додавання векторів.

Означення. Сумою двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{a} + \vec{b}$, який будується за таким правилом:

- 1) з довільної точки A будуємо вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$;
- 2) з його кінця – точки B будуємо вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$;
- 3) сполучаємо початок вектора $\vec{a}$ – точку A з кінцем вектора $\vec{b}$ – точкою C .



B



мал. 3

Таке правило побудови суми двох векторів називається *правилом трикутника*.

Як бачимо з мал.3, для суми векторів справедлива рівність:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} . \quad (2.1)$$

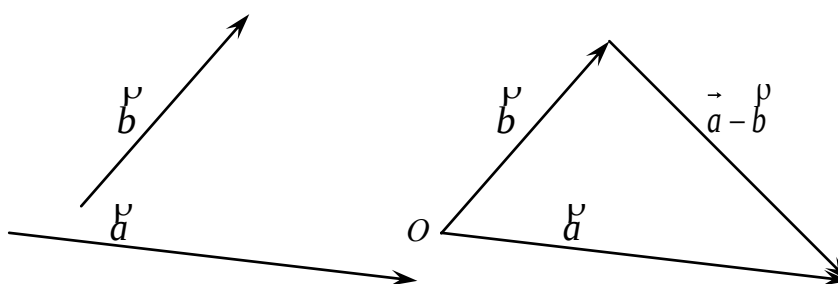
Властивості суми векторів:

1. $\forall a, b: a + b = b + a$ – комутативність;
2. $\forall a, b, c: (a + b) + c = a + (b + c)$ – асоціативність;
3. $\forall a: a + 0 = 0 + a = a$;
4. $\forall a: a + (-a) = (-a) + a = 0$.

II. Віднімання векторів.

Означення. Різницею двох векторів a і b називається такий вектор c , який в сумі з вектором b дає вектор a .

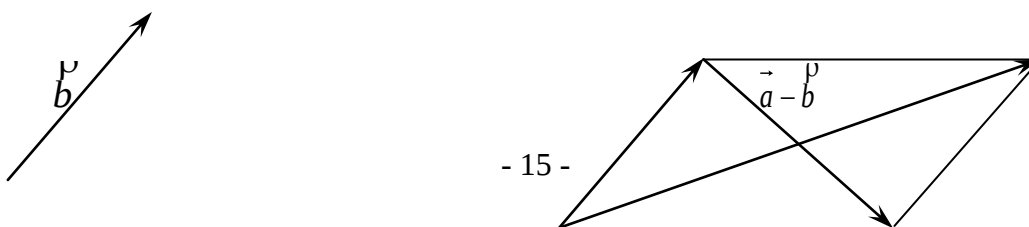
Щоб знайти різницю двох векторів, досить віднести ці вектори до спільного початку, з'єднати їхні кінці і поставити стрілку біля того вектора, від якого віднімаємо (мал.4).



мал. 4

Для знаходження суми і різниці двох векторів також користуються *правилом паралелограма*:

З довільної точки будуємо обидва вектори, на цих векторах добудовуємо паралелограм. Сумою цих векторів є діагональ паралелограма, яка виходить із спільного початку, їх різницею є інша діагональ (мал. 5).





мал.5

III. Множення вектора на число.

Означення. Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називається вектор $\lambda\vec{a}$, довжина якого дорівнює добутку довжини цього вектора на модуль числа. Цей вектор співнапрямлений з даним вектором, якщо число додатне; протилежно напрямлений, якщо число від'ємне і дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли або число дорівнює нулю, або вектор дорівнює нулю.

Тобто, вектор $\lambda\vec{a}$ задовольняє наступні умови:

- 1) $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$,
- 2) $\lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, якщо $\lambda > 0$,
- 3) $\lambda\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, якщо $\lambda < 0$,
- 4) $\lambda\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ або $\vec{a} = \vec{0}$.

Властивості добутку вектора на число:

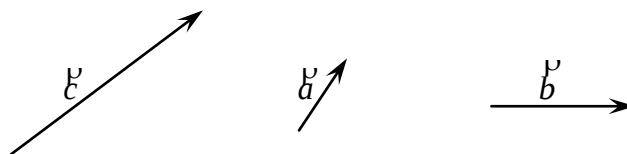
1. $\forall \vec{a} : 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;
2. $\forall \vec{a} \forall \alpha, \beta : \alpha(\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$ – асоціативність множення;
3. $\forall \vec{a} \forall \alpha, \beta : (\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$;
4. $\forall \vec{a}, \vec{b} \forall \alpha : \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$;

дві останні формули називаються *дистрибутивними законами множення відносно додавання*.

§-3. Розклад вектора за даними напрямками

Означення. Розкласти вектор $\vec{c}$ за двома не колінеарними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (на площині) означає знайти такий паралелограм, для якого $\vec{c}$ буде діагоналлю, а сторонами паралелограма будуть вектори, колінеарні до $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

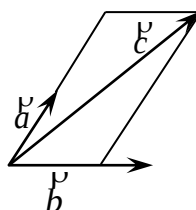
Приклад. Розкласти вектор $\vec{c}$ за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо вектори розміщені так, як показано на мал.6.



мал. 6

Віднесемо вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ до спільного початку та побудуємо на основі їх паралелограм так, щоб вектор $\vec{c}$ був діагоналлю цього паралелограма.

Як видно з мал. 7, $\vec{c} = 2\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$.



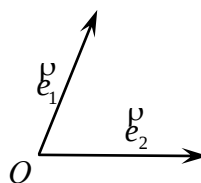
мал. 7

Означення. Розкласти вектор $\vec{d}$ за трьома не компланарними векторами $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ (в просторі) означає знайти такий паралелепіпед, для якого $\vec{d}$ буде діагоналлю, а сторонами паралелепіпеда будуть вектори, колінеарні до $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

§-4. Базис простору

Означення. Базисом площини називається впорядкована пара не колінеарних векторів.

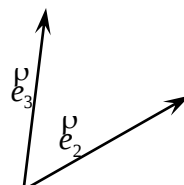
Базис площини позначається: $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, де вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ не колінеарні (мал. 8).

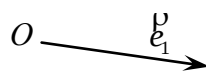


мал. 8

Означення. Базисом простору називається впорядкована трійка не компланарних векторів.

Базис простору позначають: $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, де вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ не компланарні (мал.9).

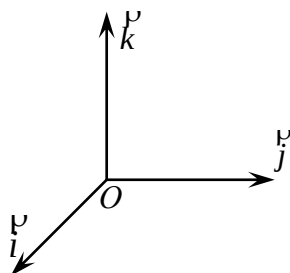




мал. 9

Означення. Базис називається *ортонормованим*, якщо базисні вектори попарно перпендикулярні і довжини базисних векторів рівні одиниці.

Ортонормований базис $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, де $\vec{i} \perp \vec{j}, \vec{i} \perp \vec{k}, \vec{j} \perp \vec{k}$, $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ (мал. 10).



мал. 10

Теорема (про розклад вектора за базисними векторами)

Будь-який вектор простору можна розкласти за базисними векторами, причому єдиним способом.

Тобто, довільний вектор $\vec{a}$ простору можна у базисі $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ подати у вигляді:

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3. \quad (2.2)$$

Означення. Координатами вектора в даному базисі називається впорядкована трійка дійсних чисел, які є коефіцієнтами в лінійному розкладі цього вектора за базисними векторами.

Якщо вектор $\vec{a}$ задається рівністю (2.2), то координатами цього вектора є впорядкована трійка (x, y, z) , тобто:

$$\vec{a}(x, y, z) \Leftrightarrow \vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3. \quad (2.3)$$

Властивості операцій над векторами через координати:

1) Рівні вектори мають рівні відповідні координати в тому самому базисі:

$$\vec{a}(x_1, y_1, z_1) = \vec{b}(x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2. \quad (2.4)$$

2) Координати суми двох векторів дорівнюють сумах їх відповідних координат:

$$\vec{a}(x_1, y_1, z_1), \vec{b}(x_2, y_2, z_2) \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2). \quad (2.5)$$

3) Координати добутку вектора на число дорівнюють добуткам координат цього вектора на дане число:

$$\vec{a}(x, y, z) \Rightarrow \lambda \vec{a} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z). \quad (2.6)$$

4) Координати лінійної комбінації кількох векторів дорівнюють тій же лінійній комбінації відповідних координат.

5) Координати вектора $\overrightarrow{AB}$, де $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ обчислюються за формулою:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \quad (2.7)$$

тобто, дорівнюють різницям відповідних координат його кінця і початку.

Приклад. $\vec{a}(2, 4, -1), \vec{b}(5, -2, -3)$. Знайти $3\vec{a} - 4\vec{b}$.

$$3\vec{a} - 4\vec{b} = (3 \cdot 2 - 4 \cdot 5, 3 \cdot 4 - 4 \cdot (-2), 3 \cdot (-1) - 4 \cdot (-3)) = (-14, 20, 9).$$

Умова колінеарності двох векторів через координати

Нехай в базисі $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають координати:

$$\vec{a}(x_1, y_1, z_1), \vec{b}(x_2, y_2, z_2).$$

Теорема

Для того, щоб вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ були колінеарними, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}, \quad (2.8)$$

тобто, щоб були пропорційними їх відповідні координати.

Умова компланарності трьох векторів через координати

Нехай в базисі $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ мають координати:

$$\vec{a}(x_1, y_1, z_1), \vec{b}(x_2, y_2, z_2), \vec{c}(x_3, y_3, z_3).$$

Теорема

Для того, щоб вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ були компланарними, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.9)$$

тобто, щоб детермінант 3-го порядку, рядки якого складені із координат цих векторів, дорівнював нулю.

§-5. Скалярний добуток векторів і його властивості

Означення. Скалярним добутком двох векторів називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi, \quad (2.10)$$

де $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Результатом скалярного добутку векторів є число (скаляр).

Властивості скалярного добутку:

а) алгебраїчні властивості:

- 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ – комутативність,
- 2) $\alpha \vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$, $\vec{a} \cdot \beta \vec{b} = \beta(\vec{a} \cdot \vec{b})$, $\alpha \vec{a} \cdot \beta \vec{b} = \alpha\beta(\vec{a} \cdot \vec{b})$ – асоціативна властивість відносно числового множника.
- 3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$, $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ – дистрибутивні закони множення відносно додавання.

Приклад. $(3\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (4\vec{a} - 3\vec{b}) = 12\vec{a} \cdot \vec{a} - 9\vec{a} \cdot \vec{b} + 8\vec{a} \cdot \vec{b} - 6\vec{b} \cdot \vec{b} = 12\vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + 6\vec{b} \cdot \vec{b}$.

б) геометричні властивості:

- 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ – скалярний добуток дорівнює нулеві тоді і тільки, коли вектори перпендикулярні.
- 2) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ – скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини.

$$3) \quad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \quad (2.11)$$

– модуль (довжина) вектора дорівнює кореню квадратному із його скалярного квадрата.

$$4) \quad \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad (2.12)$$

– косинус кута між двома векторами дорівнює скалярному добутку цих векторів, поділеному на добуток їх довжин.

Вираз скалярного добутку двох векторів через їх координати в ортонормованому базисі

Нехай в ортонормованому базисі $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають координати:

$\vec{a}(x_1, y_1, z_1), \vec{b}(x_2, y_2, z_2)$. Тоді

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 \quad (2.13)$$

– скалярний добуток двох векторів в ортонормованому базисі дорівнює сумі попарних добутків їх відповідних координат.

Довжина вектора

Нехай в ортонормованому базисі $B = \{\overset{P}{i}, \overset{P}{j}, \overset{P}{k}\}$ вектор $\overset{P}{a} = (x, y, z)$. За формулою (2.11) отримаємо:

$$|\overset{P}{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2.14)$$

– довжина вектора дорівнює кореню квадратному із суми квадратів його координат.

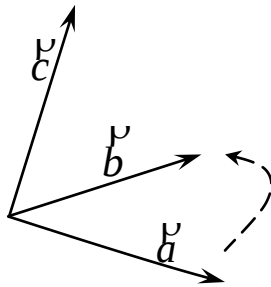
Приклад. Нехай $\overset{P}{a}(2, -2, 1), \overset{P}{b}(3, 1, 5)$. Знайти кут між векторами $\overset{P}{a}$ і $\overset{P}{b}$.

За формулою (2.12):

$$\cos \varphi = \frac{\overset{P}{a} \cdot \overset{P}{b}}{|\overset{P}{a}| \cdot |\overset{P}{b}|} = \frac{2 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 5}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2 + 5^2}} = \frac{9}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{35}} = \frac{3}{\sqrt{35}}.$$

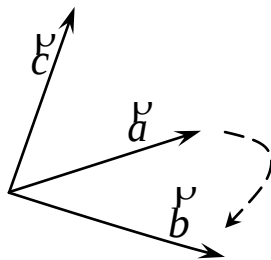
§-6. Векторний добуток векторів і його властивості

Кажуть, що вектори $\overset{P}{a}$, $\overset{P}{b}$ і $\overset{P}{c}$ утворюють *праву трійку* (або репер $(\overset{P}{a}, \overset{P}{b}, \overset{P}{c})$ – *додатно орієнтований*), якщо вони розміщені в просторі проти годинникової стрілки (мал.11).



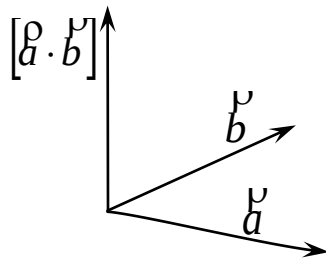
мал. 11

Вектори $\overset{P}{a}$, $\overset{P}{b}$ і $\overset{P}{c}$ утворюють *ліву трійку* (репер $(\overset{P}{a}, \overset{P}{b}, \overset{P}{c})$ – *від'ємно орієнтований*), якщо вони розміщені в просторі за годинниковою стрілкою (мал.12).



мал. 12

Означення. Векторним добутком двох векторів називається вектор, довжина якого дорівнює добутку довжин цих векторів на синус кута між ними; цей вектор перпендикулярний до кожного з перемножуваних векторів і утворює з ними праву трійку (мал.13):



$$|[a \cdot b]| = |a| \cdot |b| \cdot \sin \alpha \quad (2.15)$$

мал. 13

Результатом векторного добутку векторів є вектор.

Властивості векторного добутку:

а) алгебраїчні властивості:

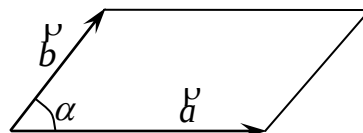
- 1) $[a \cdot b] = -[b \cdot a]$ – антикомутативність,
- 2) $[\alpha a \cdot b] = \alpha[a \cdot b]$, $[a \cdot \beta b] = \beta[a \cdot b]$, $[\alpha a \cdot \beta b] = \alpha\beta[a \cdot b]$ – асоціативна властивість відносно числового множника.
- 3) $[(a + b) \cdot c] = [a \cdot c] + [b \cdot c]$, $[a \cdot (b + c)] = [a \cdot b] + [a \cdot c]$ – дистрибутивні закони множення відносно додавання.

б) геометричні властивості:

- 1) $[a \cdot b] \perp a$, $[a \cdot b] \perp b$,
- 2) $(a, b, [a \cdot b])$ – права трійка,
- 3) $[a \cdot b] = 0 \Leftrightarrow a \parallel b$ – векторний добуток дорівнює нулеві тоді і тільки, коли вектори колінеарні,

$$4) \quad S_{\text{пар-ма}} = |[a \cdot b]| \quad (2.16)$$

– модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах (віднесених до спільного початку – мал. 14).



мал. 14

$$5) \quad S_{\Delta} = \frac{1}{2} |[a \cdot b]| \quad (2.17)$$

Вираз векторного добутку двох векторів через їх координати

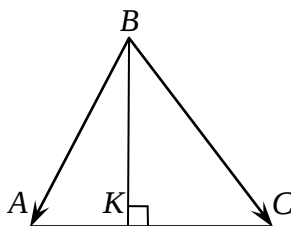
в ортонормованому базисі

Нехай в ортонормованому базисі $B = \{\overset{P}{i}, \overset{P}{j}, \overset{P}{k}\}$ вектори $\overset{P}{a}$ і $\overset{P}{b}$ мають координати: $\overset{P}{a}(x_1, y_1, z_1), \overset{P}{b}(x_2, y_2, z_2)$. Тоді

$$[\overset{P}{a} \cdot \overset{P}{b}] = \begin{vmatrix} \overset{P}{i} & \overset{P}{j} & \overset{P}{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \quad (2.18)$$

– векторний добуток двох векторів в ортонормованому базисі дорівнює детермінанту третього порядку, в першому рядку якого стоять базисні вектори $\overset{P}{i}, \overset{P}{j}, \overset{P}{k}$, в другому рядку – координати першого множника, в третьому рядку – координати другого множника.

Приклад. Вершини трикутника ABC мають координати: $A(1, -1, 2)$, $B(5, -6, 2)$, $C(1, 3, -1)$. Обчислити площу трикутника і довжину висоти, опущеної з вершини B на сторону AC (мал. 15).



мал. 15

Площу трикутника обчислюватимемо за формулою: $S_{\Delta} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}]|$. З іншого боку:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} AC \cdot BK. \text{ Звідси: } \frac{1}{2} |[\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}]| = \frac{1}{2} AC \cdot BK. \text{ З останньої рівності отримаємо:}$$

$$BK = \frac{|[\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}]|}{AC}.$$

$$\overrightarrow{BA} = (1-5, -1+6, 2-2) = (-4, 5, 0), \overrightarrow{BC} = (1-5, 3+6, -1-2) = (-4, 5, 0).$$

$$[\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}] = \begin{vmatrix} \overset{P}{i} & \overset{P}{j} & \overset{P}{k} \\ -4 & 5 & 0 \\ -4 & 9 & -3 \end{vmatrix} = -15\overset{P}{i} - 12\overset{P}{j} - 16\overset{P}{k}, \text{ тобто } [\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}] = (-15, -12, -16).$$

$$|[\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}]| = \sqrt{(-15)^2 + (-12)^2 + (-16)^2} = \sqrt{625} = 25, S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 25 = 12,5 \text{ (кв. од.)}$$

$$\overrightarrow{AC} = (1-1, 3+1, -1-2) = (0, 4, -3), AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{16+9} = 5.$$

$$BK = \frac{25}{5} = 5 \text{ (од.)}$$

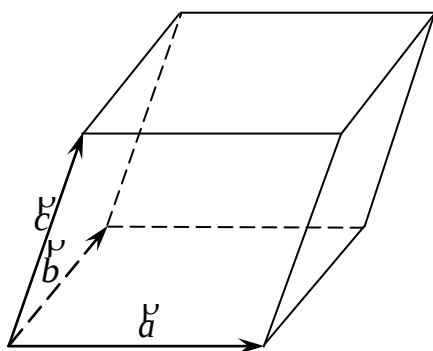
§-7. Мішаний добуток трьох векторів і його геометричний зміст

Означення. Мішаним добутком трьох векторів називається число, яке дорівнює скалярному добутку векторного добутку перших двох векторів на третій:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = [\vec{a} \cdot \vec{b}] \cdot \vec{c}. \quad (2.19)$$

Теорема (геометричний зміст мішаного добутку)

Модуль мішаного добутку трьох векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах (віднесених до спільного початку – мал.16). Мішаний добуток – додатне число, якщо вектори утворюють праву трійку; від'ємне число, якщо вектори утворюють ліву трійку і дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли всі вектори компланарні.

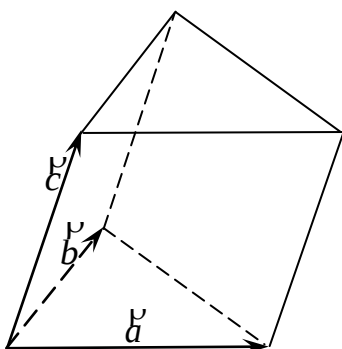


мал. 16

Тобто, мішаний добуток має такі властивості:

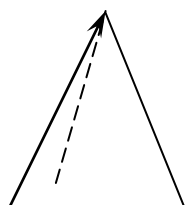
- 1) $V_{\text{пар-да}} = |\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}|$, (2.20)
- 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} > 0$, коли $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – права трійка, $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} < 0$, коли $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – ліва трійка,
- 3) $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ тоді і лише тоді, коли вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні.

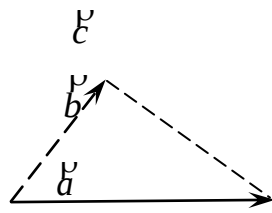
За допомогою мішаного добутку трьох векторів можна також обчислювати об'єм трикутної призми та трикутної піраміди, побудованих на цих векторах (мал. 17, 18).



мал. 17

$$V_{\text{тр.призми}} = \frac{1}{2} |\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}| \quad (2.21)$$





мал. 18

$$V_{тр.пир.} = \frac{1}{6} |a \cdot b \cdot c| \quad (2.22)$$

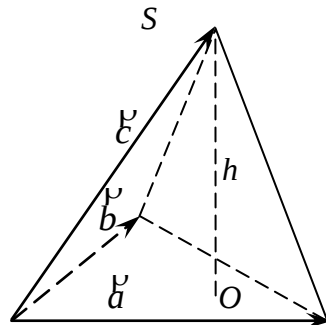
**Вираз мішаного добутку трьох векторів через їх координати
в ортонормованому базисі**

Нехай в ортонормованому базисі $B = \{i, j, k\}$ вектори a , b і c мають координати: $a(x_1, y_1, z_1), b(x_2, y_2, z_2), c(x_3, y_3, z_3)$. Тоді

$$a \cdot b \cdot c = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad (2.23)$$

– мішаний добуток трьох векторів дорівнює детермінанту третього порядку, в першому рядку якого стоять координати першого вектора, в другому – координати другого вектора, в третьому – координати третього вектора.

Приклад. Обчислити об'єм і висоту трикутної піраміди (мал.19), побудованої на векторах: $a(1, -2, 3), b(2, 1, -1), c(3, -3, 4)$.



мал. 19

Об'єм піраміди обчислюватимемо за формулою: $V_{тр.пир.} = \frac{1}{6} |a \cdot b \cdot c|$. З іншого боку:

$$V_{тр.пир.} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h. \text{ Звідси: } \frac{1}{6} |a \cdot b \cdot c| = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h. \text{ З останньої рівності отримаємо: } h = \frac{|a \cdot b \cdot c|}{2 \cdot S_{інт.}}$$

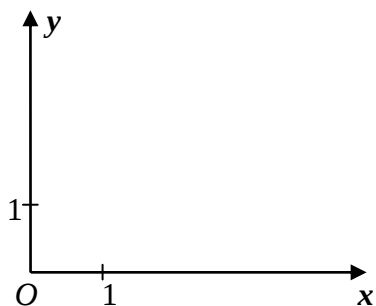
$$a \cdot b \cdot c = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 6 - 18 - 9 - 3 + 16 = -4, \quad V_{тр.пир.} = \frac{1}{6} \cdot |-4| = \frac{2}{3} \text{ (куб. од.)}$$

$$S_{осн.} = \frac{1}{2} [a \cdot b], \text{ де } [a \cdot b] = \begin{vmatrix} i^p & j^p & k^p \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1i^p + 7j^p + 5k^p. \text{ Тоді } [a \cdot b] = (-1, 7, 5),$$

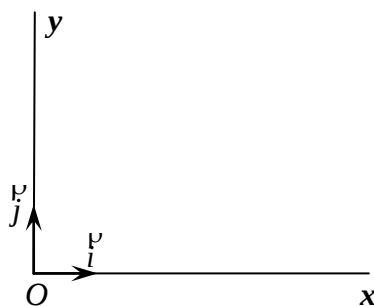
$$S_{осн.} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 49 + 25} = \frac{1}{2} \sqrt{75} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ (кв. од.)}, \quad h = \frac{4}{2 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{5\sqrt{3}} \text{ (од.)}$$

§-8. Основні задачі в прямокутній декартовій системі координат

Означення. Прямокутною декартовою системою координат називається впорядкована пара взаємно перпендикулярних осей з однаковими масштабами на них (мал. 20, 21).



мал. 20

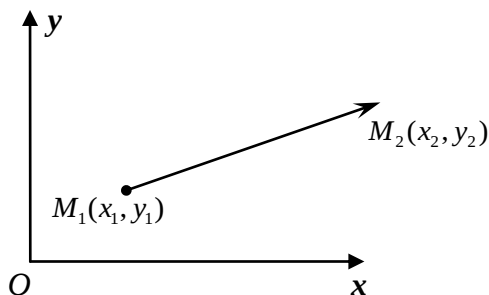


мал. 21

Базис прямокутної системи координат позначається: $R = \{O, i^p, j^p\}$, де O – початок системи координат.

Віддаль між точками

Нехай в прямокутній системі координат задано дві точки: $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$. Знайти віддаль між цими точками (мал. 22).



мал. 22

Віддаль між точками $\rho(M_1, M_2) = |\overline{M_1 M_2}|$

Вектор $\overline{M_1 M_2}$ має координати: $\overline{M_1 M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. За формулою (2.14)

отримаємо:

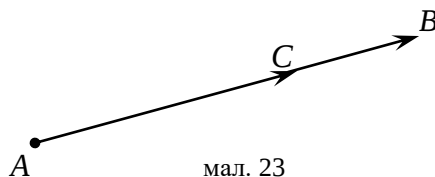
$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (2.24)$$

– віддаль між двома точками дорівнює кореню квадратному із суми квадратів різниць відповідних координат.

Поділ відрізка в даному відношенні

Означення. Точка C ділить відрізок AB у відношенні λ , якщо виконується рівність:

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} \quad (2.25)$$



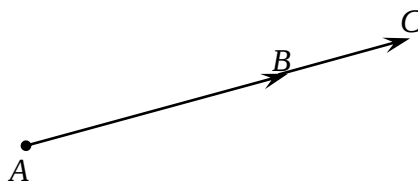
мал. 23

Користуючись мал. 23, попередню рівність можна записати у вигляді:

$$\lambda = \frac{\text{від початку до подільчої точки}}{\text{від подільчої точки до кінця}}. \quad (2.26)$$

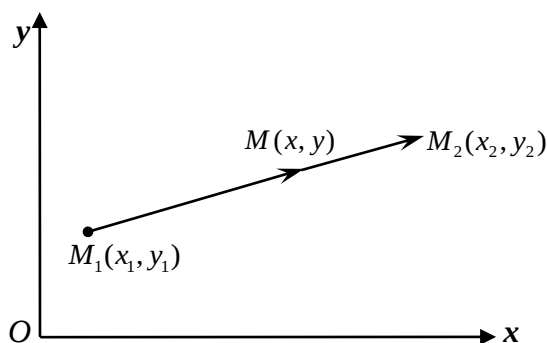
Якщо $\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CB}$ (мал. 23), то $\lambda > 0$ і точка C ділить відрізок AB внутрішнім способом.

Якщо $\overrightarrow{AC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CB}$ (мал. 24), то $\lambda < 0$ і точка C ділить відрізок AB зовнішнім способом.



мал. 24

Нехай маємо відрізок M_1M_2 , де $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$. Знайти координати точки M , яка ділить відрізок M_1M_2 у відношенні λ (мал. 25).



мал. 25

З рівності $\lambda = \frac{\overrightarrow{M_1M}}{\overrightarrow{MM_2}}$ отримаємо: $\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{MM_2}$. Оскільки $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1)$,

$$\lambda \overrightarrow{MM_2} = (\lambda(x_2 - x), \lambda(y_2 - y)), \text{ то дістанемо систему: } \begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y). \end{cases} \quad (2.27)$$

Розв'язок системи (2.27) (а отже, й координати точки M) матиме вигляд:

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \end{cases} \quad (2.28)$$

Координати середини відрізка

Якщо точка M ділить відрізок M_1M_2 пополам, то $\lambda = 1$. Тоді з системи (2.28) отримаємо:

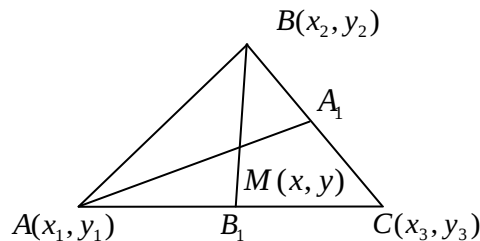
$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases} \quad (2.29)$$

– координати середини відрізка дорівнюють півсумам відповідних координат його початку і кінця.

Центр ваги трикутника

Центром ваги трикутника є, як відомо, точка перетину його медіан.

Нехай дано трикутник з вершинами в точках $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Знайти координати центра маси цього трикутника (мал. 26).



мал. 26

Нехай $M(x, y)$ – центр ваги трикутника. Медіани в точці перетину діляться у відношенні 2:1, починаючи з вершини. Тоді відношення подільності $\lambda = \frac{\overline{AM}}{\overline{MA_1}} = \frac{2}{1} = 2$. Оскільки

A_1 – середина BC , то за формулою (2.29) ця точка має такі координати: $A_1 = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2} \right)$.

Отже, користуючись рівністю (2.28), матимемо, що координати точки M мають вигляд:

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \\ y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \end{cases} \quad (2.30) -$$

координати центра ваги трикутника дорівнюють середнім арифметичним відповідних координат його вершин.

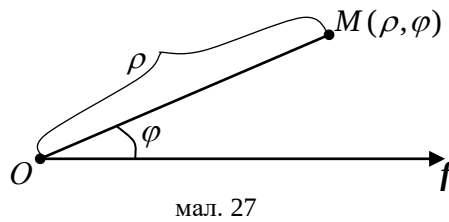
Площа трикутника

Площа трикутника з вершинами в точках $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ обчислюється за формулою:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \operatorname{mod} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.31)$$

§-9. Полярна система координат

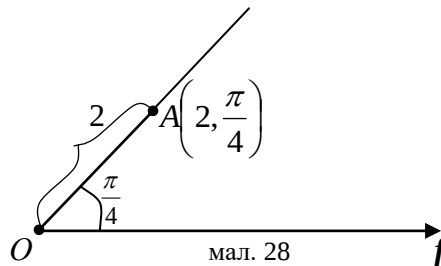
Означення. Полярною системою координат називається система координат, в якій положення кожної точки на площині визначається двома параметрами: ρ – відстань від даної точки до полюса O (початку системи координат), φ – кут між радіусом цієї точки і полярною віссю Of (мал. 27). Впорядкована пара чисел (ρ, φ) називається *полярними координатами точки*.



мал. 27

Приклад. Побудувати точку $A\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ в полярній системі координат.

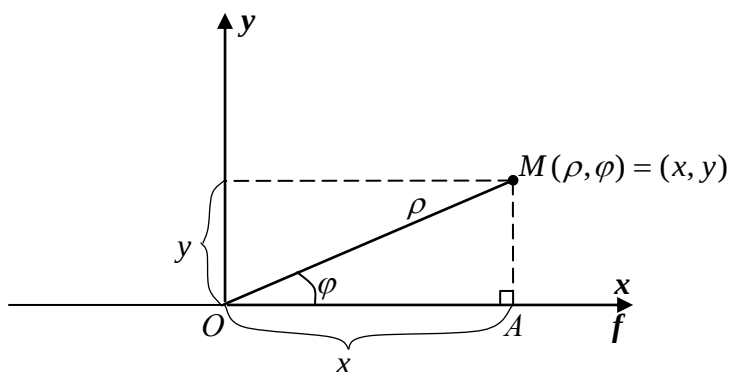
Для побудови цієї точки необхідно побудувати промінь, який утворює з полярною віссю кут $\frac{\pi}{4}$, та відкласти від полюса відрізок довжиною 2 (мал. 28).



мал. 28

Зв'язок між полярними і прямокутними координатами

Помістимо початок прямокутної декартової системи координат в полюс. Вісь Ox направимо по полярній осі, причому так, щоб їх напрями співпадали і масштаби на осях були однакові (мал. 29).



мал. 29

Нехай точка M в полярній системі координат має координати (ρ, φ) , а в прямокутній – (x, y) . Виразити (x, y) через (ρ, φ) і навпаки.

З прямокутного трикутника OAM отримаємо:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad (2.32)$$

– *перехід від полярних до прямокутних координат.*

Піднесемо обидві частини рівностей системи (2.32) до квадрату і додамо почленно:

$$x^2 + y^2 = \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi). \text{ Звідки: } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Поділивши друге рівняння системи (2.32) на перше, дістанемо: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$. Отже,

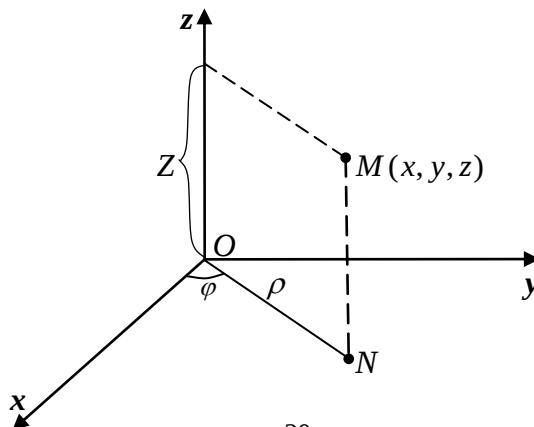
отримаємо систему:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \end{cases} \quad (2.33)$$

– *перехід від прямокутних до полярних координат.*

§-10. Циліндрична система координат

Кожна точка M в просторі повністю визначається положенням її проекції на площину xOy і третьою координатою Z (мал. 30).



мал. 30

Положення проекції N однозначно задається її полярними координатами в площині xOy : $N(\rho, \varphi)$. Як бачимо, для задання точки в просторі досить вказати три параметри: ρ – віддаль від проекції цієї точки на площину xOy до початку координат; φ – кут між віссю Ox і радіусом вектором цієї точки; Z – віддаль від цієї точки до площини xOy .

Впорядкована трійка чисел (ρ, φ, Z) називається *циліндричними координатами*.

Циліндричні координати пов'язані з прямокутними координатами рівностями:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = Z. \end{cases} \quad (2.34)$$

Розділ 3

Пряма на площині

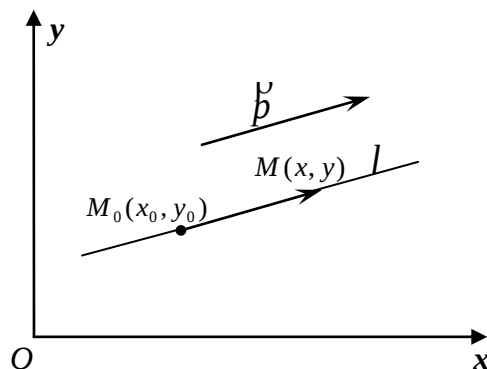
§-1. Різні способи задання прямої

1. Канонічне рівняння прямої.

Означення. Напрямним вектором прямої l називається такий ненульовий вектор $\vec{p}$, який паралельний до цієї прямої.

Нехай пряма l задана точкою $M_0(x_0, y_0)$ і напрямним вектором $\vec{p}(l, m)$. Написати рівняння цієї прямої.

Візьмемо довільну точку $M(x, y) \in l$ (мал. 31)



Для будь-якого положення точки M на прямій l : $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p}$, де $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$, $\vec{p}(l, m)$. З умови колінеарності двох векторів (2.8) отримаємо:

$$l: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \quad (3.1)$$

– канонічне рівняння прямої.

Приклад. Скласти рівняння прямої l , що проходить через точку $A(5, -3)$ з напрямним вектором $\vec{p}(4, 5)$.

Скористаємось рівнянням (3.1)

$$l: \frac{x - 5}{4} = \frac{y + 3}{5}.$$

2. Параметричні рівняння прямої.

Нехай дано такі ж початкові умови, що й у попередньому пункті. Тоді отримаємо рівняння (3.1). Введемо в це рівняння параметр t :

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = t.$$

З останніх рівностей отримаємо систему:
$$\begin{cases} x - x_0 = lt, \\ y - y_0 = mt, \end{cases}$$

яку запишемо у вигляді:

$$l: \begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt \end{cases} \quad (3.2)$$

– параметричні рівняння прямої.

Геометричний зміст параметра t

Для будь-якого положення точки M на прямій знайдеться таке дійсне число t , що координати цієї точки виражаються формулами (3.2). І навпаки:

Для довільного дійсного числа t пара чисел, знайдених за формулами (3.2) є координатами точки, яка належить прямій.

Приклад. Скласти параметричні рівняння прямої l , що проходить через точку $A(2, -1)$ з напрямним вектором $\vec{p}(-3, 2)$.

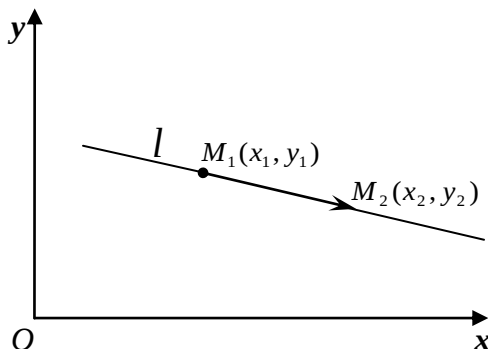
Параметричні рівняння прямої згідно із системою (3.2) матимуть вигляд:

$$\begin{cases} x = -3t + 2, \\ y = 2t - 1. \end{cases}$$

3. Пряма, задана двома точками.

Нехай пряма l задана двома точками: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$. Написати рівняння цієї прямої.

Виберемо за початкову точку M_1 , за напрямний вектор візьмемо $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ (мал. 32).



мал. 32

Використавши канонічне рівняння прямої (3.1), отримаємо:

$$l: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (3.3)$$

– рівняння прямої через дві точки.

Приклад. Написати рівняння прямої l , що проходить через точки $A(-3, 5)$, $B(2, 4)$.

З рівняння (3.3) отримаємо:

$$\frac{x + 3}{2 + 3} = \frac{y - 5}{4 - 5}, \quad \text{або} \quad l: \frac{x + 3}{5} = \frac{y - 5}{-1}.$$

4. Загальне рівняння прямої.

Канонічне рівняння (3.1) можна записати у вигляді:

$$mx - ly - mx_0 + ly_0 = 0.$$

Бачимо, що пряма задається лінійним рівнянням відносно змінних x, y . Виникає запитання: що задає будь-яке лінійне рівняння на площині?

Теорема

$$\text{Рівняння} \quad Ax + By + C = 0, \quad (3.4)$$

де A і B одночасно не рівні нулю, задає пряму з напрямним вектором $\vec{b}(-B, A)$.

Доведення. Рівняння (3.4) на площині задає деяку лінію. Скориставшись коефіцієнтами цього рівняння, виберемо на площині точку $M_0(-\frac{C}{A}, 0)$ (при умові, що $A \neq 0$).

Напишемо рівняння прямої l , що проходить через точку M_0 з напрямним вектором $\vec{p}(-B, A)$. Використаємо рівняння (3.1):

$$\frac{x + \frac{C}{A}}{-B} = \frac{y - 0}{A},$$

з якого отримаємо:

$$l: Ax + By + C = 0.$$

Отже, рівняння (3.4) задає пряму.

Теорему доведено

Рівняння (3.4) називається *загальним рівнянням прямої*.

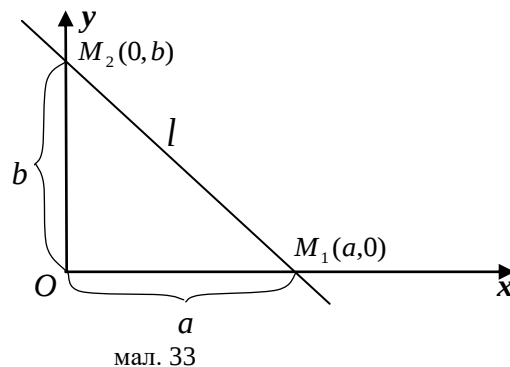
Приклад. Написати загальне рівняння прямої l , що проходить через точки $A(4, -1)$, $B(5, -3)$.

За формулою (3.3) отримаємо:

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{-2}, \quad \text{або} \quad l: 2x + y - 7 = 0.$$

5. Пряма у «відрізках» на осях.

Нехай пряма l , яка не проходить через початок координат, відтинає на осі Ox відрізок a , на осі Oy – відрізок b (мал. 33). Написати рівняння цієї прямої.



Шукатимемо рівняння прямої l у вигляді (3.4):

$$l: Ax + By + C = 0$$

$$M_1(a, 0) \in l \Rightarrow A \cdot a + B \cdot 0 + C = 0. \text{ Звідси: } A = -\frac{C}{a}.$$

$$M_2(0, b) \in l \Rightarrow A \cdot 0 + B \cdot b + C = 0. \text{ Звідси: } B = -\frac{C}{b}.$$

Підставимо ці значення A і B в рівняння (3.4):

$$-\frac{C}{a}x - \frac{C}{b}y + C = 0.$$

Оскільки пряма не проходить через початок координат, то $C \neq 0$. Тому останнє рівняння можна поділити на C :

$$-\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + 1 = 0.$$

З цього рівняння отримаємо:

$$l: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (3.5)$$

– рівняння прямої у «відрізках» на осях.

Приклад. Побудувати пряму l , що проходить через точку $A(6,1)$ з напрямним вектором $\vec{p}(-3,5)$.

З канонічного рівняння прямої дістанемо:

$$\frac{x-6}{-3} = \frac{y-1}{5}, \quad \text{або} \quad 5x + 3y = 33.$$

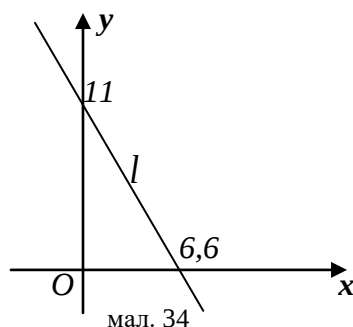
Поділимо обидві частини рівняння на 33:

$$\frac{5x}{33} + \frac{3y}{33} = 1.$$

Остаточно одержимо:

$$l: \frac{x}{33/5} + \frac{y}{11} = 1.$$

Останнє рівняння є рівнянням прямої у «відрізках» на осях. Тому шукана пряма відсікає на осі Ox відрізок $\frac{33}{5} = 6,6$, а на осі Oy відрізок 11 (мал. 34).



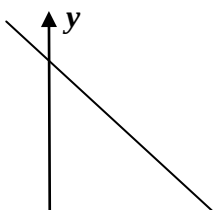
6. Пряма з кутовим коефіцієнтом.

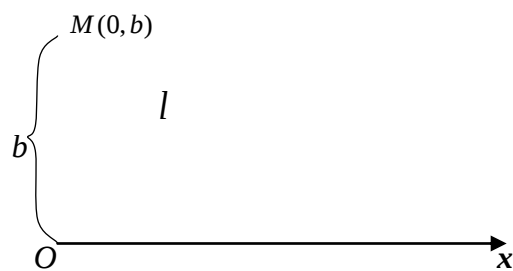
Нехай задано напрямний вектор $\vec{p}(l,m)$ прямої l .

Означення. Кутовим коефіцієнтом прямої називається відношення ординати до абсциси її напрямного вектора:

$$k = \frac{m}{l}.$$

Написати рівняння прямої l , яка відтинає на осі Oy відрізок b і має кутовий коефіцієнт k (мал. 35).





мал. 35

Запишемо координати напрямного вектора прямої у вигляді:

$$\vec{p} = (l, m) = l(1, \frac{m}{l}) = l(1, k).$$

Оскільки $l(1, k) \parallel (1, k)$, то напрямним до прямої буде також вектор $\vec{p}_1(1, k)$.

Використаємо канонічне рівняння прямої (3.1):

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-b}{k}.$$

Звідки отримаємо:

$$l: y = kx + b \quad (3.6)$$

– рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

7. Пряма, задана точкою і кутовим коефіцієнтом.

Написати рівняння прямої l , яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і має кутовий коефіцієнт k .

Шукатимемо рівняння прямої l у вигляді (3.6):

$$y = kx + b,$$

$$M_0(x_0, y_0) \in l \Rightarrow y_0 = kx_0 + b.$$

Віднімемо від рівняння (3.6) попереднє рівняння. Дістанемо:

$$l: y - y_0 = k(x - x_0) \quad (3.7)$$

– рівняння прямої, заданої точкою і кутовим коефіцієнтом.

Приклад. Скласти рівняння прямої l , яка має кутовий коефіцієнт $k = 3$ і проходить через точку $A(3, -1)$.

З рівняння (3.7) дістанемо:

$$y + 1 = 3(x - 3), \quad \text{або} \quad l: y = 3x - 10.$$

8. Пряма, задана точкою і нормованим вектором.

Означення. Нормованим вектором прямої l називається такий ненульовий вектор $\vec{h}$, який перпендикулярний до цієї прямої.

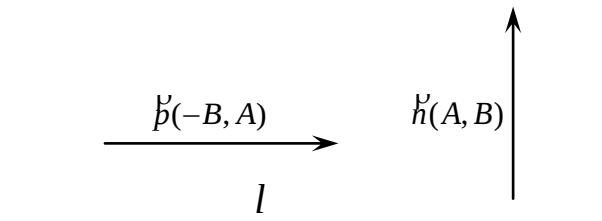
Теорема

Коефіцієнти A і B в загальному рівнянні прямої $l: Ax + By + C = 0$ є координатами нормованого вектора цієї прямої, тобто $\vec{h} = (A, B)$.

Доведення. Напрямний вектор прямої l має координати: $\vec{p}(-B, A)$. Знайдемо скалярний добуток: $\vec{h} \cdot \vec{p} = A \cdot (-B) + B \cdot A = 0$. Звідси, за властивостями скалярного добутку $\vec{h} \perp \vec{p}$, а тому $\vec{h} \perp l$. Отже, $\vec{h} = (A, B)$ – нормований вектор прямої l .

Теорему доведено

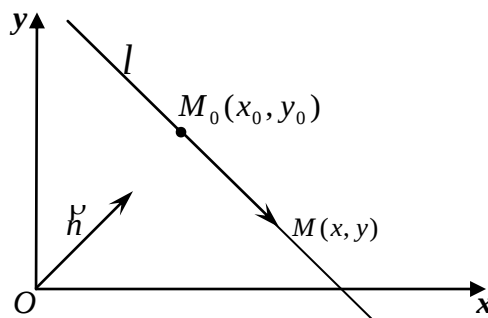
З попередньої теореми отримаємо, що із загального рівняння прямої можна дістати координати її напрямного і нормованого векторів (мал. 36).



мал. 36

Нехай пряма задана точкою $M_0(x_0, y_0)$ і нормованим вектором $\vec{h}(\alpha, \beta)$. Написати рівняння цієї прямої.

Візьмемо довільну точку $M(x, y) \in l$ (мал. 37).



мал. 37

Для будь-якого положення точки M на прямій $l: \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$, де $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$, $\vec{h}(\alpha, \beta)$. Тоді $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$. Звідси:

$$l: \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0 \quad (3.8)$$

– рівняння прямої, заданої точкою і нормованим вектором.

Приклад. Скласти рівняння прямої l_1 , яка проходить через точку $A(4,1)$ перпендикулярно до прямої $l: 2x - 5y + 6 = 0$.

Напрямний вектор прямої l має координати: $\vec{p} = (-B, A) = (5, 2)$. Але оскільки $l \perp l_1$, то напрямний вектор прямої l є нормальним вектором прямої l_1 , тобто: $\vec{p} = \vec{p}_1 = (5, 2)$.

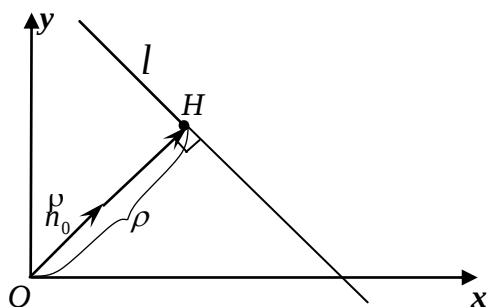
Скориставшись рівнянням (3.8), отримаємо:

$$5(x - 4) + 2(y - 1) = 0 \quad \text{або} \quad l: 5x + 2y - 22 = 0.$$

9. Нормальне рівняння прямої.

Написати рівняння прямої l , заданої одиничним нормальним вектором $\vec{h}_0(\cos\varphi, \sin\varphi)$ і віддаллю ρ від початку координат до прямої.

Нехай H – основа перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму (мал. 38).



мал. 38

Оскільки $\vec{h}_0$ – одиничний нормований вектор, то $\overrightarrow{OH} = \rho \vec{h}_0 = (\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi)$. $\overrightarrow{OH}$ – радіус-вектор точки H . Тому $H(\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi)$. Підставимо координати вектора $\vec{h}_0$ і точки H в рівняння (3.8):

$$\cos\varphi(x - \rho \cos\varphi) + \sin\varphi(y - \rho \sin\varphi) = 0, \quad \text{або} \quad x \cos\varphi + y \sin\varphi - \rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 0.$$

Оскільки $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, то отримаємо рівняння:

$$l: x \cos\varphi + y \sin\varphi - \rho = 0 \quad (3.9)$$

– нормальне рівняння прямої.

§-2. Взаємне розміщення двох прямих на площині

Нехай прямі l_1 і l_2 задані рівняннями:

$$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Теорема (умова паралельності двох прямих)

Для того, щоб прямі l_1 і l_2 були паралельними, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \quad (3.10)$$

тобто, щоб були пропорційними коефіцієнти при однакових змінних.

Доведення. Напрямний вектор прямої l_1 має координати $\vec{p}_1(-B_1, A_1)$, прямої l_2 — $\vec{p}_2(-B_2, A_2)$. Оскільки $l_1 \parallel l_2$, то їх напрямні вектори також паралельні. З умови колінеарності двох векторів (2.8) отримаємо рівність:

$$\frac{-B_1}{-B_2} = \frac{A_1}{A_2},$$

з якої дістанемо умову (3.10).

Теорему доведено

Теорема (умова співпадання двох прямих)

Для того, щоб прямі l_1 і l_2 співпадали, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \quad (3.11)$$

тобто, щоб були пропорційними відповідні коефіцієнти цих прямих.

Теорема (умова перетину двох прямих)

Якщо прямі не паралельні і не співпадають, то вони перетинаються в одній точці.

Для того, щоб прямі l_1 і l_2 перетинались, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}. \quad (3.12)$$

Приклад. Скласти рівняння прямої l_1 , яка проходить через точку $A(-2,5)$ паралельно до прямої $l: 4x - y + 3 = 0$.

Шукатимемо рівняння прямої l_1 у вигляді:

$$4x - y + C = 0.$$

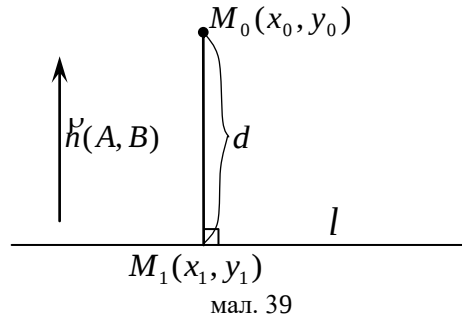
Оскільки $A \in l_1$, то $4 \cdot (-2) - 5 + C = 0$. Звідки: $C = 13$. Отже,

$$l_1: 4x - y + 13 = 0.$$

§-3. Віддаль від точки до прямої

Означення. Під віддаллю від точки до прямої розуміють віддаль від цієї точки до її ортогональної проекції на цю пряму.

Нехай задано пряму $l: Ax + By + C = 0$. Знайти віддаль від точки $M_0(x_0, y_0)$ до цієї прямої (мал. 39): $d = \rho(M_0, l) = M_0M_1$.



Для знаходження числа d використаємо скалярний добуток векторів $\vec{h}$ і $\overrightarrow{M_0M_1}$ за означенням та через координати:

1. За означенням:

$$\vec{h} \cdot \overrightarrow{M_0M_1} = |\vec{h}| \cdot |\overrightarrow{M_0M_1}| \cdot \cos \varphi = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot d \cdot (\pm 1).$$

2. Через координати:

Оскільки $\overrightarrow{M_0M_1}(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$, $\vec{h}(A, B)$, то

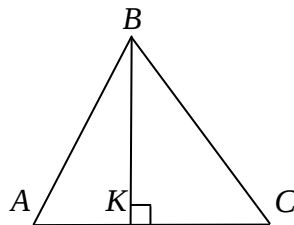
$$\vec{h} \cdot \overrightarrow{M_0M_1} = A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) = Ax_1 + By_1 - Ax_0 - By_0 = -C - Ax_0 - By_0 = -(Ax_0 + By_0 + C).$$

$$\text{Звідки: } \sqrt{A^2 + B^2} \cdot d \cdot (\pm 1) = -(Ax_0 + By_0 + C).$$

Отримаємо формулу:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (3.13)$$

Приклад. Знайти висоту трикутника ABC , опущеної з вершини B на сторону AC , якщо $A(1,3)$, $B(3,9)$, $C(5,7)$ (мал. 40).



$$h = BK = \rho(B, AC)$$

Складемо рівняння прямої AC : $\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{4}$. Або $AC: x - y + 2 = 0$

За формулою (3.13) отримаємо: $BK = \frac{|3-9+3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ (од.)

§-4. Кут між прямими на площині

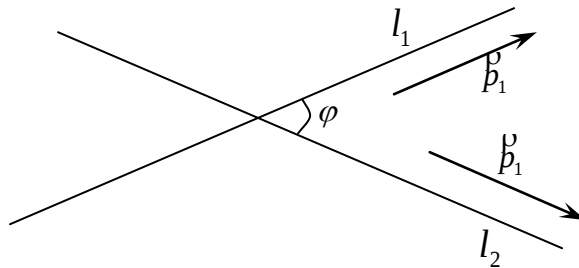
1. Прямі l_1 і l_2 задані загальними рівняннями:

$$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Знайти кут між цими прямими.

Напрямний вектор прямої l_1 має координати $\vec{p}_1(-B_1, A_1)$, прямої l_2 — $\vec{p}_2(-B_2, A_2)$ (мал. 41).



мал. 41

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2|}{|\vec{p}_1| \cdot |\vec{p}_2|} = \frac{(-B_1) \cdot (-B_2) + A_1 \cdot A_2}{\sqrt{(-B_1)^2 + A_1^2} \cdot \sqrt{(-B_2)^2 + A_2^2}}.$$

Отже, кут між прямими можна обчислити за формулою:

$$\cos \varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (3.14)$$

Якщо $l_1 \perp l_2$, то $\cos \varphi = 0$. Тому справедлива теорема:

Теорема (умова перпендикулярності двох прямих)

Для того, щоб прямі l_1 і l_2 були перпендикулярними, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

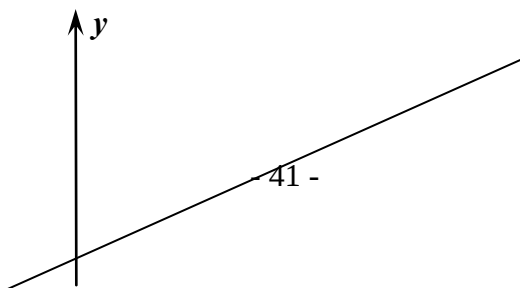
$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0. \quad (3.15)$$

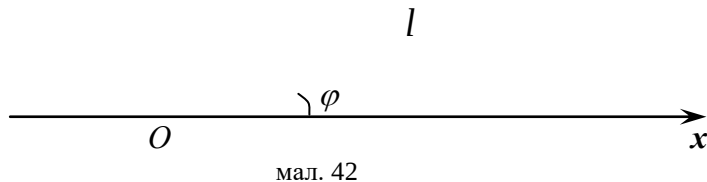
2. Прямі задані рівнянням з кутовим коефіцієнтом:

$$y = kx + b.$$

В прямокутній декартовій системі координат кутовий коефіцієнт прямої дорівнює тангенсу кута нахилу прямої до додатного напрямку осі Ox (мал. 42), тобто:

$$k = \operatorname{tg} \varphi. \quad (3.16)$$



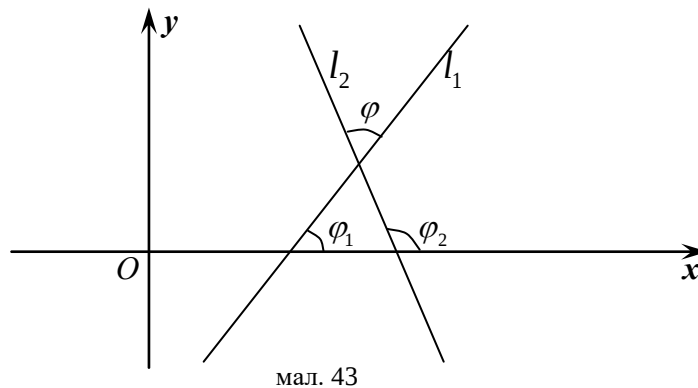


Нехай $l_1: y = k_1x + b_1$,

$l_2: y = k_2x + b_2$.

Знайти кут між прямими.

Для прямих l_1 і l_2 з мал. 43 матимемо: $k_1 = \operatorname{tg} \varphi_1$, $k_2 = \operatorname{tg} \varphi_2$.



Оскільки $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, то $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2}$.

Отже, кут між прямими, обчислюється за формулою:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}. \quad (3.17)$$

Якщо $l_1 \perp l_2$, то $\operatorname{tg} \varphi = \infty$. З останньої рівності слідує, $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$. Отже, справедлива теорема:

Теорема (умова перпендикулярності прямих через їх кутові коефіцієнти)

Для того, щоб прямі l_1 і l_2 були перпендикулярними, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}, \quad (3.18)$$

тобто, щоб їх коефіцієнти були оберненими за величиною і протилежними за знаком.

З мал. 42 слідує теорема:

Теорема (умова паралельності прямих через їх кутові коефіцієнти)

Для того, щоб прямі l_1 і l_2 були паралельними, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$k_1 = k_2, \quad (3.19)$$

тобто, щоб були рівними їх кутові коефіцієнти.

Приклад. Скласти рівняння прямої l_1 , яка проходить через точку $A(-2,4)$ паралельно до прямої $l: 3x - 5y - 1 = 0$.

Запишемо рівняння прямої l у вигляді: $y = \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$. Звідси матимемо, що $k = \frac{3}{5}$.

Оскільки $l \parallel l_1$, то $k_1 = k = \frac{3}{5}$.

Тоді $l_1: y = \frac{3}{5}x + b$. $A \in l_1 \Rightarrow 4 = \frac{3}{5} \cdot (-2) + b$. Тоді $b = \frac{26}{5}$.

Отже, рівняння прямої має вигляд: $y = \frac{3}{5}x + \frac{26}{5}$. Або $l_1: 3x - 5y + 26 = 0$.

Приклад. Скласти рівняння прямої l_1 , яка проходить через точку $B(3,-1)$ перпендикулярно до прямої $l: 4x + y - 5 = 0$.

$l: y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3} \Rightarrow k = -\frac{4}{3}$. Тоді за формулою (3.18) отримаємо: $k_1 = -\frac{1}{k} = \frac{3}{4}$. Звідси

$l_1: y = \frac{3}{4}x + b$. $B \in l_1 \Rightarrow -1 = \frac{3}{4} \cdot 3 + b$. Звідки: $b = -\frac{13}{4}$.

Отже, рівняння прямої: $y = \frac{3}{4}x - \frac{13}{4}$. Або $l_1: 3x - 4y - 13 = 0$.

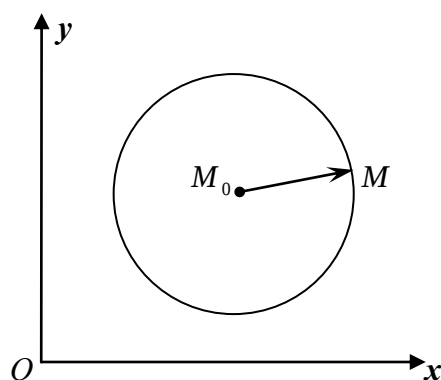
Розділ 4

Лінії другого порядку на площині

§-1. Коло

Означення. Колом називається геометричне місце точок площини, віддалі від яких до фіксованої точки, яка називається *центром кола*, є величина стала, рівна R . Число R називається *радіусом кола*.

Нехай дано коло з центром в точці $M_0(x_0, y_0)$ радіусом R (мал. 44). Скласти рівняння цього кола.



мал. 44

Візьмемо довільну точку $M(x, y)$, що належить колу. Тоді $|\overrightarrow{M_0M}| = R$, де $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0)$. Звідки отримаємо:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R,$$

$$\text{або} \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \quad (4.1)$$

– рівняння кола.

Рівняння кола з центром в початку координат має вигляд:

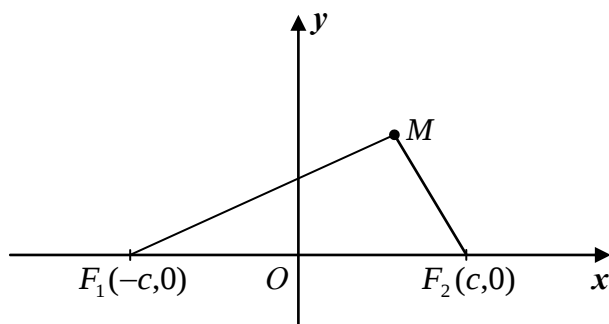
$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (4.2)$$

§-2. Еліпс

Означення. Еліпсом називається геометричне місце точок площини, сума віддалей яких до двох фіксованих точок, які називаються *фокусами*, є величина стала, рівна $2a$, де $2a > 2c$, $2c$ – віддаль між фокусами.

Побудуємо систему координат так: вісь Ox проведемо через фокуси F_1 і F_2 , а вісь Oy проведемо через середину відрізка $F_1F_2 = 2c$ перпендикулярно до осі Ox .

Візьмемо довільну точку $M(x, y)$, що належить еліпсу (мал. 45).



мал. 45

За умовою, сума віддалей від точки M до фокусів F_1 і F_2 рівна $2a$, тобто: $F_1M + F_2M = 2a$, де $\overrightarrow{F_1M}(x+c, y)$, $\overrightarrow{F_2M}(x-c, y)$.

Тоді $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$. Звідки: $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.

Піднесемо до квадрату обидві частини рівності та виконаємо необхідні спрощення:

$$\begin{aligned}(x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2, \\ x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2, \\ 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 4a^2 - 4cx, \\ a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= a^2 - cx.\end{aligned}$$

Піднесемо до квадрату:

$$\begin{aligned}a^2((x-c)^2 + y^2) &= (a^2 - cx)^2, \\ a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2, \\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2, \\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2).\end{aligned}$$

Так як $a > c$ (за умовою), то $a^2 - c^2 > 0$. Тому позначимо:

$$a^2 - c^2 = b^2. \quad (4.3)$$

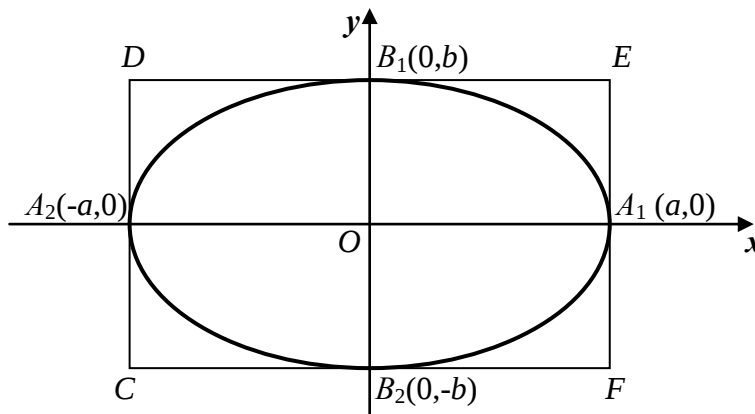
Звідки: $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$.

Поділимо останню рівність почленно на $a^2 b^2$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4.4)$$

– канонічне рівняння еліпса.

Графік еліпса зображено на мал. 46.



мал. 46

Властивості еліпса:

- 1) Оскільки рівняння (4.4) є рівнянням другого степеня, то еліпс – лінія другого порядку.
- 2) Еліпс симетричний відносно осей Ox і Oy , а також відносно початку координат.
- 3) Означення. Вершинами еліпса називаються його точки перетину з осями координат.

Еліпс має чотири вершини: A_1, A_2, B_1, B_2 .

- 4) Еліпс повністю міститься у прямокутнику $CDEF$, тобто для еліпса виконуються нерівності:

$$\begin{cases} -a \leq x \leq a, \\ -b \leq y \leq b. \end{cases}$$

Означення. Відрізок $2a$ називається *великою віссю еліпса*, відрізок $2b$ – *малою віссю еліпса*.

Означення. Ексцентриситетом еліпса називається відношення міжфокусної віддалі до великої осі:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad (4.5)$$

де $0 \leq \varepsilon < 1$.

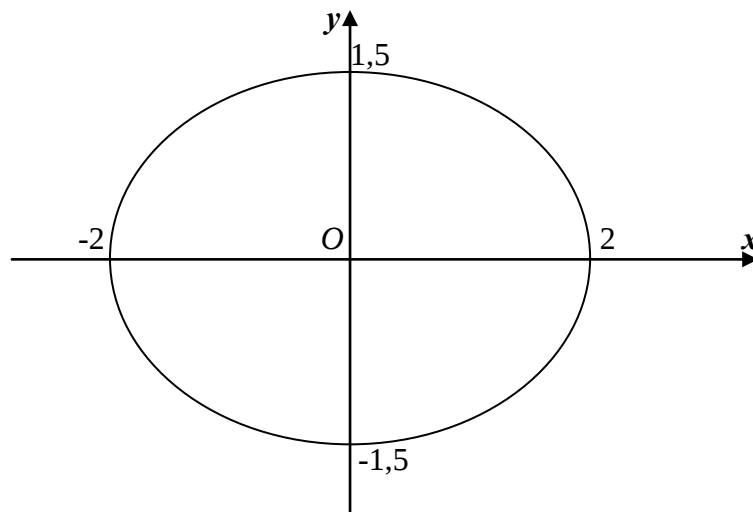
Приклад. Побудувати еліпс: $9x^2 + 16y^2 = 36$ і знайти параметри a, b, c, ε .

Зведемо рівняння еліпса до канонічного вигляду:

$$\frac{9x^2}{36} + \frac{16y^2}{36} = 1,$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1.$$

Звідси отримаємо: $a = \sqrt{4} = 2$, $b = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1,5$. Графік еліпса зображено на мал. 47.



мал. 47

З формули (4.3) знайдемо c : $c^2 = a^2 - b^2 = 4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4}$. Тоді $c = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

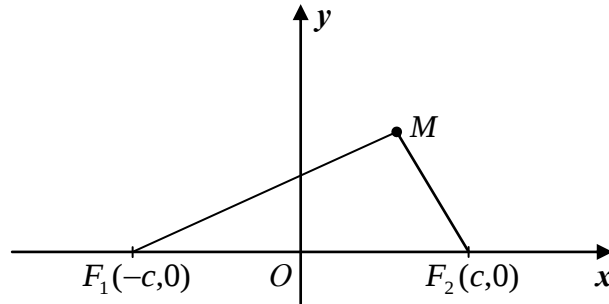
Знайдемо ε за формулою (4.5): $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

§-3. Гіпербола

Означення. Гіперболою називається геометричне місце точок площини, різниця віддалей яких до двох фіксованих точок, які називаються *фокусами*, є величина стала, рівна $2a$, де $2a < 2c$, $2c$ – віддаль між фокусами.

Побудуємо систему координат так: вісь Ox проведемо через фокуси F_1 і F_2 , а вісь Oy проведемо через середину відрізка $F_1F_2 = 2c$ перпендикулярно до осі Ox .

Візьмемо довільну точку $M(x, y)$, що належить гіперболі (мал. 48).



мал. 48

За умовою, різниця віддалей від точки M до фокусів F_1 і F_2 рівна $2a$, тобто:

$$F_1M - F_2M = 2a, \text{ де } \overrightarrow{F_1M}(x+c, y), \overrightarrow{F_2M}(x-c, y).$$

$$\text{Тоді } \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \text{ Звідки: } \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Піднесемо до квадрату обидві частини рівності та виконаємо необхідні спрощення:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4cx - 4a^2, \quad a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2.$$

Піднесемо до квадрату:

$$a^2((x-c)^2 + y^2) = (cx - a^2)^2,$$

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = c^2x^2 - 2a^2cx + a^4,$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4,$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Так як $a < c$ (за умовою), то $c^2 - a^2 > 0$. Тому позначимо:

$$c^2 - a^2 = b^2. \quad (4.6)$$

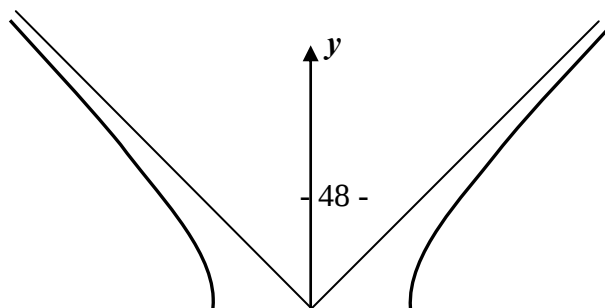
$$\text{Звідки: } b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

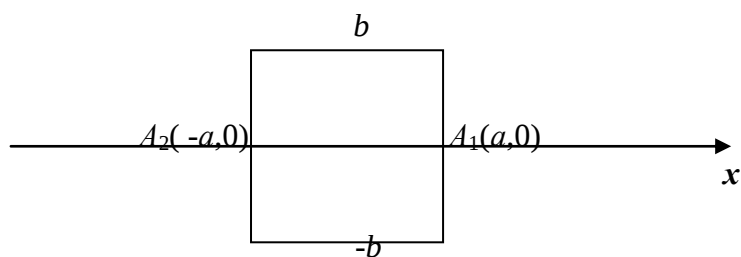
Поділимо останню рівність почленно на a^2b^2 :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4.7)$$

– канонічне рівняння гіперболи.

Графік гіперболи зображено на мал. 49.





мал. 49

Властивості гіперболи:

- 1) Оскільки рівняння (4.7) є рівнянням другого степеня, то гіпербола – лінія другого порядку.
- 2) Гіпербола симетрична відносно осей Ox і Oy , а також відносно початку координат.
- 3) Означення. Вершинами гіперболи називаються її точки перетину з віссю Ox .

Гіпербола має дві вершини: A_1, A_2 .

- 4) Гіпербола має дві асимптоти, які задаються рівняннями:

$$y_1 = \frac{b}{a}x \quad \text{і} \quad y_2 = -\frac{b}{a}x.$$

Означення. Відрізок $2a$ називається дійсною віссю гіперболи, відрізок $2b$ – уявною віссю гіперболи.

Означення. Ексцентриситетом гіперболи називається відношення міжфокусної віддалі до дійсної осі:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \tag{4.8}$$

де $\varepsilon > 1$.

Приклад. Побудувати гіперболу: $16x^2 - 64y^2 = 25$ і знайти параметри a, b, c, ε .

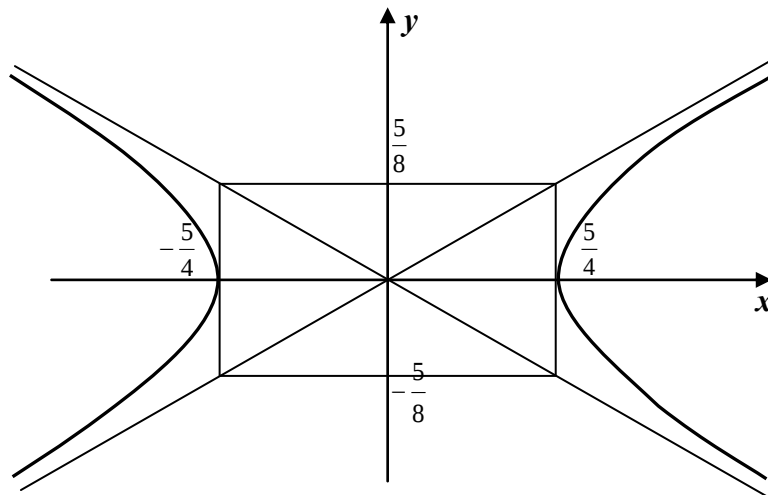
Зведемо рівняння гіперболи до канонічного вигляду:

$$\frac{16x^2}{25} - \frac{64y^2}{25} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\frac{25}{16}} - \frac{y^2}{\frac{25}{64}} = 1.$$

Звідси отримаємо: $a = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$, $b = \sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8}$.

Графік гіперболи зображено на мал. 50.



мал. 50

З формули (4.6) знайдемо c :

$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{25}{16} + \frac{25}{64} = 25 \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{64} \right) = 25 \cdot \frac{80}{16 \cdot 64} = \frac{25 \cdot 5}{64} = \frac{125}{64}.$$

$$\text{Тоді } c = \sqrt{\frac{125}{64}} = \frac{5\sqrt{5}}{8}.$$

Знайдемо ε за формулою (4.8):

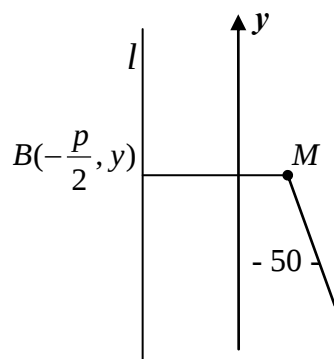
$$\varepsilon = \frac{\frac{5\sqrt{5}}{8}}{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

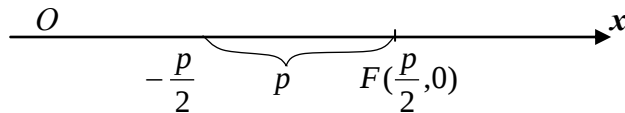
§-4. Парабола

Означення. *Параболою* називається геометричне місце точок площини, рівновіддалених від даної точки, яка називається *фокусом*, і від даної прямої, яка називається *директрисою*.

Побудуємо систему координат так: вісь Ox проведемо через фокус F перпендикулярно до директриси; вісь Oy проведемо посередині між фокусом і директрисою відрізка перпендикулярно до осі Ox .

Візьмемо довільну точку $M(x, y)$, що належить параболі (мал. 51).





мал. 51

За умовою, віддалі від точки M до фокуса F і до директриси рівні, тобто: $FM = BM$, де $\overrightarrow{FM}\left(x - \frac{p}{2}, y\right)$, $\overrightarrow{BM}\left(x + \frac{p}{2}, 0\right)$.

Тоді
$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}.$$

Піднесемо до квадрату обидві частини рівності та виконаємо необхідні спрощення:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2,$$

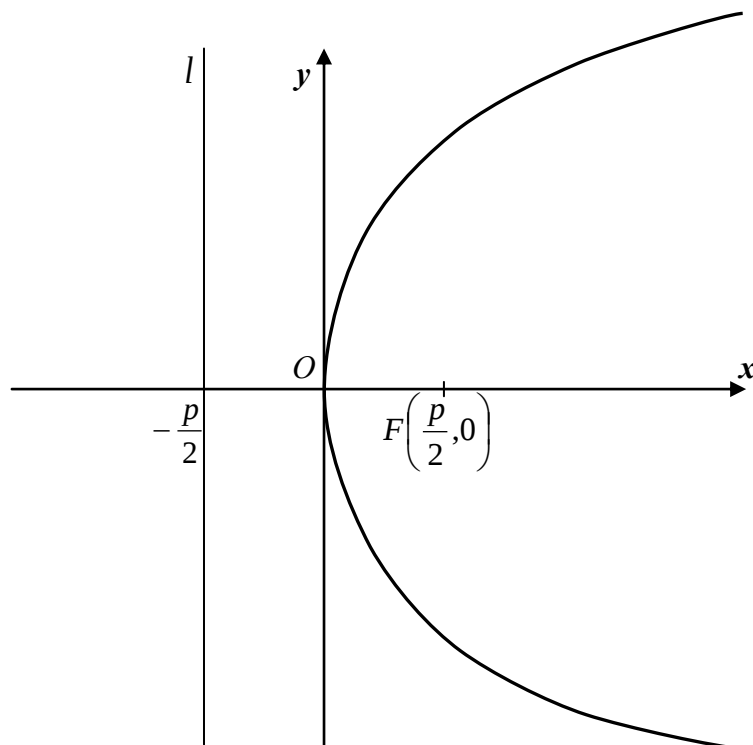
$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}.$$

Звідки:

$$y^2 = 2px \quad (4.9)$$

– канонічне рівняння параболи.

Графік параболи зображено на мал. 52.



Властивості параболи:

- 1) Оскільки рівняння (4.10) є рівнянням другого степеня, то парабола – лінія другого порядку.
- 2) Парабола симетрична відносно осі Ox .
- 3) Парабола має одну вершину в початку координат.
- 4) Парабола повністю міститься в правій півплощині відносно осі Oy .

Приклад. Побудувати параболу: $2y^2 = 5x$ і знайти директрису та координати фокуса.

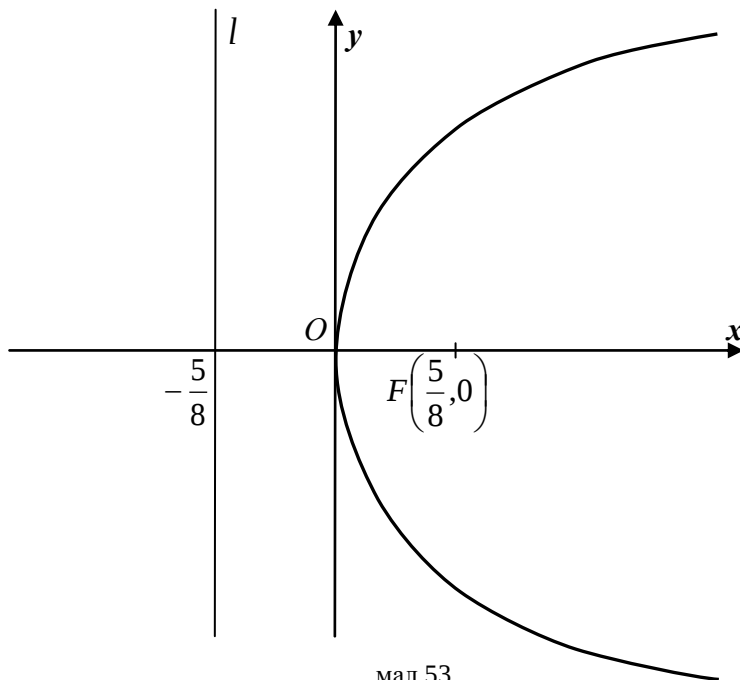
Зведемо рівняння параболи до канонічного вигляду:

$$y^2 = \frac{5}{2}x.$$

Звідси отримаємо: $2p = \frac{5}{2} \Rightarrow p = \frac{5}{4}$. Рівняння директриси: $x = -\frac{5}{8}$. Координати фокуса:

$$F\left(\frac{5}{8}, 0\right).$$

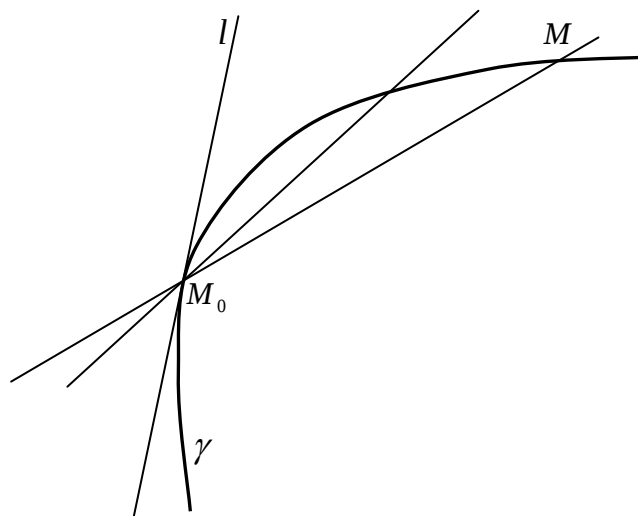
Графік параболи зображено на мал. 53.



мал.53

§-5. Дотичні до ліній другого порядку

Означення. Дотичною до лінії γ в точці M_0 називається граничне положення січної M_0M , коли точка M прямує до M_0 вздовж лінії γ (мал. 54).



мал.54

Рівняння дотичних до ліній другого порядку мають вигляд:

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1 \quad (4.11)$$

– рівняння дотичної до еліпса,

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1 \quad (4.12)$$

– рівняння дотичної до гіперболи,

$$y_0y = p(x + x_0) \quad (4.13)$$

– рівняння дотичної до параболи.

Приклад. Знайти дотичну до еліпса: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ в точці $A(0, -2)$.

Рівняння дотичної згідно з формулою (4.11) має вигляд:

$$\frac{0 \cdot x}{9} + \frac{(-2) \cdot y}{4} = 1. \quad \text{Звідки: } y = -2 \text{ — дотична до еліпса.}$$

Розділ 5

Комплексні числа

§-1. Комплексні числа як розширення множини дійсних чисел

Означення. Множина всіх можливих впорядкованих пар (x, y) дійсних чисел, операції додавання, множення, а також їх рівність означаються за допомогою формул:

$$1) \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (5.1)$$

$$2) \quad (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1), \quad (5.2)$$

$$3) \quad (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ і } y_1 = y_2, \quad (5.3)$$

називається *множиною комплексних чисел*.

Множина комплексних чисел позначається: C .

Елементи множини $\mathbf{C}$ називаються *комплексними числами*.

Якщо впорядковану пару $(x, 0)$, $x \in \mathbf{R}$, ототожнити з дійсним числом x , поклавши $(x, 0) = x$, то отримаємо, що множина $\mathbf{C}$ комплексних чисел є розширенням множини $\mathbf{R}$ дійсних чисел.

Оскільки $(0, 1) \cdot (y, 0) = (0, y)$, то комплексне число $z = (x, y)$ допускає представлення:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0).$$

Тобто, це число можна записати у вигляді: $z = x + iy$, якщо ввести позначення: $i = (0, 1)$ і вважати, що $(x, 0) = x$, $(y, 0) = y$.

Впорядкована пара $i = (0, 1)$ називається *уявною одиницею*. Вона володіє властивістю:

$$i^2 = -1, \quad (5.4)$$

оскільки $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$.

Означення. Запис комплексного числа у вигляді:

$$z = x + iy, \quad (5.5)$$

де $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$, i – уявна одиниця, називається *алгебраїчною формою комплексного числа* $z = (x, y)$. При цьому x називається *дійсною частиною комплексного числа* z і позначається: $x = \operatorname{Re} z$; y називається *уявною частиною* і позначається: $y = \operatorname{Im} z$.

Якщо $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то формули (5.1), (5.2), (5.3) запишуться відповідно у вигляді:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \quad (5.6)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1), \quad (5.7)$$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \text{ і } \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2. \quad (5.8)$$

Зокрема:
$$z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z = 0 \text{ і } \operatorname{Im} z = 0. \quad (5.9)$$

Якщо $\operatorname{Im} z = 0$, то число z є дійсним числом. Якщо $\operatorname{Im} z \neq 0$, то комплексне число z називається *уявним числом*.

Операція віднімання комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ здійснюється за допомогою рівності:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \quad (5.10)$$

Означення. Комплексне число

$$\bar{z} = x - iy \quad (5.11)$$

називається *спряженим до комплексного числа* $z = x + iy$.

Очевидно, що $\overline{(\bar{z})} = z$, $\bar{\bar{z}} = z \Leftrightarrow z \in \mathbf{R}$.

Означення. Дійсне число

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (5.12)$$

називається *модулем комплексного числа* $z = x + iy$.

Очевидно, що завжди $|z| \geq 0$ і $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Справедливі також рівності:

$$|\bar{z}| = |z|, \quad (5.13)$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2, \quad (5.14)$$

оскільки $|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$, $z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$.

Дія ділення комплексного числа z_1 на комплексне число z_2 здійснюється за допомогою рівностей:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}. \quad (5.15)$$

Отже, частка комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ обчислюється за формулою:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (5.16)$$

Приклад. Виконати дії та знайти дійсну і уявну частини результату:

1) $(3 - 2i)(5 + 7i)$,

2) $\frac{4 + 3i}{5 - 2i}$.

1) $(3 - 2i)(5 + 7i) = 15 + 21i - 10i - 14i^2 = 15 + 11i + 14 = 29 + 11i$.

Тоді $\operatorname{Re} z = 29$, $\operatorname{Im} z = 11$.

2) $\frac{4 + 3i}{5 - 2i} = \frac{(4 + 3i)(5 + 2i)}{(5 - 2i)(5 + 2i)} = \frac{20 + 8i + 15i + 6i^2}{5^2 - (2i)^2} = \frac{20 + 23i - 6}{25 + 4} = \frac{14 + 23i}{29} = \frac{14}{29} + \frac{23}{29}i$.

Тоді $\operatorname{Re} z = \frac{14}{29}$, $\operatorname{Im} z = \frac{23}{29}$.

§-2. Розв'язування квадратних рівнянь з від'ємним дискримінантом

Означення. Квадратним рівнянням називається рівняння виду:

$$ax^2 + bx + c = 0. \quad (5.17)$$

Розв'язки цього рівняння у випадку невід'ємного дискримінанта

$$D = b^2 - 4ac \quad (5.18)$$

шукаються за формулами:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}. \quad (5.19)$$

Якщо ж $D < 0$, то рівняння (5.17) на множині дійсних чисел $\mathbf{R}$ не має розв'язків. У цьому випадку знаходять уявні корені квадратного рівняння, тобто, корені на множині комплексних чисел $\mathbf{C}$.

Оскільки $i^2 = -1$, то $i = \sqrt{-1}$. Якщо $D < 0$, то $-D > 0$ і

$$\sqrt{D} = \sqrt{(-1) \cdot (-D)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-D} = i\sqrt{-D}.$$

Тоді розв'язки квадратного рівняння з від'ємним дискримінантом згідно із (5.19) обчислюються за формулами:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a} \quad (5.20)$$

Приклад. Розв'язати квадратне рівняння: $x^2 - 2x + 5 = 0$.

За формулою (5.18): $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16 < 0$.

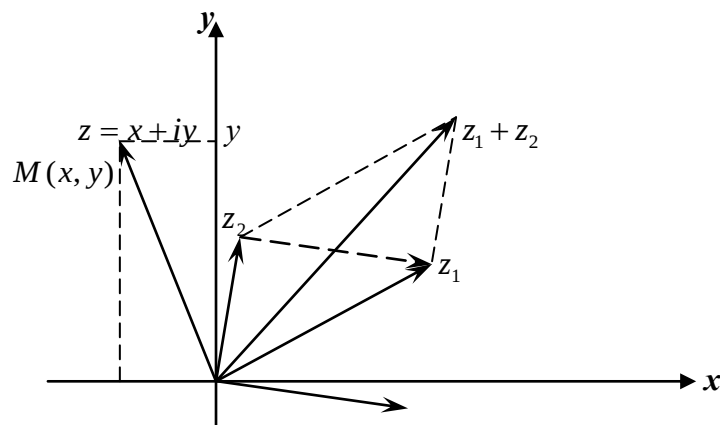
Тоді з формули (5.20) отримаємо:

$$x_1 = \frac{2 + i\sqrt{16}}{2} = \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i,$$

$$x_2 = \frac{2 - i\sqrt{16}}{2} = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i.$$

§-3. Геометричне тлумачення комплексних чисел та дій над ними

Якщо в площині введено прямокутну декартову систему координат, то між сукупністю всіх точок координатної площини і множиною комплексних чисел $\mathbf{C}$ можна встановити взаємно однозначну відповідність за таким правилом: комплексному числу $z = x + iy \in \mathbf{C}$ відповідає єдина точка $M(x, y)$ цієї площини і навпаки (мал. 55). При цьому кажуть, що точка $M(x, y)$ є зображенням комплексного числа $z = x + iy$ на площині.



Оскільки дійсні числа $x = (x, 0)$ зображаються точками осі Ox , то ця вісь називається *дійсною віссю*. Оскільки уявні числа виду $iy = (0, y)$ зображаються точками осі Oy , то ця вісь називається *уявною віссю*.

Комплексне число $z = x + iy$ можна також зобразити на координатній площині вектором $\overrightarrow{OM}$ із початком в точці $O(0, 0)$ і кінцем в точці $M(x, y)$. Тоді сума $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ зобразиться вектором, що є діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах, які зображають комплексні числа z_1 та z_2 . Комплексне число $z_1 - z_2$ зобразиться вектором, який є іншою діагоналлю цього паралелограма, або вектором, що виходить з початку координат і паралельний до цієї діагоналі (мал. 55).

Модуль $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ комплексного числа $z = x + iy$ дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{OM}$, який зображає це комплексне число, а величина $|z_1 - z_2|$ є відстань між точками, що зображають комплексні числа z_1 та z_2 на площині.

Як впливає з геометричних міркувань, для довільних комплексних чисел z_1 і z_2 справедливі нерівності:

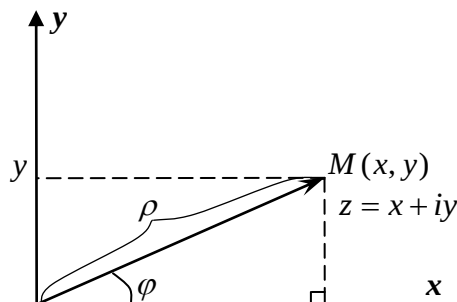
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad (5.21)$$

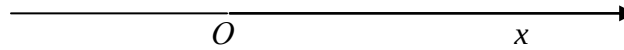
$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|. \quad (5.22)$$

§-4. Тригонометрична і показникова форми комплексного числа

Поряд із прямокутними декартовими координатами (x, y) точки M , яка на комплексній площині зображає комплексне число $z = x + iy$, розглянемо її полярні координати (ρ, φ) , де ρ – довжина радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$ точки M , φ – полярний кут точки M , тобто кут між додатним напрямком осі Ox і вектором $\overrightarrow{OM}$ (мал. 56). При цьому кут φ вважається від'ємним, якщо він вимірюється в напрямку, що відповідає руху годинникової стрілки, і додатним – в протилежному випадку.

Очевидно, що завжди $\rho \geq 0$ і $-\infty < \varphi < +\infty$.





мал. 56

Якщо (ρ, φ) – полярні координати точки $M(x, y)$, що зображає комплексне число $z = x + iy$ на комплексній площині, то

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (5.23)$$

а число φ називається *аргументом комплексного числа z* .

Для комплексного числа $z = x + iy$ з полярними координатами (ρ, φ) справедливі рівності:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases} \quad (5.24)$$

Звідси отримаємо:

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (5.25)$$

– *тригонометрична форма комплексного числа z* .

Введемо позначення:
$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (5.26)$$

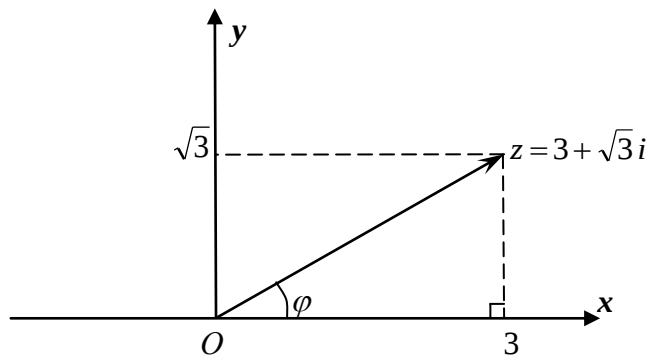
Тоді з формули (5.25) отримаємо:

$$z = \rho e^{i\varphi} \quad (5.27)$$

– *показникова форма комплексного числа*.

Приклад. Знайти тригонометричну та показникову форми комплексного числа $z = 3 + \sqrt{3}i$.

Комплексне число $z = 3 + \sqrt{3}i$ зображається вектором із початком в точці $O(0,0)$ і кінцем в точці $(3, \sqrt{3})$ (мал. 57).



мал. 57

Знайдемо ρ за формулою (5.23):

$$\rho = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Знайдемо φ за формулою (5.24):

$$\cos \varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \text{Звідси } \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Отже, тригонометрична форма комплексного числа $z = 3 + \sqrt{3}i$ за формулою (5.25) має вигляд:

$$z = 2\sqrt{3}(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}).$$

Показникову форму знайдемо за формулою (5.27):

$$z = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

§-5. Дії над комплексними числами в тригонометричній та показниковій формах

Над комплексними чисел z_1 і z_2 , записаними в тригонометричній формі:

$$\begin{aligned} z_1 &= \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \\ z_2 &= \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2), \end{aligned} \quad (5.28)$$

дії множення і ділення виконуються за такими правилами:

I. Множення комплексних чисел

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= \rho_1 \cdot \rho_2 (\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) = \\ &= \rho_1 \cdot \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

$$\text{Отже, отримаємо:} \quad z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \quad (5.29)$$

– модуль добутку комплексних чисел дорівнює добутку їх модулів, аргумент добутку дорівнює сумі їх аргументів.

II. Ділення комплексних чисел

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{\rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \cdot (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} = \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - i \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2}{\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2} = \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \end{aligned}$$

$$\text{Звідси матимемо:} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (5.30)$$

– модуль частки комплексних чисел дорівнює частці їх модулів, аргумент частки дорівнює різниці їх аргументів.

III. Піднесення комплексних чисел до цілого степеня (формула Муавра)

Нехай маємо комплексне число z , записане в тригонометричній формі:

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Застосовуючи до цього числа формулу (5.29), можна отримати таку рівність:

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \quad (5.31)$$

– формула Муавра.

IV. Добування кореня з комплексних чисел

Означення. Коренем n -го степеня з комплексного числа Z називається таке комплексне число ω , що $\omega^n = Z$.

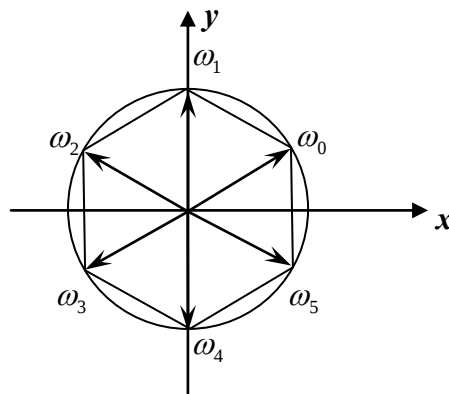
При $z \neq 0$ існує n різних комплексних чисел $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$, що є коренями n -го степеня з комплексного числа Z .

Корені ω_k n -го степеня з комплексного числа $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ обчислюються за формулами:

$$\omega_k = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad (5.32)$$

де $k = \overline{0, n-1}$.

Всі корені ω_k n -го степеня з комплексного числа Z лежать на колі радіусом $\sqrt[n]{\rho}$ з центром в початку координат. Сполучивши їх послідовно, отримаємо правильний n -кутник, вписаний у це коло (мал. 58 – випадок кореня 6-го степеня).



мал. 58

Приклад. Знайти корені 4-го степеня з числа $z = -1$.

Знайдемо тригонометричну форму числа $z = -1$. Очевидно, що $\rho = 1, \varphi = \pi$. Звідси отримаємо:

$$z = 1 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi).$$

Тоді за формулою (5.32) матимемо:

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi \cdot 0}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi \cdot 0}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i, \\ \omega_1 &= \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi \cdot 1}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi \cdot 1}{4} \right) = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i, \\ \omega_2 &= \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi \cdot 2}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi \cdot 2}{4} \right) = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i, \\ \omega_3 &= \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi \cdot 3}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi \cdot 3}{4} \right) = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i.\end{aligned}$$

Якщо комплексні числа z_1 і z_2 записані в показниковій формі:

$$\begin{aligned}z_1 &= \rho_1 e^{i\varphi_1}, \\ z_2 &= \rho_2 e^{i\varphi_2},\end{aligned}\tag{5.33}$$

то дії множення і ділення згідно із формулами (2.29) і (2.30) виконуються так:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},\tag{5.34}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.\tag{5.35}$$

Для комплексного числа z , записаного в показниковій формі:

$z = \rho e^{i\varphi}$, піднесення цього числа до n -го степеня і добування з нього кореня n -го степеня виконуються відповідно до формул (5.31), (5.32) за правилами:

$$z^n = \rho^n \cdot e^{in\varphi},\tag{5.36}$$

– *формула Муавра*.

$$\omega_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{\frac{\varphi + 2\pi k}{n}},\tag{5.37}$$

де $k = \overline{0, n-1}$.

Розділ 6

Диференціальне числення

§-1. Числова послідовність. Границя числової послідовності

Означення. Правило, згідно з яким кожному натуральному числу n ставиться у відповідність деяке дійсне число x_n , називається *числовою послідовністю*.

Числову послідовність записують так: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ або $\{x_n\}$. Число x_1 називається *першим елементом послідовності*, x_2 – *другим елементом*, ..., x_n – *n-ним або загальним елементом послідовності*.

Приклад.

- 1) $1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots; x_n = n^2$.
- 2) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots; x_n = \frac{1}{n}$.
- 3) $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots; x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$.

Означення. Число a називається *границею послідовності*, якщо:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N}: \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon. \quad (6.1)$$

Якщо число a є границею послідовності $\{x_n\}$, то це записують так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a. \quad (6.2)$$

Послідовність, яка має границю, називається *збіжною*.

Приклад. Користуючись означенням границі послідовності, довести, що: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Доведемо, що $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N}: \forall n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$.

Спростимо останню нерівність:

$$\left| \frac{-1}{n+1} \right| < \varepsilon, \quad \frac{1}{n+1} < \varepsilon, \quad n+1 > \frac{1}{\varepsilon}, \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Тоді в ролі n_0 можна взяти цілу частину числа $\frac{1}{\varepsilon} - 1$, тобто:

$$n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right].$$

Теорема (властивості границь послідовностей)

Нехай послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ мають границі: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$. Тоді:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b \quad (6.3)$$

– границя суми (різниці) дорівнює сумі (різниці) границь,

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b \quad (6.4)$$

– границя добутку дорівнює добутку границь,

$$3) \text{ Якщо } b \neq 0, \text{ то: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} \quad (6.5)$$

– границя частки дорівнює частці границь,

$$4) \text{ Якщо } c = \text{const}, \text{ то: } \lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot x_n) = c \cdot a \quad (6.6)$$

– сталий множник можна виносити за знак границі.

Приклад. Обчислити границі:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{5n^2+8} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{8}{n^2}} = \frac{0}{5} = 0.$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3+n-3}{n-5} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^3}}{\frac{1}{n^2} - \frac{5}{n^3}} = \left(\frac{4}{0} \right) = \infty.$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+2n+1}{2n^2-5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{5}{n^2}} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

§-2. Означення і способи задання функцій. Основні властивості функцій

Означення. Нехай X, Y – дві непорожні множини. Функцією, визначеною на множині X , називається правило, згідно з яким кожному елементу $x \in X$ ставиться у відповідність єдиний елемент $y \in Y$.

Для запису функцій застосовують позначення:

$$y = f(x), \quad f: X \rightarrow Y, \quad X \xrightarrow{f} Y \text{ та ін.}$$

Якщо маємо функцію $f : X \rightarrow Y$, то множину X називають *областю визначення функції* і позначають: $D(f) = X$, множину Y називають *областю значень функції* і позначають: $E(f) = Y$.

Означення. Графіком функції називається множина точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати – відповідним значенням функції.

Способи задання функцій:

- 1) *Аналітичний* – функція задається за допомогою формули.
- 2) *Табличний* – функція задається у вигляді таблиці з відповідними значеннями x та y .
- 3) *Графічний* – функція задається за допомогою графіка.
- 4) *Словесний* – описовий метод задання функції.
- 5) *Параметричний* – функція задається за допомогою системи:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in (\alpha, \beta). \quad (6.7)$$

Властивості функцій:

1. Означення. Функція $f(x)$ називається *парною*, якщо: $\forall x \in D(f) : (-x) \in D(f)$ і $f(-x) = f(x)$.

Функція $f(x)$ називається *непарною*, якщо: $\forall x \in D(f) : (-x) \in D(f)$ і $f(-x) = -f(x)$.

2. Означення. Функція $f(x)$ називається *періодичною*, якщо: $\forall x \in D(f) \exists T > 0 : (x+T), (x-T) \in D(f)$ і $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$. Найменше додатне число T (якщо воно існує) називається *найменшим додатним періодом функції*.

3. Означення. Функція $f(x)$ називається *зростаючою (неспадною)*, якщо:

$$4. \quad \forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) \leq f(x_2)).$$

Функція $f(x)$ називається *спадною (незростаючою)*, якщо:

$$\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2)).$$

§-3. Границі функції в точці. Різні означення границі. Перша і друга важливі границі

Означення. ε -околом точки a називається інтервал: $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Означення. Точка x_0 називається *точкою скупчення множини X* , якщо в довільному ε -околі цієї точки міститься хоча б одна точка з множини X , відмінна від x_0 .

Означення. Точка x_0 називається *ізолюваною точкою* множини X , якщо існує ε -окіл цієї точки, в якому немає жодної точки з множини X , відмінної від x_0 .

Нехай функція $f(x)$ визначена на множині X і x_0 – точка скупчення множини X .

Означення. (границі на мові « $\varepsilon - \delta$ » або Коші). Число A називається *границею функції* $f(x)$ в точці x_0 , якщо:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon. \quad (6.8)$$

Означення. (границі на мові послідовностей або Гейне). Число A називається *границею функції* $f(x)$ в точці x_0 , якщо для довільної послідовності $\{x_n\} \subset X$, яка збігається до x_0 , відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ збігається до A . Тобто:

$$\forall \{x_n\} \subset X : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A. \quad (6.9)$$

Якщо число A є границею функції $f(x)$ в точці x_0 , то це записують так:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A. \quad (6.10)$$

Приклад. Користуючись означенням Коші, довести, що:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5) = 1.$$

Доведемо, що $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbf{R}, 0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |3x - 5 - 1| < \varepsilon$.

Спростимо останню нерівність:

$$|3x - 6| < \varepsilon, \quad 3|x - 2| < \varepsilon, \quad |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отже, в ролі δ можна взяти число $\frac{\varepsilon}{3}$, тобто: $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

Теорема (властивості границь функцій)

Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ в точці x_0 мають границі: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ і $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$. Тоді:

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B \quad (6.11)$$

– границя суми (різниці) дорівнює сумі (різниці) границь,

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B \quad (6.12)$$

– границя добутку дорівнює добутку границь,

$$3) \text{ Якщо } B \neq 0, \text{ то: } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (6.13)$$

– границя частки дорівнює частці границь,

$$4) \text{ Якщо } c = \text{const}, \text{ то: } \lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot A \quad (6.14)$$

– сталий множник можна виносити за знак границі.

Приклад. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x - 2)}{(x-1)(x^3 + x^2 + x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 + x - 3} = \\ &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2 + 2x + 3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{3}{6} = 0,5. \end{aligned}$$

Теорема (перша важлива границя)

$$\text{Має місце рівність:} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (6.15)$$

Теорема (друга важлива границя)

$$\text{Справедлива рівність:} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e. \quad (6.16)$$

Приклад. Знайти границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x},$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+5} \right)^{x-1}.$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 5x}{5x} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 5 \cdot 1 = 5$$

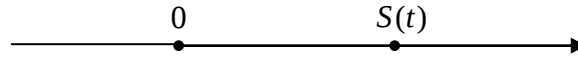
$$\begin{aligned} 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+5} \right)^{x-1} &= (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x+1}{2x+5} - 1 \right)^{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-4}{2x+5} \right)^{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-4}{2x+5} \right)^{\frac{2x+5}{-4} \cdot \frac{-4}{2x+5} \cdot (x-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4 \cdot (x-1)}{2x+5}} = e^{\frac{-4}{2}} = e^{-2}. \end{aligned}$$

§-4. Основні задачі, що приводять до поняття похідної. Геометричний та фізичний зміст похідної

Нехай деяке тіло рухається прямолінійно і відомо його закон руху:

$$S = S(t), \quad (6.17)$$

де t – час, S – шлях, який пройшло тіло за час t (мал. 59).



мал. 59

Розглянемо задачу про знаходження швидкості в момент часу $t = t_0$. Для цього візьмемо деякий час Δt і знайдемо шлях, який пройде тіло за проміжок часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$. Цей шлях буде рівний: $\Delta S = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)$.

Середня швидкість на вказаному проміжку часу знаходиться за формулою:

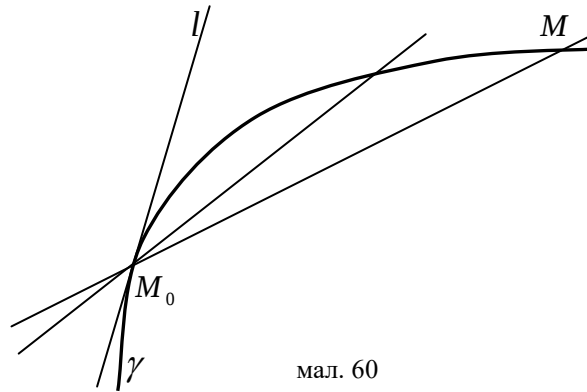
$$v_c = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}. \quad (6.18)$$

Якщо Δt буде досить малим, то v_c буде наближено рівна швидкості тіла в момент часу t_0 . Тобто:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}. \quad (6.19)$$

– *миттєва швидкість тіла в момент часу t_0 .*

Розглянемо деяку лінію γ (мал. 60).



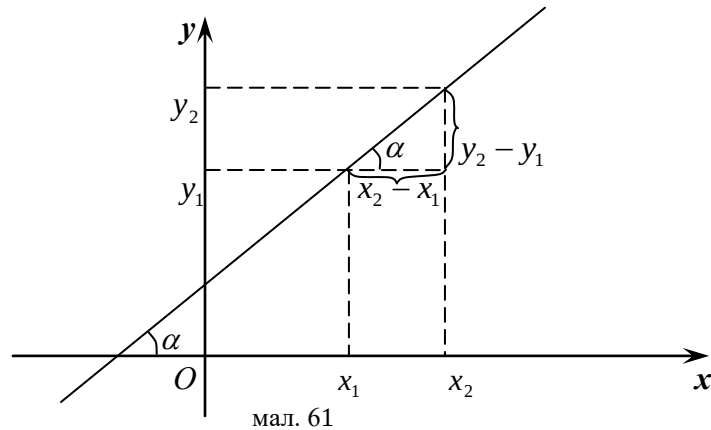
мал. 60

Візьмемо на цій кривій деяку точку M_0 і зафіксуємо її. Крім точки M_0 , на кривій виберемо ще одну точку M . Проведемо через точки M_0 і M пряму. Ця пряма називається *січною*.

Тепер точку M по кривій γ будемо наближати до точки M_0 . Відповідні січні M_0M будуть повертатись в точці M_0 . Може так відбутись, що при наближенні точки M по кривій γ до точки M_0 січні будуть наближатись до деякої прямої l . В цьому випадку кажуть, що крива γ є *гладкою в точці M_0* , а пряму l називають *дотичною до кривої γ в точці M_0* .

Існують також криві, які в деяких точках не мають дотичних.

Розглянемо пряму: $y = kx + b$, де k – кутовий коефіцієнт прямої. Візьмемо дві точки на цій прямій (x_1, y_1) і (x_2, y_2) (мал. 61).

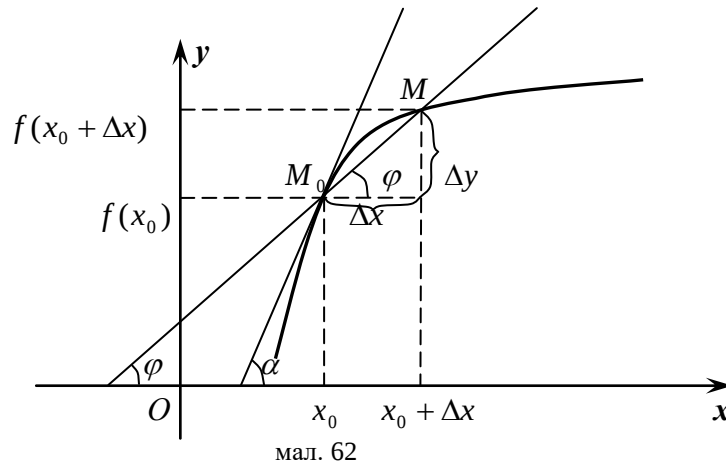


мал. 61

Як відомо, кутовий коефіцієнт прямої дорівнює тангенсу кута нахилу прямої до додатного напрямку осі Ox . Крім того, як видно з малюнка:

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (6.20)$$

Нехай лінія γ є графіком неперервної функції $y = f(x)$ (мал. 62). Візьмемо на цій кривій точку $M_0(x_0, f(x_0))$. Крім цього візьмемо також точку $M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$.



мал. 62

Коли $\Delta x \rightarrow 0$, то внаслідок неперервності функції точка M по кривій γ буде наближатись до точки M_0 . Кутовий коефіцієнт січної M_0M знайдемо за формулою:

$$k_c = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (6.21)$$

В тому випадку, коли в точці M_0 до кривої можна провести дотичну, при наближенні M до M_0 січні будуть наближатися до дотичної. А тому: $\varphi \rightarrow \alpha$. Звідки слідує, що: $\operatorname{tg} \varphi \rightarrow \operatorname{tg} \alpha$. Отже кутовий коефіцієнт дотичної знайдемо з рівностей:

$$k_{\text{дот}} = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (6.22)$$

Як бачимо, задача про знаходження миттєвої швидкості і задача про знаходження кутового коефіцієнта дотичної приводять до обчислення границь виду:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Різниця $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$ (6.23)

називається *приростом функції в точці x_0* .

Означення. Границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля, називається *похідною функції в точці*, тобто:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (6.24)$$

Означення. Функція, яка має похідну в точці x_0 , називається *диференційовною в цій точці*. Якщо функція має похідну в кожній точці деякого проміжку (a, b) , то вона називається *диференційною на цьому проміжку*.

Для похідної функції вживають також позначення: $y', y'_x, f', f'_x, \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}$.

Приклад. Знайти $f'(2)$, якщо $f(x) = x^2 \sin(x - 2)$.

Оскільки $x_0 = 2$, то з формули (6.20) отримаємо:

$f(x)$	C	x	x^2	x^3	x^n	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[n]{x}$	e^x	a^x
--------	-----	-----	-------	-------	-------	---------------	------------	---------------	---------------	-------	-------

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 \cdot \sin(2 + \Delta x - 2) - 2^2 \cdot \sin(2 - 2)}{\Delta x}.$$

Із

задач про миттєву швидкість і кутовий коефіцієнт дотичної випливає, що **механічно швидкість є похідною від шляху по часу**:

$$v = S'(t). \quad (6.25)$$

Геометрично похідна є кутовий коефіцієнт дотичної. Рівняння дотичної має вигляд:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0). \quad (6.26)$$

Крім рівняння дотичної, розглядають ще рівняння *нормалі* до кривої (прямої, яка перпендикулярна до дотичної). Враховуючи умову перпендикулярності прямих:

$$k_{\text{нор}} = -\frac{1}{k_{\text{дот}}}, \quad (6.27)$$

отримаємо, що *рівняння нормалі* має вигляд:

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0). \quad (6.28)$$

Таблиця похідних

$f'(x)$	0	1	$2x$	$3x^2$	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	e^x	$a^x \ln a$
$f(x)$	$\ln x$	$\log_a x$	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$	
$f'(x)$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{1}{1+x^2}$	

Означення. Другою похідною функції $f(x)$ називається похідна від функції $f'(x)$ (якщо вона існує).

Друга похідна позначається: $f''(x) = (f'(x))'$. (6.29)

Означення. Функція, яка має другу похідну в точці x_0 , називається *двічі диференційовною в цій точці*. Якщо функція має другу похідну в кожній точці деякого проміжку (a, b) , то вона називається *двічі диференційовною на цьому проміжку*.

Аналогічно означаються похідні 3-го, 4-го, ..., n -го порядку. Вони відповідно позначаються: $f'''(x), f^{(4)}(x), \dots, f^{(n)}(x)$.

§-5. Правила диференціювання функцій. Похідна складної функції

Теорема

Якщо функції $U = f(x), V = g(x)$ є диференційовними в точці x_0 , то в цій точці виконуються рівності:

$$1) (U \pm V)' = U' \pm V' \quad (6.30)$$

– похідна суми (різниці) дорівнює сумі (різниці) похідних,

$$2) (CU)' = CU', \text{ де } C = \text{const} \quad (6.31)$$

– сталий множник можна виносити за знак похідної.

$$3) (U \cdot V)' = U'V + UV', \quad (6.32)$$

$$4) \left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}. \quad (6.33)$$

Нехай маємо дві функції: $U = \varphi(x)$ і $y = f(U)$. Тоді функція $F(x) = f(\varphi(x))$ складною функцією.

Теорема

Якщо функція $U = \varphi(x)$ диференційовна в точці x_0 , а функція $y = f(U)$ диференційовна в точці $U_0 = \varphi(x_0)$, то складна функція $F(x) = f(\varphi(x))$ є диференційовною в точці x_0 . При цьому виконується рівність:

$$F'(x_0) = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0). \quad (6.34)$$

Приклад. Знайти похідну:

1) $y = 5 \sin x,$

2) $y = (x+1)(x+2)^2,$

3) $y = \frac{2x}{1-x^2},$

4) $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}.$

1) $y' = 5(\sin x)' = 5 \cos x,$

2) $y' = (x+1)' \cdot (x+2)^2 + (x+1) \cdot ((x+2)^2)' = 1 \cdot (x+2)^2 + (x+1) \cdot 2(x+2) \cdot (x+2)' =$
 $= (x+2)^2 + 2(x+1)(x+2) = (x+2)(3x+4),$

3) $y' = \frac{(2x)' \cdot (1-x^2) - 2x \cdot (1-x^2)'}{(1-x^2)^2} = \frac{2 \cdot (1-x^2) - 2x \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2},$

4) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot (x+\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{1+2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}.$

§-6. Диференціал функції і його застосування для наближених обчислень

Теорема

Для того, щоб функція $f(x)$ була диференційовною в точці x_0 , необхідно і достатньо, щоб в околі цієї точки приріст функції можна було подати у вигляді:

$$\Delta f(x_0) = A \Delta x + \varepsilon \Delta x, \quad (6.35)$$

де A – стала, $\varepsilon \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Означення. В рівності (6.35) перший доданок $A \Delta x$ називається головною частиною приросту функції.

Означення. Головну частину приросту функції називають диференціалом функції в точці x_0 .

Диференціал функції в точці x_0 позначається: $df(x_0)$.

З рівності (6.35) матимемо: $df(x_0) = A \Delta x. \quad (6.36)$

Оскільки для похідної виконується рівність:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A \Delta x + \varepsilon \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A + \varepsilon) = A,$$

то з (6.36) отримаємо:

$$df(x_0) = f'(x_0) \Delta x. \quad (6.37)$$

Для аргументу покладають: $\Delta x = dx$, де dx – диференціал змінної. З формули (6.37) дістанемо:

$$df(x_0) = f'(x_0) dx. \quad (6.38)$$

$$\text{Розглянемо рівність: } f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = f(x_0) + \Delta f(x_0). \quad (6.39)$$

В рівності (6.39) вважають, що $\Delta f(x_0) \approx df(x_0)$.

Тоді отримаємо:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0). \quad (6.40)$$

Формулу (6.40) застосовують для наближених обчислень.

Приклад. Обчислити наближено: $\sqrt[3]{1,02}$.

Розглянемо функцію: $y = \sqrt[3]{x}$.

Скористаємось рівністю (6.40), в якій матимемо: $x_0 + \Delta x = 1,02$.

Покладемо: $x_0 = 1, \Delta x = 0,02$. Тоді: $f(x_0) = f(1) = \sqrt[3]{1} = 1$.

$$df(x) = f'(x) dx = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot dx, \text{ де } dx \approx \Delta x = 0,02.$$

$$df(x_0) = df(1) = \frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}} \cdot 0,02 = \frac{0,02}{3} = \frac{1}{150}. \text{ Отже, отримаємо: } \sqrt[3]{1,02} \approx 1 + \frac{1}{150} = \frac{151}{150}.$$

§-7. Умови сталості, зростання і спадання функцій

Теорема (умова сталості функції)

Для того, щоб функція $f(x)$ була сталою на проміжку (a, b) , необхідно і достатньо, щоб вона була диференційовною на цьому проміжку і її похідна була рівна нулю, тобто:

$$f(x) = \text{const} \Leftrightarrow f'(x) = 0.$$

Цю теорему часто застосовують при доведенні тотожностей.

Приклад. Довести тотожність: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Розглянемо функцію: $f(x) = \arcsin x + \arccos x$.

Знайдемо похідну: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$. Тоді за попередньою теоремою:

$$f(x) = f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}. \text{ Звідси: } \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Означення. Функція $f(x)$ називається зростаючою (неспадною) на проміжку (a, b) , якщо:

$$\forall x_1, x_2 : a < x_1 < x_2 < b \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) \leq f(x_2)).$$

Функція $f(x)$ називається *спадною* (незростаючою) на проміжку (a, b) , якщо:

$$\forall x_1, x_2 : a < x_1 < x_2 < b \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2)).$$

Функція, яка є зростаючою або спадною на проміжку (a, b) , називається *монотонною* на цьому проміжку.

Теорема (умови зростання і спадання функцій)

Якщо функція $f(x)$ є диференційовною на проміжку (a, b) і $f'(x) > 0$, то на цьому проміжку функція $f(x)$ зростає. Якщо функція $f(x)$ є диференційовною на проміжку (a, b) і $f'(x) < 0$, то на цьому проміжку функція $f(x)$ спадає.

Приклад. Знайти проміжки монотонності функції:

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5.$$

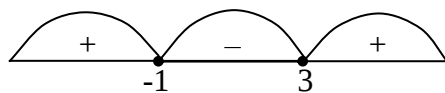
Знайдемо похідну: $y' = 3x^2 - 6x + 9$.

Знак похідної знайдемо методом інтервалів. Прирівняємо похідну до нуля:

$$3x^2 - 6x - 9 = 0 \quad \text{або} \quad x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Розкладемо на множники ліву частину рівняння:

$$(x+1)(x-3) = 0.$$



мал. 63

Як впливає з теореми і з мал. 63, $f(x) \nearrow (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$, $f(x) \searrow (-1, 3)$.

§-8. Екстремуми функцій

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку (a, b) і точка $x_0 \in (a, b)$.

Означення. Точка x_0 називається *точкою максимуму* функції $f(x)$, якщо існує деякий окіл цієї точки $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$:

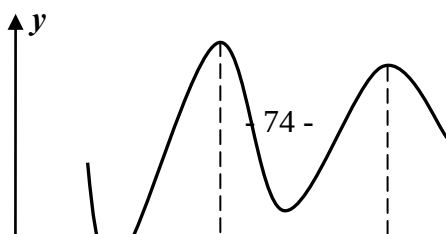
$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \leq f(x_0).$$

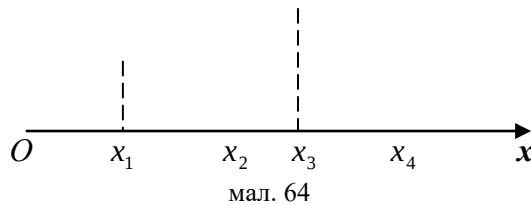
Точка x_0 називається *точкою мінімуму* функції $f(x)$, якщо існує деякий окіл цієї точки $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$:

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \geq f(x_0).$$

Відповідні значення функцій називаються відповідно *максимумом* і *мінімумом* функції.

Точки мінімуму і максимуму називаються *точками екстремуму*.





На мал. 64 точки x_1 і x_3 – точки мінімуму, x_2 і x_4 – точки максимуму.

Теорема (необхідна умова екстремуму)

Якщо точка x_0 є точкою екстремуму неперервної функції $f(x)$ і в точці x_0 функція диференційовна, то:

$$f'(x_0) = 0. \quad (6.41)$$

Означення. Точки, в яких похідна дорівнює нулю, називаються *стаціонарними* або *підозрілими на екстремум*.

Рівність нулю похідної є лише необхідною, але не достатньою умовою екстремуму. Тобто існують точки, в яких похідна рівна нулю, але в цих точках екстремуму немає. Є також функції, які мають екстремум в тих точках, в яких похідна не існує.

Означення. Точки, в яких похідна рівна нулю або не існує, називаються *критичними точками функції*.

Теорема (достатня умова екстремуму)

Нехай функція $f(x)$ є неперервною на проміжку (a, b) і $x_0 \in (a, b)$. Тоді у випадку, коли $f(x)$ є диференційовною в деякому околі точки $x_0 : (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, за винятком хіба що точки x_0 , то:

1. У випадку, коли на проміжку $(x_0 - \delta, x_0)$ $f'(x) < 0$, а на проміжку $(x_0, x_0 + \delta)$ $f'(x) > 0$, то x_0 – точка мінімуму. Іншими словами, якщо при переході через точку x_0 похідна змінює знак з «–» на «+», то x_0 – **точка мінімуму**.

2. У випадку, коли на проміжку $(x_0 - \delta, x_0)$ $f'(x) > 0$, а на проміжку $(x_0, x_0 + \delta)$ $f'(x) < 0$, то x_0 – точка максимуму. Іншими словами, якщо при переході через точку x_0 похідна змінює знак з «+» на «–», то x_0 – **точка максимуму**.

3. Якщо на кожному з проміжків $(x_0 - \delta, x_0)$, $(x_0, x_0 + \delta)$ похідна є одночасно або додатною, або від'ємною, то x_0 не є точкою екстремуму.

У прикладі попереднього параграфу за цією теоремою точками екстремуму функції є такі точки: $x_{\max} = -1$, $x_{\min} = 3$. Максимум і мінімум функції відповідно рівні:

$$y_{\max} = f(x_{\max}) = f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) + 5 = -1 - 3 + 9 + 5 = 10,$$

$$y_{\min} = f(x_{\min}) = f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 5 = 27 - 27 - 27 + 5 = -22.$$

Теорема

Якщо функція $f(x)$ є неперервною і диференційовною на проміжку (a, b) і в точці x_0 виконуються умови:

1. $f'(x_0) = 0$.
2. В деякому околі $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ функція $f(x)$ має другу похідну $f''(x)$, яка є неперервною в точці x_0 , то:
 - а) у випадку, коли $f''(x_0) > 0$, x_0 є точкою мінімуму;
 - б) у випадку, коли $f''(x_0) < 0$, x_0 є точкою максимуму.

Теорема

Якщо в точці x_0 виконуються умови:

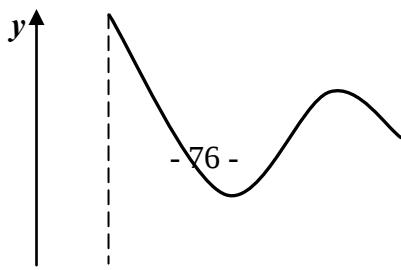
$f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ і $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то у випадку, коли $n = 2k$, x_0 є точкою екстремуму, а у випадку, коли $n = 2k + 1$, x_0 не є точкою екстремуму.

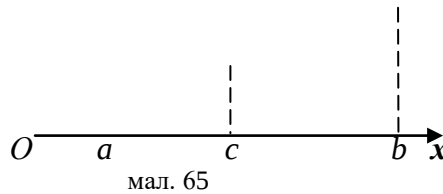
§-9. Найбільше і найменше значення функції на проміжку

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на сегменті $[a, b]$. Серед множини значень такої функції є найбільше і найменше значення. Ці числа називаються відповідно найбільшим і найменшим значеннями функції на проміжку $[a, b]$.

Функція може набувати свого найбільшого і найменшого значень як на кінцях сегмента $[a, b]$, так і у внутрішніх точках цього сегмента.

На мал. 65 зображено графік функції, яка у внутрішній точці c набуває найменшого значення, а в лівому кінці сегмента (точці a) – найбільшого значення.





Алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значень на проміжку:

Щоб знайти найбільше (найменше) значення неперервної функції на сегменті $[a, b]$, треба знайти всі локальні максимуми (мінімуми) і порівняти їх зі значеннями функції, яких вона набуває на кінцях сегмента. Найбільше (найменше) число серед утворених чисел і буде найбільшим (найменшим) значенням функції, заданої на сегменті $[a, b]$.

Приклад. Знайти найбільше і найменше значення функції: $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$ на сегменті $[-3, 3]$.

Визначимо стаціонарні точки. Знайдемо похідну:

$$y' = 6x^2 - 6x - 12.$$

Прирівняємо похідну до нуля:

$$6x^2 - 6x - 12 = 0,$$

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Одержимо стаціонарні точки: $x_1 = -1, x_2 = 2$.

Обчислимо значення функцій в точках x_1, x_2 і на кінцях сегмента, тобто в точках $x_3 = -3, x_4 = 3$. Матимемо:

$$f(-1) = 8, f(2) = -19, f(-3) = -46, f(3) = -10.$$

Отже, найбільше значення функції на проміжку $[-3, 3]$ дорівнює $f(-1) = 8$, найменше – $f(-3) = -46$.

§-10. Опуклість, точки перегину графіка функції

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на деякому проміжку (a, b) .

Означення. Функція $f(x)$ називається опуклою на проміжку (a, b) , якщо:

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), \forall q_1 > 0, q_2 > 0: q_1 + q_2 = 1 \Rightarrow f(q_1 x_1 + q_2 x_2) \leq q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2).$$

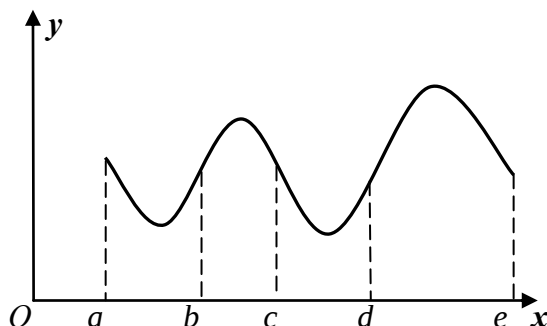
Функція $f(x)$ називається вгнутою, якщо:

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), \forall q_1 > 0, q_2 > 0: q_1 + q_2 = 1 \Rightarrow f(q_1 x_1 + q_2 x_2) \geq q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2).$$

Часто означення опуклості і вгнутості функції дають так:

Означення. Функція $f(x)$ називається *опуклою на проміжку (a,b)* , якщо графік функції лежить не нижче довільної її дотичної на даному проміжку.

Функція $f(x)$ називається *вгнутою на проміжку (a,b)* , якщо графік функції лежить не вище довільної її дотичної на даному проміжку.



мал. 66

Функція, графік якої зображено на мал. 66, є опуклою на проміжках (a,b) , (c,d) і вгнутою на проміжках (b,c) , (d,e) .

Теорема

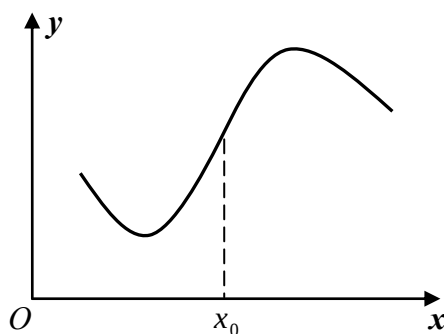
Для того, щоб диференційовна функція $f(x)$ була опуклою (вгнутою) на проміжку (a,b) , необхідно і достатньо, щоб її похідна була неспадною (незростаючою) на цьому проміжку.

Враховуючи умови зростання і спадання функцій, з попередньої теореми отримаємо наступну:

Теорема

Якщо функція $f(x)$ двічі диференційовна на проміжку (a,b) і $f''(x) \geq 0$, то на цьому проміжку функція $f(x)$ опукла. Якщо $f''(x) \leq 0$, то на цьому проміжку функція $f(x)$ вгнута.

Означення. Точка x_0 називається *точкою перегину функції $f(x)$* , якщо існує деякий окіл $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, для якого функція має різну опуклість на проміжках $(x_0 - \delta, x_0)$ і $(x_0, x_0 + \delta)$ (мал. 67).



Теорема (необхідна умова перегину)

Якщо функція $f(x)$ є двічі диференційовною на проміжку (a,b) і x_0 – точка перегину функції, то її друга похідна в цій точці рівна нулю, тобто:

$$f''(x_0) = 0. \quad (6.42)$$

Теорема (достатня умова перегину)

Якщо функція $f(x)$ є двічі диференційовною на проміжку (a,b) і $f''(x_0) = 0$, причому при переході через точку x_0 друга похідна функції змінює знак, то x_0 – точка перегину.

§-11. Асимптоти

Розглянемо функцію, задану рівнянням: $y = f(x)$. Нехай графіком цієї функції є деяка лінія γ .

Означення. Пряма l називається асимптотою до графіка функції, якщо відстань від точки $M \in \gamma$ до прямої l прямує до нуля, коли точка M по кривій γ прямує до нескінченності.

Означення. Пряма $x = x_0$ називається вертикальною асимптотою до графіка функції $y = f(x)$, якщо виконується рівність:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty. \quad (6.43)$$

Наприклад, пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою до графіка функції $y = \frac{1}{x-1}$.

Теорема

Для того, щоб пряма $y = kx + b$ була похилою асимптотою до графіка функції $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty (x \rightarrow -\infty)$, необхідно і достатньо, щоб виконувались рівності:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad (6.44)$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - kx). \quad (6.45)$$

§-12. Дослідження функцій та побудова їх графіків

Загальна схема дослідження функцій:

1. Знаходимо область визначення функції.
2. Знаходимо точки перетину з осями координат.
3. Досліджуємо функцію на парність.

4. Досліджуємо функцію на періодичність; у випадку періодичності знаходимо найменший додатний період.
5. Знаходимо проміжки монотонності функції.
6. Знаходимо точки екстремуму, максимуми та мінімуми функції.
7. Знаходимо проміжки опуклості і вгнутості.
8. Знаходимо точки перегину.
9. Знаходимо асимптоти.
10. Всі одержані дані заносимо до таблиці і будуємо графік функції.

Приклад. Дослідити функцію та побудувати її графік:

$$y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}.$$

1. $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.
2. Нулі функції (точки перетину з віссю Ox) визначаємо із системи:

$$\begin{cases} y = f(x), \\ y = 0. \end{cases}$$

Отримаємо рівняння:

$$\frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0.$$

Звідси: $2x-1=0$. Дістанемо: $x_0 = \frac{1}{2}$. Отже, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ – точка перетину з віссю Ox .

Точку перетину з віссю Oy знайдемо з системи:

$$\begin{cases} y = f(x), \\ x = 0. \end{cases}$$

Отримаємо: $y_0 = f(0) = \frac{2 \cdot 0 - 1}{(0-1)^2} = -1$. Звідси: $(0, -1)$ – точка перетину з віссю Oy .

3. Знайдемо $f(-x) = \frac{2(-x)-1}{(-x-1)^2} = -\frac{2x+1}{(x+1)^2}$ – функція ні парна, ні непарна.

4. Функція неперіодична.

5. Знайдемо похідну:

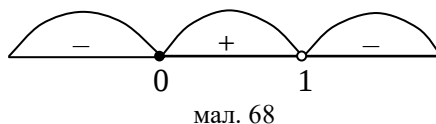
$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2x-1)' \cdot (x-1)^2 - (2x-1) \cdot ((x-1)^2)'}{(x-1)^4} = \frac{2 \cdot (x-1)^2 - (2x-1) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)(x-1-2x+1)}{(x-1)^4} = \\ &= \frac{2 \cdot (-x)}{(x-1)^3} = -\frac{2x}{(x-1)^3}. \end{aligned}$$

Прирівнюємо похідну до нуля:

$$-\frac{2x}{(x-1)^3} = 0.$$

Знаходимо критичні точки: $x_1 = 0, x_2 = 1$.

Скористаємось методом інтервалів (мал. 68):



Отримаємо: $f(x) \nearrow (0,1), f(x) \searrow (-\infty,0) \cup (1,\infty)$.

6. Як видно з мал.68, $x_{\min} = 0$ — точка мінімуму. Тоді мінімум функції:

$$y_{\min} = f(x_{\min}) = f(0) = -1. \text{ Максимуму функція не має.}$$

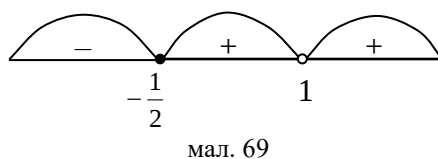
7. Знайдемо другу похідну:

$$\begin{aligned} y'' &= \left(-\frac{2x}{(x-1)^3} \right)' = -\frac{(2x)' \cdot (x-1)^3 - 2x \cdot ((x-1)^3)'}{(x-1)^6} = -\frac{2 \cdot (x-1)^3 - 2x \cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \\ &= -\frac{2 \cdot (x-1)^2 (x-1-3x)}{(x-1)^6} = -\frac{2(-2x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}. \end{aligned}$$

Прирівнюємо другу похідну до нуля:

$$\frac{2(2x+1)}{(x-1)^4} = 0.$$

Отримаємо точку: $x = -\frac{1}{2}$.



З мал. 69 слідує, що функція опукла на проміжку $(-\frac{1}{2}, 1) \cup (1, \infty)$, вгнута на проміжку $(-\infty, -\frac{1}{2})$.

8. $x = -\frac{1}{2}$ — точка перегину. В цій точці функція набуває значення:

$$y = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 1}{\left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \frac{-2}{\frac{9}{4}} = -\frac{8}{9}.$$

9. Так як $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \infty$, то $x = 1$ — вертикальна асимптота.

Знайдемо похилу асимптоту $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{x(x-1)^2} = 0.$$

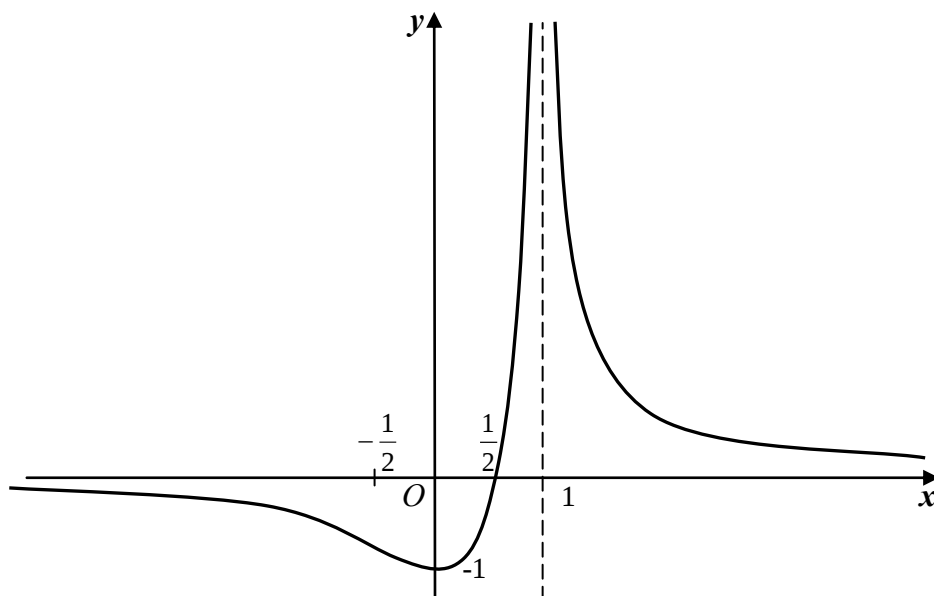
$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0.$$

Отже, $y = 0$ – похила асимптота.

10. Складаємо таблицю:

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$	0	(0,1)	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	–	–	–	0	+	∞	–
$f''(x)$	–	0	+	+	+	∞	+
$f(x)$		$-\frac{8}{9}$ перегин		-1 min		∞	

Користуючись цією таблицею, отримаємо такий графік функції (мал. 70):



мал. 70

Розділ 7

Невизначений інтеграл

§-1. Первісна і невизначений інтеграл

Нехай функція $f(x)$ визначена на деякому проміжку (a, b) .

Означення. Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на проміжку (a, b) , якщо на цьому проміжку виконується рівність:

$$F'(x) = f(x). \quad (7.1)$$

Наприклад, функція $F(x) = 2 \sin x + x - 4$ є первісною для функції $f(x) = 2 \cos x + 1$. А для функції $f(x) = 2 \sin x + x - 4$ первісною є функція $F(x) = -2 \cos x + \frac{x^2}{2} - 4x + 5$.

Теорема

Якщо $F(x)$ – одна із первісних функцій $f(x)$, то множина всіх первісних функцій $f(x)$ співпадає з множиною функцій виду:

$$F(x) + C, \text{ де } C = \text{const}.$$

Доведення. Маємо: $F'(x) = f(x)$. Так як

$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$, то кожна функція $F(x) + C$ є первісною функції $f(x)$.

Покажемо, що кожен первісний функції $f(x)$ можна подати у вигляді: $F(x) + C$.

Нехай $\Phi(x)$ – довільна первісна функції $f(x)$, тоді $\Phi'(x) = f(x)$. Розглянемо функцію $g(x) = \Phi(x) - F(x)$. Для цієї функції матимемо: $g'(x) = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. За необхідною і достатньою умовою сталості функції дістанемо, що: $g(x) = C = \text{const}$. Звідки: $\Phi(x) - F(x) = C$. Тоді $\Phi(x) = F(x) + C$.

Теорему доведено

Означення. Множина всіх первісних функцій $f(x)$ називається *невизначеним інтегралом*.

Невизначений інтеграл функції $f(x)$ позначається: $\int f(x)dx$, де добуток $f(x)dx$ називається *підінтегральним виразом*, а $f(x)$ – *підінтегральною функцією*.

Якщо $F(x)$ – одна із первісних функцій $f(x)$, то за доведеною теоремою матимемо:

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \quad (7.2)$$

З рівностей (7.1) і (7.2) слідує, що:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \quad (7.3)$$

тобто, операція інтегрування є оберненою до операції диференціювання.

Таблиця інтегралів

$f(x)$	0	1	x	x^2	x^n	$\sqrt{x}$	$\sqrt[n]{x}$
$\int f(x)dx$	C	$x+C$	$\frac{x^2}{2}+C$	$\frac{x^3}{3}+C$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	$\frac{2\sqrt{x^3}}{3}+C$	$\frac{n\sqrt[n]{x^{n+1}}}{n+1}+C$
$f(x)$	$\frac{1}{x}$	e^x	a^x	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
$\int f(x)dx$	$\ln x +C$	e^x+C	$\frac{a^x}{\ln a}+C$	$-\cos x+C$	$\sin x+C$	$\operatorname{tg} x+C$	$-\operatorname{ctg} x+C$
$f(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$		$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\frac{1}{x^2-1}$
$\int f(x)dx$	$\operatorname{arctg} x+C$		$\frac{1}{a}\operatorname{arctg} \frac{x}{a}+C$	$\arcsin x+C$		$\arcsin \frac{x}{a}+C$	$\frac{1}{2}\ln\left \frac{x-1}{x+1}\right +C$
$f(x)$	$\frac{1}{x^2-a^2}$		$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$		$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$
$\int f(x)dx$	$\frac{1}{2a}\ln\left \frac{x-a}{x+a}\right +C$		$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$	$\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C$		$\ln\left x+\sqrt{x^2-1}\right +C$	$\ln\left x+\sqrt{x^2-a^2}\right +C$
$f(x)$	$\frac{x}{a^2\pm x^2}$		$\frac{x}{\sqrt{a^2\pm x^2}}$	$\sqrt{a^2-x^2}$			$\sqrt{x^2\pm a^2}$
$\int f(x)dx$	$\pm\frac{1}{2}\ln\left a^2\pm x^2\right +C$		$\pm\sqrt{a^2\pm x^2}+C$	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$			$\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln\left x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right +C$

§-2. Властивості невизначеного інтеграла. Заміна змінної у невизначеному інтегралі

$$1) \int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx \quad (7.4)$$

– сталий множник можна виносити за знак інтеграла.

$$2) \int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \quad (7.5)$$

– інтеграл суми (різниці) дорівнює сумі (різниці) інтегралів.

$$3) \text{ Якщо } \int f(x)dx = F(x) + C, \text{ то } \int f(kx+b)dx = \frac{1}{k} F(kx+b) + C. \quad (7.6)$$

Доведення. За означенням: $F'(x) = f(x)$. Тоді:

$$\left(\frac{1}{k} F(kx+b) + C \right)' = \frac{1}{k} F'(kx+b) = \frac{1}{k} f(kx+b) \cdot k = f(kx+b).$$

Приклад. Знайти інтеграли:

$$1) \int 3x^2 dx,$$

$$2) \int (3\sqrt{x} - 3^x) dx,$$

$$3) \int \cos(4x-1) dx.$$

$$1) \int 3x^2 dx = 3 \int x^2 dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + C = x^3 + C,$$

$$2) \int (3\sqrt{x} - 3^x) dx = \int 3\sqrt{x} dx - \int 3^x dx = 3 \cdot \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + C = 2\sqrt{x^3} - \frac{3^x}{\ln 3} + C,$$

$$3) \int \cos(4x-1) dx = \frac{1}{4} \sin(4x-1) + C.$$

Теорема (заміна змінної у невизначеному інтегралі)

Якщо функція $f(x)$ неперервна, а функція $\varphi(x)$ неперервна разом із своєю похідною, то виконується рівність:

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int f(t) dt \quad (7.7)$$

Рівність (7.7) називається заміною змінної або методом підстановки.

Доведення. Нехай $\int f(t) dt = F(t) + C$. Тоді: $F'(t) = f(t)$. Звідси:

$(F(\varphi(x)))' = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$. Отже, функція $F(\varphi(x))$ є первісною для функції $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$.

Ввівши заміну: $\varphi(x) = t$, отримаємо:

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + C = F(t) + C = \int f(t) dt.$$

Теорему доведено

Приклад. Знайти інтеграл: $\int \sin^2 x \cos x dx$.

Поклавши: $t = \sin x, dt = \cos x dx$, з формули (7.7) отримаємо:

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

§-3. Інтегрування частинами у невизначеному інтегралі

Нехай функція $f(x)$ має похідну $f'(x)$. Тоді з рівності (7.2) одержимо:

$$\int f'(x) dx = f(x) + C. \quad (7.8)$$

Розглянемо диференційовні функції $U(x)$ та $V(x)$. Матимемо:

$$(U(x) \cdot V(x))' = U'(x) \cdot V(x) + U(x) \cdot V'(x).$$

Проінтегруємо обидві частини цієї рівності:

$$\int (U(x) \cdot V(x))' dx = \int U'(x) \cdot V(x) dx + \int U(x) \cdot V'(x) dx.$$

З рівності (7.8) отримаємо:

$$U(x) \cdot V(x) = \int U'(x) \cdot V(x) dx + \int U(x) \cdot V'(x) dx.$$

$$\text{Звідси:} \quad \int U(x) \cdot V'(x) dx = U(x) \cdot V(x) - \int V(x) \cdot U'(x) dx. \quad (7.9)$$

Рівність (7.9) називається *інтегруванням частинами*.

Врахувавши, що $dV = V'(x)dx$, $dU = U'(x)dx$, рівність (7.8) можна спрощено записати у вигляді:

$$\int U dV = U \cdot V - \int V dU. \quad (7.10)$$

Приклад. Знайти інтеграл: $\int x \cos x dx$.

Поклавши: $U = x, dV = \cos x dx$, отримаємо: $dU = dx, V = \sin x$. Звідси за формулою (7.10) одержимо:

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

§-4. Інтегрування простих раціональних дробів

Означення. Простими раціональними дробами називаються функції виду:

$$\text{I. } \frac{B}{x-a},$$

$$\text{II. } \frac{B}{(x-a)^k}, k \geq 2,$$

$$\text{III. } \frac{Mx+N}{x^2+px+q},$$

$$\text{IV. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, k \geq 2,$$

причому для дробів 3-го і 4-го квадратний тричлен $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів, тобто його дискримінант $p^2 - 4q < 0$.

Проінтегруємо раціональні дробі I.–IV.

I. Введемо заміну: $t = x - a, dt = dx$. Одержимо:

$$\int \frac{B}{x-a} dx = B \int \frac{dt}{t} = B \ln|t| + C = B \ln|x-a| + C. \quad (7.11)$$

$$\text{II. } \int \frac{B}{(x-a)^k} dx = B \int \frac{dt}{t^k} = B \int t^{-k} dt = B \frac{t^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{B}{1-k} t^{1-k} + C = \frac{B}{1-k} (x-a)^{1-k} + C. (7.12)$$

$$\text{III. } x^2 + px + q = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{p}{2} + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}.$$

Оскільки $p^2 - 4q < 0$, то $\frac{4q - p^2}{4} < 0$ і тому можна позначити: $\frac{4q - p^2}{4} = a^2$. Тоді,

зробивши заміну: $t = x + \frac{p}{2}$ отримаємо:

$$dt = dx, \quad x^2 + px + q = t^2 + a^2, \quad x = t - \frac{p}{2},$$

$$Mx + N = M \cdot \left(t - \frac{p}{2}\right) + N = Mt + N - \frac{Mp}{2} = Mt + \frac{2N - Mp}{2}. \text{ Звідси:}$$

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{Mt + \frac{2N - Mp}{2}}{t^2 + a^2} dt = M \int \frac{t}{t^2 + a^2} dt + \frac{2N - Mp}{2} \int \frac{dt}{t^2 + a^2}.$$

В першому інтегралі зробимо заміну: $z = t^2 + a^2$. Тоді:

$$dz = 2t dt, \quad t dt = \frac{1}{2} dz. \text{ Звідси:}$$

$$M \int \frac{t}{t^2 + a^2} dt = \frac{M}{2} \int \frac{dz}{z} = \frac{M}{2} \ln|z| + C_1 = \frac{M}{2} \ln(t^2 + a^2) + C_1 = \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + C_1.$$

Другий інтеграл в цій рівності є табличним:

$$\begin{aligned} \frac{2N - Mp}{2} \int \frac{dt}{t^2 + a^2} &= \frac{2N - Mp}{2} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C_2 = \frac{2N - Mp}{2} \frac{2}{\sqrt{4x - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4x - p^2}} + C_2 = \\ &= \frac{2N - Mp}{\sqrt{4x - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4x - p^2}} + C_2. \end{aligned}$$

Остаточно одержимо:

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2N - Mp}{\sqrt{4x - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4x - p^2}} + C. \quad (7.13)$$

Приклад. Знайти інтеграл: $\int \frac{2x+1}{x^2+4x+5} dx$.

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{x^2+4x+5} dx &= \int \frac{(2x+4)-3}{x^2+4x+5} dx = \int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx - 3 \int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \\ &= \int \frac{d(x^2+4x+5)}{x^2+4x+5} - 3 \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1} = \ln(x^2+4x+5) - 3 \operatorname{arctg}(x+2) + C. \end{aligned}$$

$$\text{IV.} \quad \int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k} dx = \int \frac{Mt + \frac{2N - Mp}{2}}{(t^2 + a^2)^k} dt = \int \frac{Mt}{(t^2 + a^2)^k} dt + \frac{2N - Mp}{2} \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k}.$$

В першому інтегралі зробимо заміну: $z = t^2 + a^2$. Тоді: $dz = 2t dt, t dt = \frac{1}{2} dz$.

Звідси:

$$M \int \frac{t}{(t^2 + a^2)^k} dt = \frac{M}{2} \int \frac{dz}{z^k} = \frac{M}{2} \int z^{-k} dz = \frac{M}{2} \frac{z^{1-k}}{1-k} + C_1 = \frac{M}{2(1-k)} (x^2 + px + q)^{1-k} + C_1.$$

Другий інтеграл в цій рівності знаходиться за рекурентною формулою:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} \cdot I_n, \quad \text{де } I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}. \quad (7.14)$$

Приклад. Знайти інтеграл: $\int \frac{3x + 4}{(x^2 + 4x + 5)^2} dx$.

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+4}{(x^2+2x+5)^2} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{(2x+2) + \frac{2}{3}}{(x^2+2x+5)^2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+5)^2} dx + \int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2} = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2+2x+5)}{(x^2+2x+5)^2} + \int \frac{dx}{((x+1)^2+4)^2} = -\frac{3}{2(x^2+2x+5)} + C_1 + \int \frac{dx}{((x+1)^2+4)^2}. \end{aligned}$$

Другий інтеграл знайдемо за формулою (7.14), в якій: $n=1, a^2=4$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{((x+1)^2+4)^2} &= \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 4} \frac{x+1}{(x+1)^2+4} + \frac{2 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 1 \cdot 4} \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{x+1}{8(x^2+2x+5)} + \\ &+ \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \arctg \frac{x+1}{2} + C_2 = \frac{x+1}{8(x^2+2x+5)} + \frac{1}{16} \arctg \frac{x+1}{2} + C_2. \end{aligned}$$

Остаточно одержимо:

$$\int \frac{3x+4}{(x^2+4x+5)^2} dx = -\frac{3}{2(x^2+2x+5)} + \frac{x+1}{8(x^2+2x+5)} + \frac{1}{16} \arctg \frac{x+1}{2} + C.$$

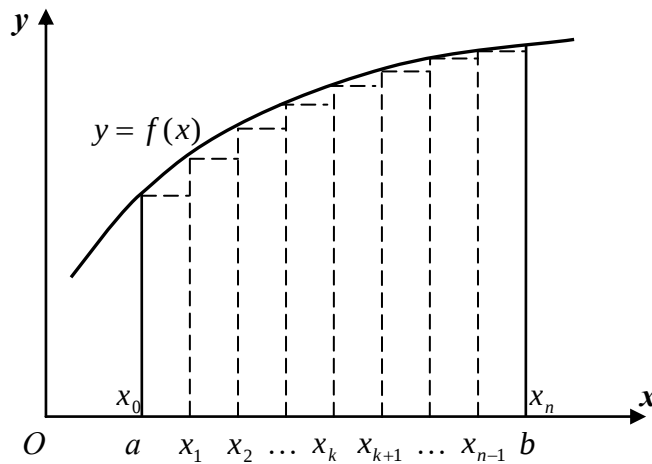
Розділ 8

Визначений інтеграл

§-1. Визначений інтеграл як границя інтегральних сум

Нехай на деякому проміжку $[a, b]$ задана неперервна функція $y = f(x)$.

Означення. Криволінійною трапецією називається фігура, яка обмежена лініями: $y = f(x), y = 0, x = a, x = b$ (мал. 71).



мал. 71

Виберемо на сегменті $[a, b]$ множину точок:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_{n-1} < x_n = b. \quad (8.1)$$

Прямыми $x = a, x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_k, x = x_{k+1}, \dots, x = x_{n-1}, x = b$ криволінійна трапеція розбивається на n менших частинок. Кожну із таких частинок можна замінити прямокутником. Якщо покласти: $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k, k = \overline{0, n-1}$, то отримаємо, що площа кожного такого прямокутника дорівнює: $f(x_k) \cdot \Delta x_k$. Для суми площ усіх прямокутників одержимо вираз:

$$f(x_0) \cdot \Delta x_0 + f(x_1) \cdot \Delta x_1 + \dots + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \cdot \Delta x_k. \quad (8.2)$$

Суму (8.2) можна вважати наближеним значенням площі криволінійної трапеції. Очевидно, коли поділ (8.1) буде досить дрібним, сума (8.2) мало відрізнятиметься від площі криволінійної трапеції.

Нехай на проміжку $[a, b]$ визначена довільна функція $f(x)$. Вибір точок (8.1) називається *T-розбиттям сегмента* $[a, b]$. Тобто:

$$T : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Покладемо: $\lambda(T) = \max \Delta x_k$ – *діаметр розбиття*.

На кожному із проміжків: $[x_k, x_{k+1}]$ виберемо довільним способом деяку точку ξ_k .

Означення. Сума
$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \cdot \Delta x_k \quad (8.3)$$

називається *інтегральною сумою функції* $f(x)$, яка відповідає даному *T-розбиттю* сегмента $[a, b]$ і вибору точок ξ_k .

Сума σ залежить від функції, розбиття і вибору точок ξ_k , тобто: $\sigma = \sigma(f, T, \xi_k)$.
Суми виду (8.3) називаються *інтегральними сумами Рімана*.

Означення. Число I називається *границею інтегральних сум* (8.3), якщо:
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: яке б не брали *T-розбиття* і як би не вибирали точки ξ_k , як тільки

$$\lambda(T) < \delta, \text{ то } |\sigma - I| < \varepsilon.$$

Якщо число I є *границею інтегральних сум* (8.3), то цей факт записують так:

$$I = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \cdot \Delta x_k. \quad (8.4)$$

Означення. Якщо існує *границя інтегральних сум* (8.3), то функція $f(x)$ називається *інтегровною на сегменті* $[a, b]$, а значення I *границі інтегральних сум* називається

визначеним інтегралом і позначається: $\int_a^b f(x) dx$.

Отже, *визначений інтеграл є границя інтегральних сум*:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \cdot \Delta x_k. \quad (8.5)$$

§-2. Властивості визначених інтегралів. Формула Ньютона-Лейбніца

$$1) \int_a^b C \cdot f(x) dx = C \int_a^b f(x) dx, \quad (8.6)$$

$$2) \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx, \quad (8.7)$$

$$3) \int_a^a f(x) dx = 0, \quad (8.8)$$

$$4) \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx, \quad (8.9)$$

$$5) \text{ Якщо } a < c < b, \text{ то } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad (8.10)$$

$$6) \text{ Якщо } f(x) \geq 0, \text{ то } \int_a^b f(x) dx \geq 0,$$

$$7) \text{ Якщо } f(x) > 0, \text{ то } \int_a^b f(x) dx > 0,$$

8) Якщо на сегменті $[a, b]$ виконується нерівність: $f(x) \leq g(x)$, то:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Теорема

Якщо функція $f(x)$ є неперервною на сегменті $[a, b]$ і $F(x)$ – одна із первісних функцій $f(x)$, то має місце рівність:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (8.11)$$

– **формула Ньютона-Лейбніца.**

Формула Ньютона-Лейбніца можна записати у вигляді:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b. \quad (8.12)$$

Приклад. Обчислити інтеграли:

$$1) \int_0^{\pi} \sin x \, dx,$$

$$2) \int_1^4 (4x + 3\sqrt{x}) dx,$$

$$3) \int_{-2}^3 |x| dx.$$

1) Однією з первісних функцій $f(x) = \sin x$ є $F(x) = -\cos x$. Тоді за формулою Ньютона-Лейбніца отримаємо:

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

$$2) \int_1^4 (4x + 3\sqrt{x}) \, dx = 4 \int_1^4 x \, dx + 3 \int_1^4 \sqrt{x} \, dx = 4 \frac{x^2}{2} \Big|_1^4 + 3 \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \Big|_1^4 = 4 \frac{x^2}{2} \Big|_1^4 + 2\sqrt{x^3} \Big|_1^4 =$$

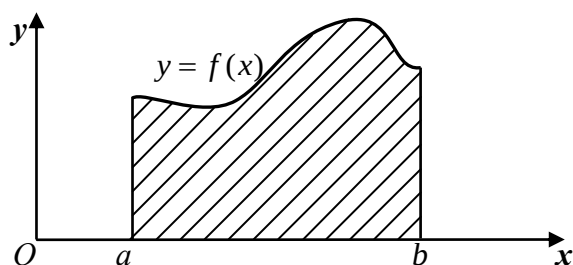
$$= 2 \cdot (16 - 1) + 2 \cdot (\sqrt{64} - 1) = 30 + 14 = 44,$$

$$3) \int_{-2}^3 |x| \, dx = \int_{-2}^0 (-x) \, dx + \int_0^3 x \, dx = -\frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 = \frac{4}{2} + \frac{9}{2} = \frac{13}{2} = 6,5.$$

§-3. Застосування визначеного інтегралу

1. Площа криволінійної трапеції.

Нехай маємо криволінійну трапецію, обмежену лініями: $y = f(x), y = 0, x = a, x = b$ (мал. 72).

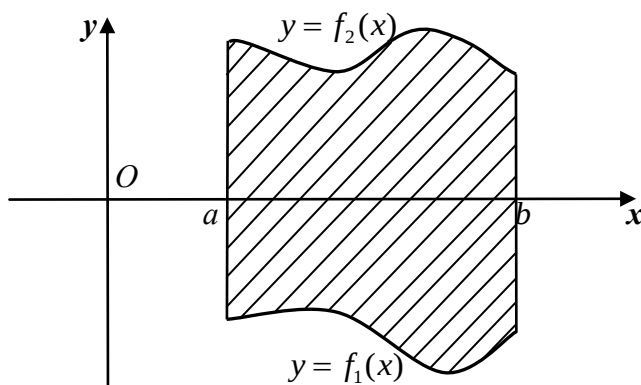


мал. 72

Площа криволінійної трапеції обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b f(x) \, dx. \quad (8.13)$$

Нехай фігура обмежена прямими $x = a, x = b$, знизу графіком функції $y = f_1(x)$, а зверху графіком функції $y = f_2(x)$ (мал. 73).

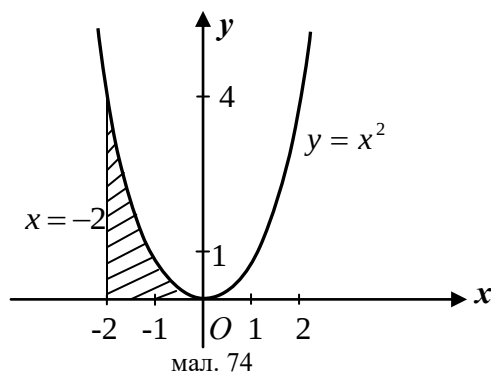


мал. 73

Площа такої фігури обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) \, dx. \quad (8.14)$$

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями: $y = x^2, y = 0, x = -2$ (мал. 74).

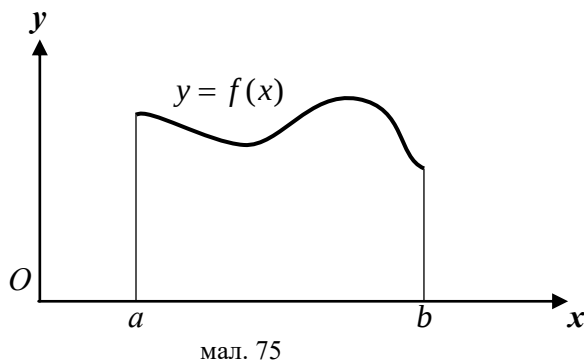


За формулою (8.13) отримаємо:

$$S = \int_{-2}^0 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^0 = 0 + \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} \text{ (кв.од.)}$$

2. Довжина кривої.

Нехай маємо неперервну криву, задану рівнянням: $y = f(x)$, де $x \in [a, b]$ (мал. 75).



Довжина цієї кривої обчислюється за формулою:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (8.15)$$

Приклад. Обчислити довжину кривої, заданої рівнянням:

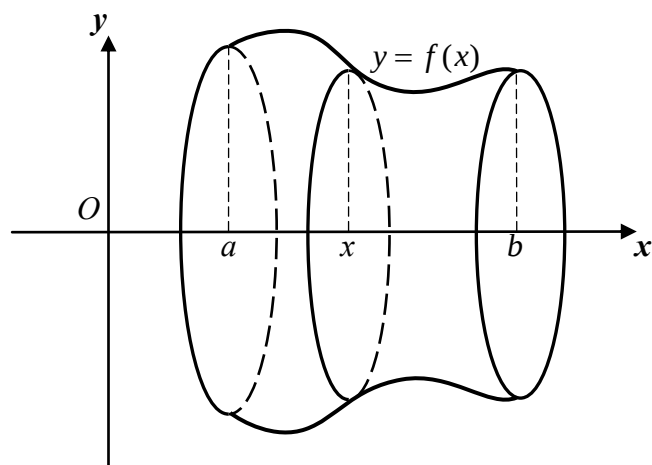
$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, 1 \leq x \leq e.$$

Знайдемо $f'(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$. Тоді за формулою (8.15):

$$\begin{aligned} l &= \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right)^2} dx = \int_1^e \sqrt{1 + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2}} dx = \int_1^e \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2}} dx = \\ &= \int_1^e \sqrt{\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)^2} dx = \int_1^e \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right) dx = \frac{1}{2} \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + \ln x\right) \Big|_1^e = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2} + \ln e - \frac{1}{2} - \ln 1\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2} + 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(e^2 + 1) \text{ (од.)} \end{aligned}$$

3. Обчислення об'єму тіла обертання.

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на сегменті $[a, b]$ і графік цієї функції не перетинає осі Ox на даному проміжку (мал. 76).

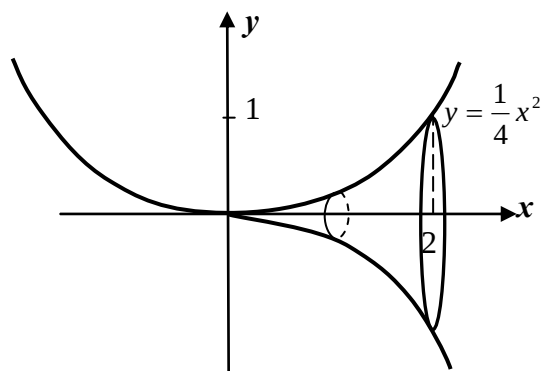


мал. 76

Об'єм тіла, обмеженого площинами $x = a, x = b$ і поверхнею, утвореною обертанням графіка функції $y = f(x)$ навколо осі Ox , обчислюється за формулою:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (8.16)$$

Приклад. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої параболою $y = \frac{1}{4}x^2$ і прямою $x = 2$ (мал. 7).



мал. 77

За формулою (8.16) отримаємо:

$$V = \pi \int_0^2 \frac{1}{16} x^4 dx = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{\pi}{80} \cdot 32 = \frac{2\pi}{5} \text{ (куб.од.)}$$

Розділ 9

Диференціальні рівняння

§-1. Задачі, які приводять до диференціальних рівнянь

I. Задача про колонію бактерій.

Нехай маємо деяку колонію бактерій. Експериментально встановлено, що швидкість росту цієї колонії пропорційна наявній в даний момент часу кількості бактерій. Знайти закон розвитку колонії бактерій.

Позначимо $N(t)$ – кількість бактерій у момент часу t . Вважатимемо функцію $N(t)$ неперервною функцією часу. Нехай відомо, що в початковий момент часу $t = t_0$ кількість бактерій була $N(t_0) = N_0 = \text{const}$. За умовою: $N'(t) = kN(t)$.

Або, враховуючи рівність (6.38), одержимо:
$$\frac{dN}{dt} = k N(t), \quad (9.1)$$

де k – коефіцієнт пропорційності.

Співвідношення (9.1) являє собою рівність, в яку входить шукана функція $N(t)$ і похідна цієї функції $\frac{dN}{dt}$. Формула (9.1) називається *динамічною моделлю* росту колонії бактерій.

Розв'язавши це рівняння, знайдемо закон розвитку колонії бактерій. Функція $N = N(t)$, яка показує наявну кількість бактерій в момент часу t , називається *кінематичною моделлю* росту колонії бактерій.

II. Задача про рівнозмінний прямолінійний рух.

Тіло масою m рухається під дією сили F по прямій. Відомо, що в момент часу $t_0 = 0$ відстань від точки відліку до тіла була s_0 , а швидкість тіла була v_0 . Написати закон руху точки.

Нехай закон руху точки задається рівнянням: $s = s(t)$. Тоді:
$$v = s'(t). \quad (9.2)$$

Звідси:
$$a = v'(t) = s''(t), \quad (9.3)$$

тобто:
$$s''(t) = a. \quad (9.4)$$

– *динамічна модель руху*.

З другого закону Ньютона слідує, що: $F = m \cdot a$. Звідси:
$$a = \frac{F}{m} = \text{const}. \quad (9.5)$$

З рівностей (9.4), (9.5) і з умови задачі одержимо:

$$s'(t) = at + v_0,$$

або:

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0. \quad (9.6)$$

– кінематична модель руху.

§-2. Поняття про диференціальне рівняння першого порядку і множину його розв'язків. Задача Коші

Означення. Скалярна нетотожна рівність, яка пов'язує заданою функціонально залежністю незалежну змінну x , залежну функцію y цієї незалежної змінної і її похідну y' , де змінна y' обов'язково входить у цю рівність, називається *диференціальним рівнянням першого порядку*.

Диференціальне рівняння першого порядку записують у вигляді:

$$F(x, y, y') = 0. \quad (9.7)$$

Означення. Диференціальне рівняння першого порядку виду:

$$y' = f(x, y) \quad (9.8)$$

називається *диференціальним рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної*.

Рівняння (9.8) можна також записати у вигляді:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (9.9)$$

Означення. Розв'язком диференціального рівняння (9.8) на проміжку (a, b) називається неперервно - диференційовна функція $y = y(x)$, яка, будучи підставлена в рівняння (9.8), перетворює його в тотожність на проміжку (a, b) .

Означення. Розв'язок диференціального рівняння (9.8) виду:

$$y = \varphi(x, C), \quad (9.10)$$

де $C = \text{const}$, називається *загальним розв'язком* цього рівняння.

Означення. Довільний розв'язок диференціального рівняння (9.8), який отримується із загального при деякому конкретному значенні C , називається *частинним розв'язком* цього рівняння.

Означення. Розв'язок диференціального рівняння (9.8), який не можна отримати із загального розв'язку, називається *особливим розв'язком* цього рівняння.

Означення. Розв'язок диференціального рівняння (9.8) виду:

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad (9.11)$$

де $C = \text{const}$, називається *загальним розв'язком у неявному вигляді*.

Означення. Розв'язок диференціального рівняння (9.8) виду:

$$\psi(x, y) = C \quad (9.12)$$

називається *загальним інтегралом* цього рівняння.

Нехай рівняння (9.8) має загальний розв'язок $y = \varphi(x, C)$. Надаючи сталій C різних значень, отримаємо нескінченну множину частинних розв'язків цього рівняння. Для того, щоб з цієї нескінченної множини виділити один розв'язок, необхідно задати додаткову умову.

Однією з таких умов для рівняння (9.8) є так звана *початкова умова* або *умова Коші*. Це означає, що з нескінченної множини розв'язків рівняння (9.8) потрібно знайти такий, який задовольняє умові:

$$y(x_0) = y_0, \quad (9.13)$$

де x_0, y_0 задані числа. Ці числа називаються *початковими даними* або *даними Коші*.

Задача:
$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (9.14)$$

називається *початковою задачею* або *задачею Коші*.

§-3. Найпростіші диференціальні рівняння першого порядку

I. Неповні диференціальні рівняння

а) Диференціальні рівняння виду:
$$y' = f(x). \quad (9.15)$$

Загальним розв'язком рівняння (9.15) є функція виду:

$$y = \int f(x) dx + C. \quad (9.16)$$

б) Диференціальні рівняння виду:
$$y' = f(y). \quad (9.17)$$

Запишемо рівняння (9.17) у вигляді:

$$\frac{dy}{dx} = f(y), \quad \text{або:} \quad dx = \frac{dy}{f(y)}.$$

Вважаючи в цій рівності змінну y аргументом, а змінну x – функцією, отримаємо загальний розв'язок диференціального рівняння (9.17) у вигляді:

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + C. \quad (9.18)$$

II. Диференціальні рівняння з відокремленими змінними

Означення. Диференціальне рівняння виду:

$$a(x)dx + b(y)dy = 0. \quad (9.19)$$

де $a(x), b(y)$ – задані і неперервні функції, називається *рівнянням з відокремленими змінними*.

Загальний інтеграл диференціального рівняння має вигляд:

$$\int a(x)dx + \int b(y)dy = C. \quad (9.20)$$

III. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Означення. Диференціальне рівняння виду:

$$a_1(x)b_1(y)dx + a_2(x)b_2(y)dy = 0. \quad (9.21)$$

де $a_1(x), a_2(x), b_1(y), b_2(y)$ – задані і неперервні функції, називається *рівнянням з відокремлюваними змінними*.

Якщо $a_2(x) \cdot b_1(y) \neq 0$, то, поділивши почленно рівняння (9.21) на цей добуток,

отримаємо:

$$\frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx + \frac{b_2(y)}{b_1(y)}dy = 0. \quad (9.22)$$

Рівняння (9.22) є диференціальним рівнянням з відокремленими змінними. Загальний інтеграл цього рівняння, а отже, й рівняння (9.21), за формулою (9.20) має вигляд:

$$\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx + \int \frac{b_2(y)}{b_1(y)}dy = C. \quad (9.23)$$

Приклад. Розв'язати диференціальні рівняння:

1) $y' = \operatorname{tg} x$,

2) $x^2 + 3y y' = 0$,

3) $xy dx + (x+1)dy = 0$.

1) $y = \int \operatorname{tg} x dx + C = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} + C = -\ln|\cos x| + C$,

2) Оскільки $y' = \frac{dy}{dx}$, то отримаємо:

$$x^2 + 3y \frac{dy}{dx} = 0.$$

Домноживши на dx , дістанемо:

$$x^2 dx + 3y dy = 0 \quad - \quad \text{диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.}$$

Тоді:

$$\int x^2 dx + \int 3y dy = C,$$

$$\frac{x^3}{3} + 3 \frac{y^2}{2} = C \quad - \quad \text{загальний інтеграл.}$$

$$3 \frac{y^2}{2} = C - \frac{x^3}{3}, \quad y^2 = \frac{6C - 2x^3}{9},$$

$$y = \sqrt{\frac{6C - 2x^3}{9}} \quad - \quad \text{загальний розв'язок.}$$

3) Поділимо обидві частини рівняння на добуток $(x+1)y \neq 0$:

$$\frac{x}{x+1}dx + \frac{dy}{y} = 0$$

– диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\int \frac{x}{x+1} dx + \int \frac{dy}{y} = C,$$

$$\int \frac{(x+1)-1}{x+1} dx + \int \frac{dy}{y} = C,$$

$$\int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx + \int \frac{dy}{y} = C,$$

$x - \ln(x+1) + \ln|y| = C$ – загальний інтеграл.

$$\ln|y| = \ln(x+1) - x + C,$$

$y = (x+1)e^{C-x}$ – загальний розв'язок.

§-4. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку

Означення. Скалярна нетотожна рівність, яка пов'язує заданою функціональною залежністю незалежну змінну x , залежну функцію y цієї незалежної змінної і її похідні y', y'' , де змінна y'' обов'язково входить у цю рівність, називається *диференціальним рівнянням другого порядку*.

Диференціальне рівняння другого порядку записують у вигляді:

$$F(x, y, y', y'') = 0. \quad (9.24)$$

Означення. Диференціальне рівняння другого порядку виду:

$$y'' = f(x, y, y') \quad (9.25)$$

називається *диференціальним рівнянням другого порядку, розв'язаним відносно старшої похідної*.

Означення. Розв'язок диференціального рівняння (9.25) виду:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2), \quad (9.26)$$

де $C = \text{const}$, називається *загальним розв'язком* цього рівняння.

Означення. Довільний розв'язок диференціального рівняння (9.25), який містить одну або зовсім не містить довільних сталих, називається *частинним розв'язком* цього рівняння.

Означення. *Лінійним диференціальним рівнянням другого порядку* називається диференціальне рівняння виду:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (9.27)$$

де $p(x), q(x), f(x)$ – задані і неперервні функції.

Диференціальне рівняння (9.27), в якому $f(x) = 0$, називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку*.

Означення. Лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами називається диференціальне рівняння виду:

$$y'' + p y' + q y = 0, \quad (9.28)$$

де p, q – сталі числа.

Означення. Характеристичним рівнянням диференціального рівняння (9.28) називається рівняння:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \quad (9.29)$$

а його корені – характеристичними коренями цього рівняння.

Характеристичне рівняння (9.29) є квадратним рівнянням відносно змінної λ . Розглянемо різні можливі випадки відносно характеристичних коренів:

1. Рівняння (9.29) має два різні дійсні корені λ_1, λ_2 .

В цьому випадку загальний розв'язок диференціального рівняння (9.28) має вигляд:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}. \quad (9.30)$$

2. Рівняння (9.29) має один дійсний корінь λ .

Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння (9.28) має вигляд:

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}. \quad (9.31)$$

3. Рівняння (9.29) має два різні комплексно – спряжені корені $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \lambda_2 = \alpha - \beta i$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння (9.28) матиме вигляд:

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \quad (9.32)$$

Приклад. Розв'язати диференціальні рівняння:

1) $y'' - 5y' + 4y = 0$,

2) $y'' + 6y' + 9y = 0$,

3) $y'' - 2y' + 5y = 0$.

1) Складемо характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0.$$

Рівняння має два різні дійсні корені: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$.

Тоді загальний розв'язок за формулою (9.30) має вигляд:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}.$$

2) Характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0,$$

або: $(\lambda + 3)^2 = 0.$

Рівняння має один дійсний корінь: $\lambda = -3$. Загальний розв'язок:

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}.$$

3) Характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0.$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16 < 0.$$

Тоді з формули (5.20) отримаємо два комплексно – спряжені корені:

$$\lambda_1 = \frac{2 + i\sqrt{16}}{2} = \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i, \quad \lambda_2 = \frac{2 - i\sqrt{16}}{2} = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i.$$

Загальний розв'язок за формулою (9.32) має вигляд:

$$y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Список використаної літератури:

1. Кагадій Л.П., Павленко А.В., Чуднов К.У. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Ч. 1,2: Конспект лекцій. – Дніпропетровськ, НМетАУ. – 2004.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – Київ, “А.С.К.”, 2005. – 648 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференціальне і інтегральне обчислення: Підручник в 2-х томах, т. I. – М.: Інтеграл – Прес, 2002. – 416 с.
4. Рудавський Ю.К., Костробій П.П. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. – Львів, 1999.
5. Соколенко О.І., Новик Г.А. Вища математика в прикладах і задачах. – К.: ”Либідь”, 2001 р.
6. Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник. – Львів: «Новий світ–2000», 2007. – 436 с.
7. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: Видавництво А. С. К., 2004, – 648 с.
8. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник. / За ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика – К.: Видавництво А. С. К., 2003, – 480 с.
9. Рудницький В.Б., Кантемір І.І. Практичні заняття з курсу вищої математики. Частина 2.: Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. – Хмельницький.: ТУП. 2000. – 315 с.
10. Лісовська В. П., Перестюк М. О. Вища математика. Практикум. ч. II. – К.:КНЕУ, 2012, – 448 с.
11. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Вища математика у прикладах та задачах.Ч.1. - Харків: ХНУРЕ; Фактор, 2004. – 592 с. 2.

Зміст:

Розділ 1. Елементи лінійної алгебри.....	3
§-1. Перестановки n -го порядку. Поняття матриці. Означення детермінанта n -го порядку.....	3
§-2. Метод Гаусса і метод Гаусса – Жордана розв’язування систем лінійних рівнянь.....	5
§-3. Метод Крамера розв’язування систем лінійних рівнянь.....	7
§-4. Дії над матрицями.....	8
§-5. Одинична матриця. Обернена матриця та її обчислення за допомогою елементарних перетворень.....	9
§-6. Обчислення оберненої матриці за допомогою алгебраїчних доповнень.....	10
§-7. Матрична форма запису системи лінійних рівнянь	11
Розділ 2. Метод координат.....	13
§-1. Поняття вектора. Колінеарні і компланарні вектори.....	13
§-2. Лінійні операції над векторами.....	14
§-3. Розклад вектора за даними напрямками.....	16
§-4. Базис простору.....	16
§-5. Скалярний добуток векторів і його властивості.....	19
§-6. Векторний добуток векторів і його властивості.....	20
§-7. Мішаний добуток трьох векторів і його геометричний зміст.....	22
§-8. Основні задачі в прямокутній декартовій системі координат.....	25
§-9. Полярна система координат.....	27
§-10. Циліндрична система координат.....	29
Розділ 3. Пряма на площині.....	30
§-1. Різні способи задання прямої.....	30
§-2. Взаємне розміщення двох прямих на площині.....	37
§-3. Віддаль від точки до прямої.....	38
§-4. Кут між прямими на площині.....	39
Розділ 4. Лінії другого порядку на площині.....	42
§-1. Коло.....	42
§-2. Еліпс.....	42
§-3. Гіпербола.....	45
§-4. Парабола.....	48
§-5. Дотичні до ліній другого порядку.....	50

Розділ 5. Комплексні числа.....	52
§-1. Комплексні числа як розширення множини дійсних чисел.....	52
§-2. Розв'язування квадратних рівнянь з від'ємним дискримінантом.....	54
§-3. Геометричне тлумачення комплексних чисел та дій над ними.....	54
§-4. Тригонометрична і показникова форми комплексного числа.....	55
§-5. Дії над комплексними числами в тригонометричній та показниковій формах.....	57
Розділ 6. Диференціальне числення.....	60
§-1. Числова послідовність. Границя числової послідовності.....	60
§-2. Означення і способи задання функції. Основні властивості функцій.....	61
§-3. Границі функції в точці. Різні означення границі. Перша і друга важливі границі.....	62
§-4. Основні задачі, що приводять до поняття похідної. Геометричний та фізичний зміст похідної.....	64
§-5. Правила диференціювання функцій. Похідна складної функції.....	68
§-6. Диференціал функції і його застосування для наближених обчислень.....	69
§-7. Умови сталості, зростання і спадання функцій.....	70
§-8. Екстремуми функції.....	71
§-9. Найбільше і найменше значення функції на проміжку.....	73
§-10. Опуклість, точки перегину графіка функції.....	74
§-11. Асимптоти.....	75
§-12. Дослідження функцій та побудова їх графіків.....	76
Розділ 7. Невизначений інтеграл.....	79
§-1. Первісна і невизначений інтеграл.....	79
§-2. Властивості невизначеного інтеграла. Заміна змінної у невизначеному інтегралі.....	80
§-3. Інтегрування частинами у невизначеному інтегралі.....	81
§-4. Інтегрування простих раціональних дробів.....	82
Розділ 8. Визначений інтеграл.....	85
§-1. Визначений інтеграл як границя інтегральних сум.....	85
§-2. Властивості визначених інтегралів. Формула Ньютона-Лейбніца.....	86
§-3. Застосування визначеного інтегралу.....	88
Розділ 9. Диференціальні рівняння.....	91
§-1. Задачі, які приводять до диференціальних рівнянь.....	91
§-2. Поняття про диференціальне рівняння першого порядку і множини його розв'язків. Задача Коші.....	92
§-3. Найпростіші диференціальні рівняння першого порядку.....	93
§-4. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку.....	95
Список використаної літератури.....	97

Вища математика [Текст]: конспект лекцій для здобувачів освіти освітньо-професійного ступеня фаховий молодший бакалавр галузь знань 19 Архітектура і будівництво спеціальності 192 Будівництво та цивільна інженерія освітньо-професійної програми Будівництво та експлуатація будівель і споруд галузь знань 20 Аграрні науки та продовольство спеціальності 208 Агроінженерія галузь знань 07 Управління та адміністрування спеціальності 071 Облік і оподаткування галузь знань 27 Транспорт спеціальності 274 Автомобільний транспорт галузь знань 13 Механічна інженерія спеціальності 133 Галузеве машинобудування денної форми навчання / уклад. В.С.Кулик., Т.П. Кузьмич, М.В. Баховська – Любешів: ВСП «Любешівський ТФК ЛНТУ, 2023 –104 с.

Комп'ютерний набір

Т.П. Кузьмич

Редактор:

Т.П. Кузьмич

Підр. до друку _____ 2023р. Формат А4. Папір офіс.

Гарн.Таймс. Умов.друк, арк. 3,5. Обл.вид.арк.3,4.

Тираж 15 прим. Зам.