

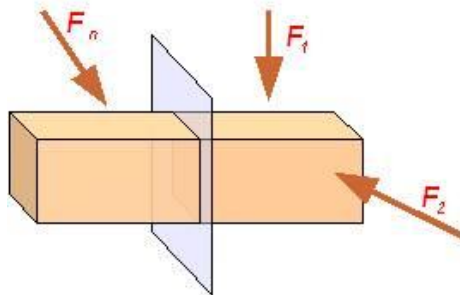
Міністерство освіти і науки України
Відокремлений структурний підрозділ
«Любешівський технічний фаховий коледж
Луцького національного технічного університету»



ОСНОВИ ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ ТА ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

Конспект лекцій

*для здобувачів освіти за спеціальністю 192 Будівництво
та цивільна інженерія, освітньо-професійної програми
«Опорядження будівель і споруд та
будівельний дизайн»
денної форми навчання*



Любешів 2023

УДК

До друку

Голова методичної ради ВСП «Любешівський ТФК ЛНТУ»

_____ Т.П. Герасимик-Чернова

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозитарій коледжу

Бібліотекар _____ М.М. Демих

Затверджено методичною радою ВСП «Любешівський ТФК ЛНТУ»

протокол № _____ від « _____ » _____ 2023 р.

Рекомендовано до видання на засіданні циклової методичної комісії викладачів будівельних дисциплін

протокол № _____ від « _____ » _____ 2023р.

Голова циклової методичної комісії _____ С.М. Данилік

Укладачі: _____ Т.П. Герасимик-Чернова, викладач-методист,

_____ Я.В. Оласюк, викладач вищої категорії

Рецензент: _____ А.В. Хомич, к.т.н.

Відповідальний за випуск: _____ Т.П. Кузьмич, методист

Основи теоретичної механіки та опору матеріалів [Текст]: конспект лекцій для здобувачів освіти освітньо-професійного ступеня «фаховий молодший бакалавр» з спеціальності 192 Будівництво та цивільна інженерія, ОПП «Опорядження будівель і споруд та будівельний дизайн» денної форми навчання / уклад. Т.П. Герасимик-Чернова, Я.В. Оласюк – Любешів: ВСП «Любешівський ТФК ЛНТУ», 2023. –140 с.

ЗМІСТ

1. ВСТУП.....	4
2. ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА	5-137
3. ОПІР МАТЕРІАЛІВ	76-138
4. ЛІТЕРАТУРА	139

ВСТУП

Розвиток інженерної справи ставить перед фахівцями різних галузей народного господарства складні і різноманітні технічні завдання, пов'язані з проектуванням, виробництвом і експлуатацією машин та споруд.

Велике значення має також проблема економії металу. Затрати на матеріали (переважно на метали) становлять значну частину усіх затрат на машини, тому зменшення ваги машин дасть змогу зменшити трудомісткість їх виготовлення.

Над розв'язанням цих проблем працюють вчені, інженери, техніки та інші фахівці різних галузей. Для успішної роботи технічних кадрів у цьому напрямі потрібна достатня їх загальнотехнічна підготовка ще під час навчання у вищих та середніх навчальних закладах. Важливим у підготовці студентів є вивчення загальних законів механіки.

Основи теоретичної механіки та опору матеріалів в сучасному стані – це широкий комплекс дисциплін, багато з яких фактично виділено із загальної механіки. Ці відгалужені від класичної механіки галузі знань у своїй сукупності дістали назву прикладної (практичної) механіки, тобто вони обслуговують певні галузі. Основними з них є опір матеріалів, будівельна механіка, теорія споруд, деталі машин тощо.

У теоретичній механіці, яку поділяють на статику, кінематику і динаміку, вивчають загальні закони руху абсолютно твердих тіл і їх взаємодію.

У розділі **опір матеріалів** розглядають методи розрахунку на міцність, жорсткість і стійкість елементів конструкцій і машин. Метою розрахунку деталей є забезпечення достатньої надійності і довговічності у поєднанні з економічністю.

Розміри деталей визначають з урахуванням реальних властивостей матеріалів, з яких їх виготовлятимуть. Тому потрібні відповідні експериментальні дослідження для визначення характеристик застосованих матеріалів. Крім того, теорію не можна побудувати без експерименту, а експеримент не буде цілеспрямованим без теоретичних основ. Отже, опір матеріалів є не тільки теоретичною, а й експериментальною наукою.

Основи технічної механіки та опору матеріалів є важливою загальнотехнічною дисципліною, від знання якої багато в чому залежить якість професійної підготовки фахівця інженерно-технічного профілю. Програма дисципліни передбачає вивчення загальних законів рівноваги і руху матеріальних тіл; основних методів розрахунку окремих деталей чи вузлів машин на міцність, жорсткість і стійкість; вивчення будови, застосування і основ проектування деталей машин і вузлів загального призначення.

Механіка – одна з найдавніших наук. Термін «механіка» запровадив видатний стародавній філософ Аристотель (384–322 р. до н. е.). На всіх етапах розвитку механіка була тісно пов'язана з розвитком

суспільства. Дисципліна розвивалася у тісному зв'язку з практикою. Розвиток її значно залежить від розвитку виробництва і потреб техніки. Водночас механіка сприяла і сприяє технічному прогресові.

Роль Основ теоретичної механіки та опору матеріалів в галузі будівництва зростає внаслідок дальшого ускладнення завдань, пов'язаних з автоматизацією виробничих процесів, в тому числі у будівництві.

Запитання для самоконтролю

1. Для чого потрібно підвищувати ефективність використання машин і зменшувати витрати матеріалів на виготовлення запасних частин?
2. Що собою являє механіка в сучасному стані?
3. З яких основних розділів складається технічна механіка?
4. Що вивчають у розділі «Теоретична механіка»?
5. Що вивчають у розділі «Опір матеріалів»?

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

СТАТИКА

Тема 1.1. Основні поняття і аксіоми статyki

План

1. Предмет статyki. Матеріальна точка, абсолютне тверде тіло. Сила, система сил. Рівнодійна сила
2. Аксіоми статyki
3. Вільне і невільне тіло. В'язь, реакція в'язі

1. Предмет статyki. Матеріальна точка, абсолютне тверде тіло. Сила, система сил. Рівнодійна сила

Теоретична механіка вивчає загальні закони механічного руху та рівноваги матеріальних тіл. Найпростішим рухом є механічний, тобто переміщення одного тіла відносно іншого, що відбувається у просторі та часі. Окремим випадком руху є рівновага тіла – це стан спокою або рух тіла за інерцією, тобто рух, за якого прикладені до тіла сили не змінюють його стану.

Курс теоретичної механіки складається з трьох частин: статyki, кінематики і динаміки.

У *статикі* вивчають перетворення системи сил, прикладених до твердого тіла, в еквівалентні системи і умови рівноваги цих систем.

У *кінематикі* розглядають рух матеріальних тіл у просторі без урахування сил, прикладених до них.

У *динаміці* вивчають рух матеріальних тіл у просторі залежно від прикладених до них сил.

У механіці розглядають такі основні поняття, як *матеріальна точка*, *система матеріальних точок (механічна система)* і *абсолютно тверде тіло*.

Матеріальною точкою називають таке матеріальне тіло, розмірами якого можна знехтувати за умовами певної задачі.

Системою матеріальних точок (механічною системою) називають таку сукупність матеріальних точок, в якій положення та рух кожної точки залежать від положення та руху інших точок цієї системи.

Абсолютно твердим тілом називають таке тіло, у якого відстані між будь-якими точками залишаються незмінними.

Поняття абсолютно твердого тіла в теоретичній механіці дало змогу не враховувати деформації, що виникають у реальних тілах, а завдяки поняттю матеріальної точки і абсолютно твердого тіла значно спростилися відповідні дослідження та було встановлено загальні закони, які вже можна застосувати до конкретних фізичних тіл.

Сила – це міра механічної взаємодії тіл, яка характеризується числовим значенням, напрямком і точкою прикладання. Сила векторна величина.

Ньютон – це така сила, яка надає тілу масою 1 кг прискорення 1 м/с^2 у напрямку дії сили.

$9,81 \text{ Н} \approx 1 \text{ кгс}$ (у системі МКГСС), у допустимих наближених розрахунках можна брати $1 \text{ Н} \approx 0,1 \text{ кгс}$, що дає похибку, яка приблизно дорівнює 2 %.

Система сил – це сукупність сил, що діють на певне тіло; якщо під дією деякої системи сил вільне тіло не змінює свого механічного стану, то такую систему сил називають **зрівноваженою системою сил**; дві системи сил називають **еквівалентними**, якщо вони виявляють однакову механічну дію на одне і те саме вільне тверде тіло; силу, яка після приєднання до деякої системи сил, що діють на тіло, приводить цю систему до рівноваги називають **зрівноважувальною** цієї системи сил; силу, еквівалентну цій системі сил, називають **рівнодійною** цієї системи.

2. Аксиоми статички

Розглянемо аксиоми, на яких ґрунтується курс статички.

1. Аксиома рівноваги двох сил

Дві сили, що діють на абсолютно тверде тіло, взаємно зрівноважуються тоді і тільки тоді, коли вони рівні за модулем і спрямовані за однією прямою у протилежні сторони (рис. 1).

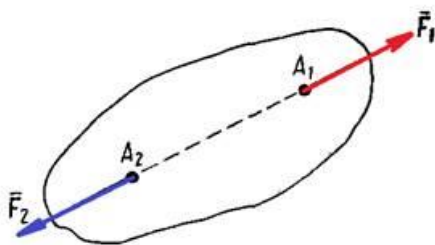


Рис. 1

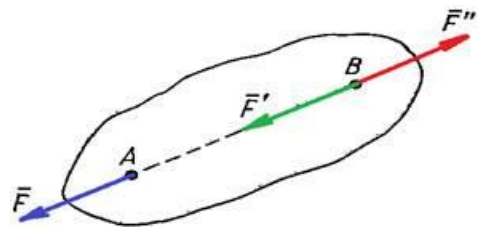


Рис. 2

2. Аксиома приєднання та відкидання зрівноважених сил

Від приєднання до тіла або відкидання від нього зрівноваженої системи сил рівновага тіла не порушується.

Це означає, що коли до системи сил, яка діє на тверде тіло, приєднати будь-яку зрівноважену систему сил, то одержимо систему, еквівалентну цій системі. Якщо ж до складу цієї системи входить кілька сил, які є окремою групою взаємно зрівноважених сил, то цю групу сил можна відкинути. Система сил, що залишиться, буде еквівалентна цій системі.

Висновок. *Не змінюючи кінематичного стану абсолютно твердого тіла, силу можна переносити вздовж лінії її дії, зберігаючи незмінним її модуль і напрямок.*

Нехай на тверде тіло в точці A діє сила $\vec{F}$ (рис. 2). У точці B прикладемо дві сили $\vec{F}'$ і $\vec{F}''$, які за модулем дорівнюють силі $\vec{F}$ і спрямовані за її лінією дії у протилежні сторони. Сили $\vec{F}'$ і $\vec{F}$ як взаємно зрівноважені відкинемо. Тоді до тіла в точці B буде прикладена сила $\vec{F}' = \vec{F}$, еквівалентна силі $\vec{F}$ у точці A .

3. Аксиома паралелограма сил

Рівнодійна двох сил, прикладених в одній точці, прикладена в тій самій точці і є діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах як на сторонах (рис. 3).

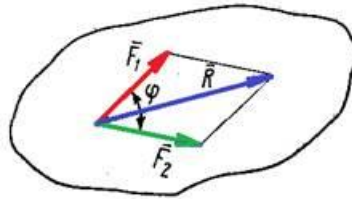


Рис. 3

Це положення математично можна виразити таким геометричним рівнянням:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Модуль рівнодійної сили визначають за формулою:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\varphi},$$

де φ – кут між лініями дії сил $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$.

4. Аксиома рівності дії та протидії

Будь-якій дії відповідає рівна та протилежно спрямована протидія.

Згідно з цією аксіомою сили дії двох тіл рівні за модулем і спрямована за однією прямою у протилежні сторони.

3. Вільне і невільне тіло. В'язь, реакція в'язі

Тіла поділяють на вільні і невільні. Якщо тіло звільнити від зв'язків, його вважатимуть вільним. Під абсолютно **вільним тілом** розуміють тіло, яке може переміщуватися в просторі в будь-якому напрямку. Більшість тіл – невільні, їх рух обмежується взаємодією з іншими тілами. Тіла, які обмежують рух цього тіла в просторі, називають **в'язями**. Силу, з якою в'язь діє на певне тіло, називають **реакцією в'язі**.

Реакція в'язі є силою протидії і завжди має напрямок, протилежний силі дії певного тіла на в'язь. Реакція в'язі завжди спрямована в бік, протилежний неможливому рухові.

Під час розв'язування задач реакції **в'язей** у більшості випадків невідомі.

Залежно від характеру закріплення тіл розрізняють кілька типів в'язей:

1) Ідеально гладка поверхня

Реакція N спрямована вздовж нормалі до поверхні у бік тіла.

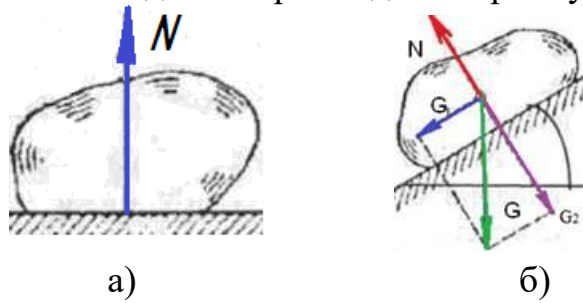


Рис. 4

2) Опорна точка чи ребро

Реакція N спрямована перпендикулярно до поверхні тіла чи дотичної до опорної поверхні в бік тіла.

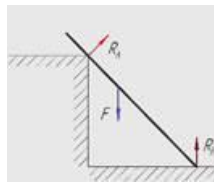


Рис. 5

3) Гнучка в'язь (нитка, ланцюг, канат)

Гнучка в'язь може бути тільки розтягнутою, тому реакція T спрямована вздовж в'язі до точки підвісу.

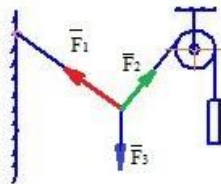


Рис. 6

4) Ідеальний стрижень, кінці якого кріпляться шарнірно, навантажений на кінцях. Реакція S спрямована за прямою, яка проходить через центри шарнірів і прикладена до шарніра об'єкта, рівновагу якого вивчають. Ідеальний стрижень працює на розтяг або стиск.

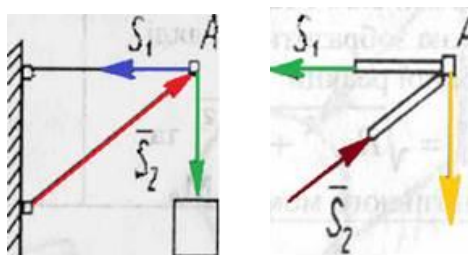


Рис. 7

5) Рухомий циліндричний шарнір. Опора складається з двох обойм: верхньої, жорстко зв'язаної з балкою, і нижньої, поставленої на котки. В'язь дозволяє тілу обертатися навколо осі шарніра і рухатися разом із шарніром уздовж опорної поверхні. Реакція R спрямована перпендикулярно до опорної поверхні.

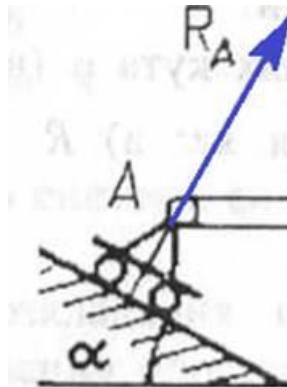
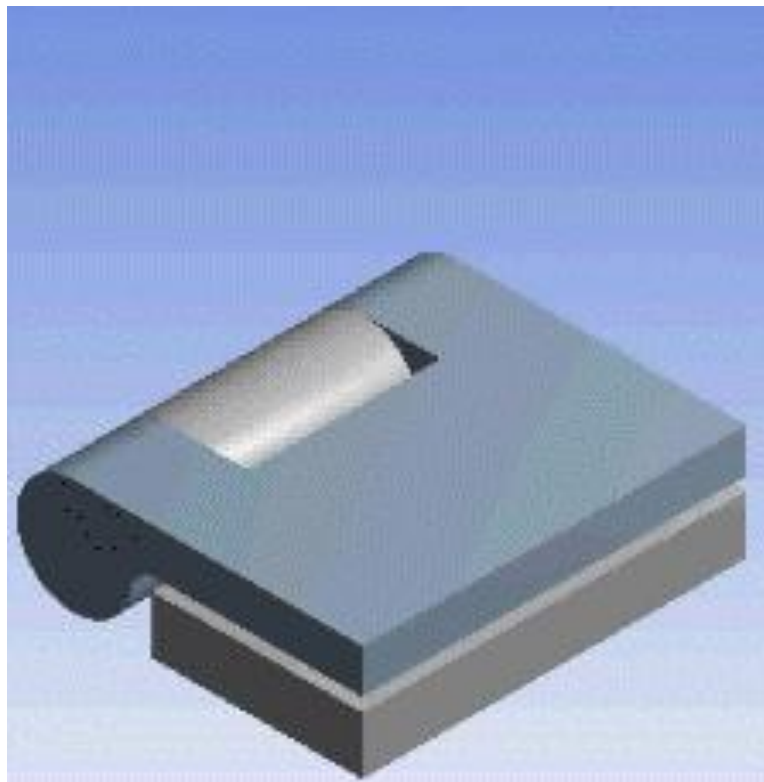


Рис. 8

6) Нерухомий циліндричний шарнір (радіальна вальниця, петля).



Реакція лежить у площині, перпендикулярній до осі шарніра, напрям її невідомий. Під час розв'язку задач реакцію показують складниками R_x і R_y .

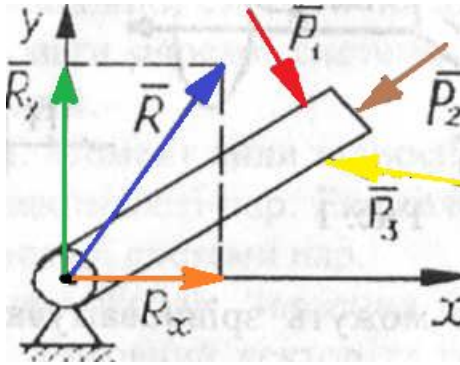
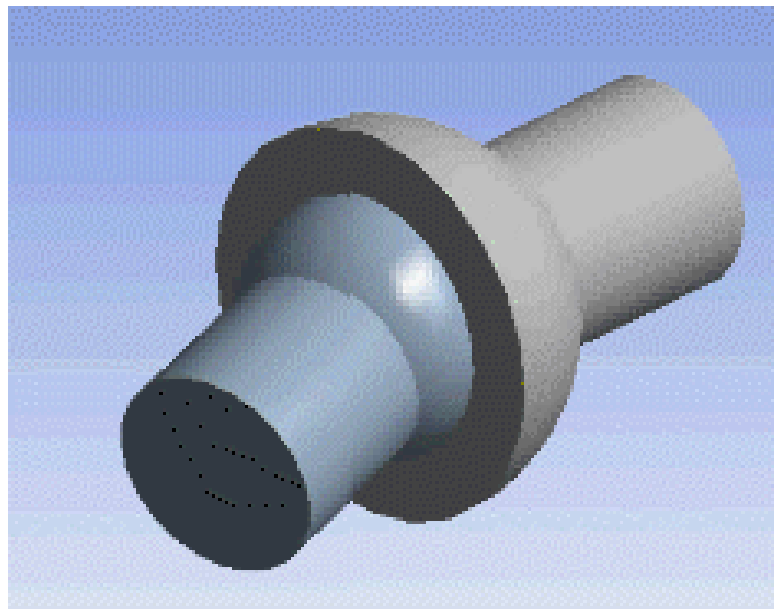


Рис. 9

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

7) Сферичний шарнір, упорна вальниця, підп'ятник



Напрямок реакції у просторі може бути довільним залежно від активних сил. Під час розв'язку задач її зображають у вигляді трьох складників: R_x , R_y , R_z ;

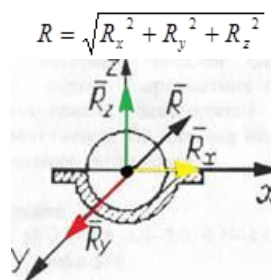


Рис. 10

8) Жорстке закріплення у випадку дії на тіло плоскої системи сил. Реактивні сили можна зобразити у вигляді опорної реакції $R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2}$ та реактивного моменту M_A .

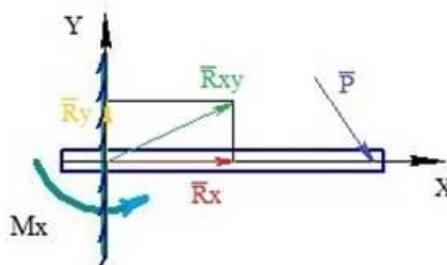


Рис. 11

До в'язей застосовують такі аксіоми.

1. Аксіома про звільнення від в'язей

Механічний стан системи не зміниться, якщо звільнити її від в'язі, приклавши водночас до точок системи сили, рівні реакції в'язі.

2. Аксіома про накладання нових в'язей

Якщо матеріальна система перебуває у рівновазі, то рівновага її не порушиться у разі накладання на неї нових в'язей.

Запитання для самоконтролю

1. Що таке механічний рух? Що вивчає статика?
2. Що вивчає теоретична механіка?
3. У чому полягає суть понять матеріальна точка та абсолютно тверде тіло?
4. Що таке сила? Які три характеристики має сила?
5. Що таке система сил?
6. Яка сила є рівнодієюною системи сил?
7. Як формулюють аксіоми статички?
8. У якому випадку матеріальне тіло буде вільним?
9. Що таке в'язь і що таке реакція в'язі?
10. Які основні типи в'язей трапляються під час розв'язування задач статички і які напрями мають їх реакції?

Тема 1.2. Плоска система сил

План

1. Система збіжних сил. Геометричний та аналітичний способи визначення рівнодієюної системи збіжних сил
2. Геометрична та аналітичні умови рівноваги плоскої системи збіжних сил. Раціональний вибір координатних осей
3. Додавання паралельних сил
4. Момент сили відносно точки

5. Пара сил. Момент пари сил. Властивості пар. Додавання пар. Умова рівноваги плоскої системи пар
6. Теорема про паралельне перенесення сили. Зведення плоскої довільної системи сил до цього центра. Головний вектор та головний момент плоскої системи сил. Окремі випадки приведення плоскої системи сил до цього центра
7. Умови рівноваги плоскої довільної системи сил, рівняння рівноваги. Рівновага плоскої системи паралельних сил. Раціональний вибір напрямку координатних осей і центра моментів
8. Визначення опорних реакцій балок
9. В'язі з тертям

1. Система збіжних сил. Геометричний та аналітичний способи визначення рівнодійної системи збіжних сил

Системою збіжних сил називають сили, лінії дії яких перетинаються в одній точці.

Систему збіжних сил, лінії дії яких розміщені в одній площині, називають **плоскою**. Всі сили такої системи можна перенести вздовж ліній їх дій у спільну точку перетину цих ліній. Від цього дія цієї системи сил на абсолютно тверде тіло не зміниться, що впливає з другої аксіоми статки. Отже, будь-яка система збіжних сил може бути замінена еквівалентною системою сил, прикладених в одній точці.

Якщо на тіло діють дві сили $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$, прикладені в одній точці O , то рівнодійна $\vec{R}$ цих сил дорівнює їх геометричній сумі (рис. 1а):

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

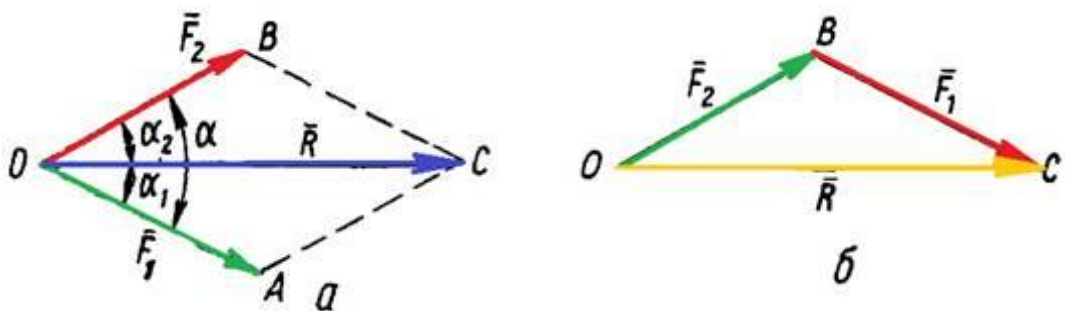


Рис. 1

Для знаходження рівнодійної двох сил $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$, прикладених в одній точці O , не треба будувати весь паралелограм $OACB$ (рис. 1а), а досить побудувати один з трикутників OAC чи OBC (рис. 1б).

Трикутник OBC (або OAC) називають **силовим трикутником**, а такий спосіб додавання двох сил – **правилом трикутника**.

Якщо є кілька збіжних сил, то, застосовуючи послідовно правило додавання двох сил, роблять висновок, що **рівнодійна кількох збіжних сил також дорівнює їх геометричній сумі** (рис. 2):

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i$$

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_i$$

тобто, щоб спростити запис, границі зміни індекс $\sum$ іноді опускають.

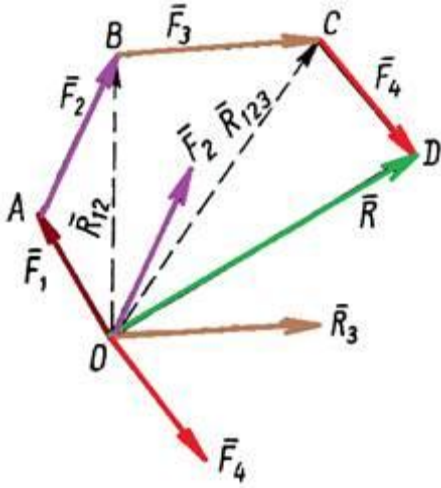


Рис. 2

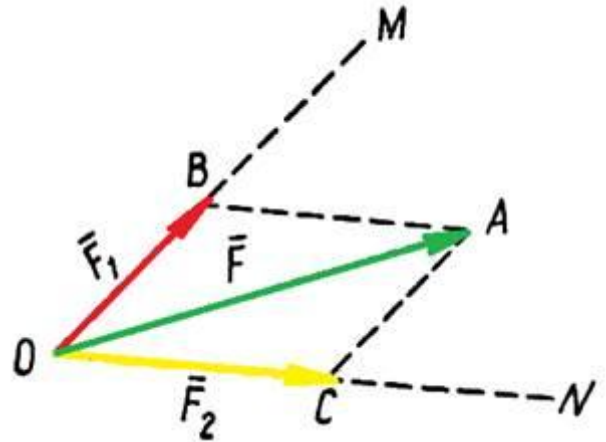


Рис. 3

Багатокутник $OABCD$ (рис. 2), сторони якого у вибраному масштабі дорівнюють певним силам і однаково з ними спрямовані, називається силовим багатокутником. У силовому багатокутнику стрілки завжди спрямовані одна за одною. Замикаюча сторона OD силового багатокутника спрямована завжди від початку першої сили до кінця останньої і за модулем та за напрямком у вибраному масштабі вона зображає рівнодійну певної системи збіжних сил. Правило додавання збіжних сил за способом багатокутника є загальним для складання будь-яких векторів і називається *геометричним додаванням*.

Розкладання сили на складники є оберненою дією додавання сил. Особливо часто доводиться розкласти задану силу $\bar{F}$ на два складники за двома заданими напрямками OM та ON (рис. 3). Для цього з кінця A вектора сили $\bar{F}$ проводимо прямі AB і AC , які відповідно паралельні прямим ON і OM , і отримаємо паралелограм $OBAC$. Сила $\bar{F}$, очевидно, буде діагоналлю цього паралелограма. Вектори $\bar{F}_1 = \overline{OB}$ і $\bar{F}_2 = \overline{OC}$ є шуканими складовими силами.

Проекцією сили $\bar{F}$ на вісь x називається відрізок між основами A_1 і B_1 перпендикулярів, опущених на цю вісь з початку і кінця сили (рис. 4a). Точка A_1 буде початком, а B_1 – кінцем проекції. Проекція буде додатною, якщо її напрямок збігається з додатним напрямком осі, якщо ж ні – то від'ємна.

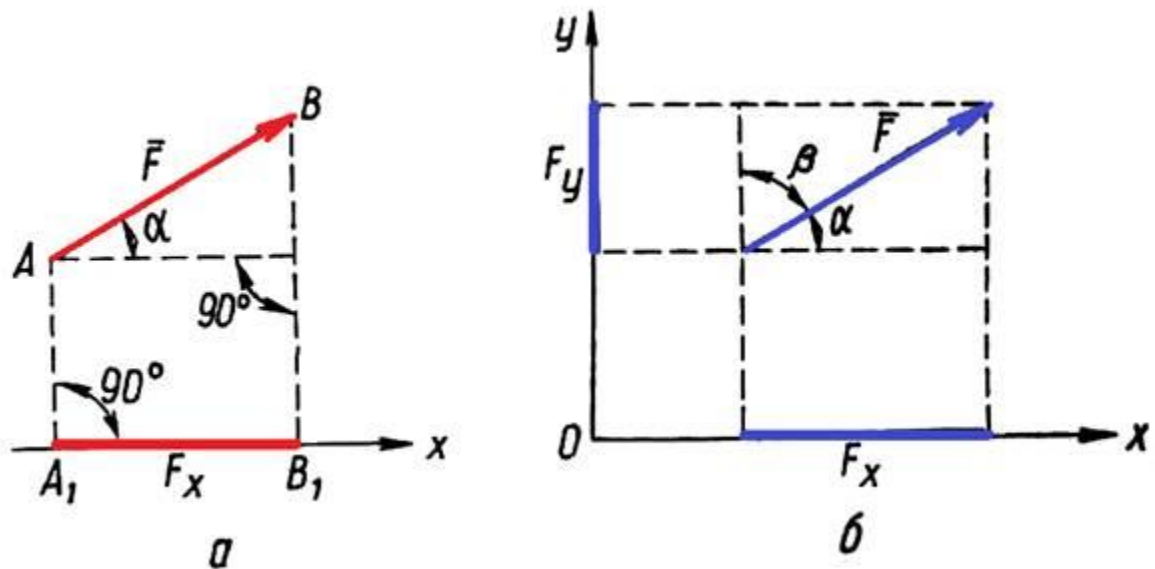


Рис. 4

Із рис. 4б бачимо, що залежність між проекцією і величиною проектованої сили визначається рівністю:

$$F_x = F \cos \alpha,$$

де α – кут між силою і додатним напрямком осі.

Очевидно, якщо $\alpha < 90^\circ$ і $\alpha > 270^\circ$ проекція сили на вісь буде додатною, а якщо $90^\circ < \alpha < 270^\circ$ – від'ємною. Якщо $\alpha = 90^\circ$ або $\alpha = 270^\circ$, то проекція сили на вісь дорівнює нулю, оскільки сила $\vec{F}$ перпендикулярна до осі. Величину сили $\vec{F}$ можна знайти за її проекцією на дві взаємно перпендикулярні осі (x та y), користуючись теоремою Піфагора (рис. 1.12б):

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}.$$

Лінію дії і напрямок сили визначають за допомогою косинусів кутів між силою і додатними напрямками осей проекцій:

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}; \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}.$$

Теорема: *Проекція рівнодійної на будь-яку вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій складових сил на цю саму вісь.*

Доведемо цю теорему. Для цього з сил побудуємо силовий багатокутник $ABCDE$ (рис. 5), в якому рівнодійну зображують вектором $\vec{R} = \vec{AE}$.

Опустимо перпендикуляри на вісь x із усіх вершин цього багатокутника. Тоді, позначивши проекції сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ на вісь x відповідно через $F_{1x}, F_{2x}, F_{3x}, F_{4x}$, матимемо:

$$\vec{F}_{1x} = ab, \quad F_{2x} = -bc, \quad \vec{F}_{3x} = cd, \quad F_{4x} = -de.$$

Відрізки bc і de від'ємні, оскільки вони спрямовані у бік, протилежний напрямку осі проекцій. Очевидно, що $F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = ab - bc + cd - de$.

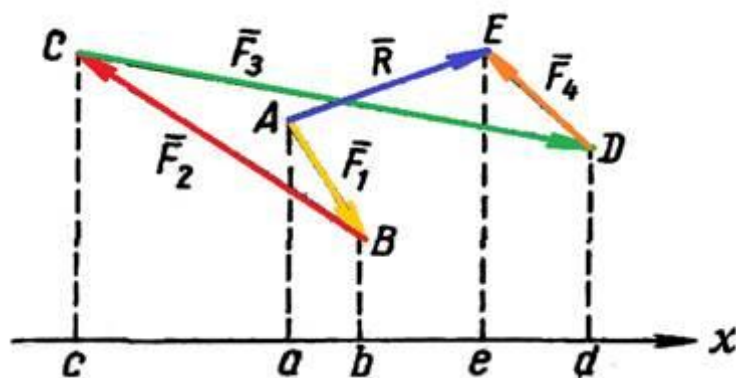


Рис. 5

З рис. 5 бачимо, що $ab - bc = -ac$; $-ac + cd = ad$; $ad - de = ae$. Але ae є проекцією рівнодійної $\bar{R} = \overline{AE}$ на вісь x . Позначивши проекцію рівнодійної $\bar{R}$ на вісь x через R_x , матимемо:

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = R_x.$$

Отже, теорему доведено. Проекція рівнодійної на вісь x дорівнюватиме:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{i=1}^n F_{ix}.$$

Спроектувавши цю саму систему сил на вісь y , перпендикулярну осі x , і застосувавши відповідні позначення, дістанемо:

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum_{i=1}^n F_{iy}.$$

Величину рівнодійної $\bar{R}$ знаходимо за формулою:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2}.$$

Лінію дії і напрям рівнодійної знаходимо за допомогою косинусів кутів між рівнодійною і додатними напрямками осей:

$$\cos(\hat{R}, x) = \frac{R_x}{R}; \quad \cos(\hat{R}, y) = \frac{R_y}{R}.$$

2. Геометрична та аналітичні умови рівноваги плоскої системи збіжних сил. Рациональний вибір координатних осей

Для рівноваги плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб рівнодійна сил дорівнювала нулю.

Згідно з двома способами визначення рівнодійної умова рівноваги плоскої системи збіжних сил може бути виражена у двох формах.

1. Умова рівноваги у геометричній формі

Сили, лінії дії яких перетинаються в одній точці (рис. 6а), будуть зрівноважені, очевидно, тоді, коли їх рівнодійна дорівнюватиме нулю. У

такому випадку довжина замикаючої сторони силового багатокутника має дорівнювати нулю, тобто силовий багатокутник буде замкнутим (рис. 6б).

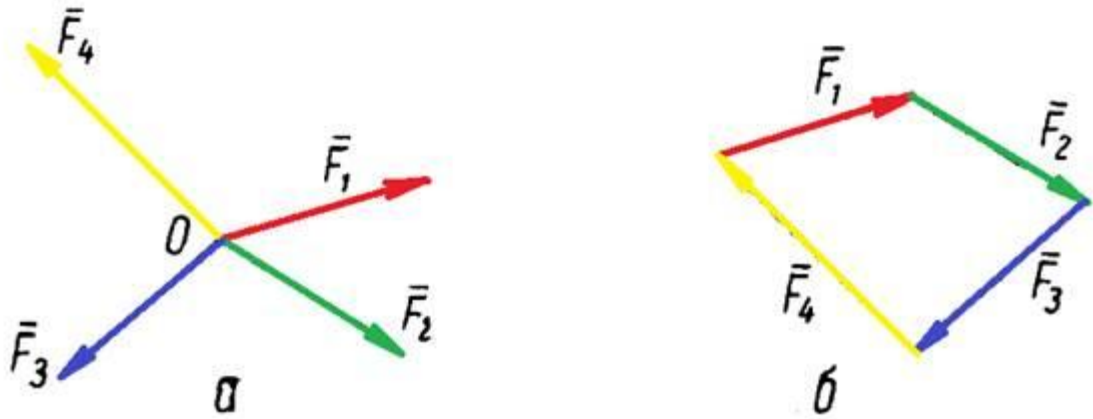


Рис. 6

Отже, геометрична умова рівноваги збіжних сил, що лежать в одній площині, полягає в тому, щоб багатокутник сил був замкнутим або інакше: *збіжні сили, розміщені в одній площині, перебувають у рівновазі, коли їх геометрична (векторна) сума дорівнює нулю:*

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_i = 0.$$

2. Умова рівноваги в аналітичній формі

Аналітично величину рівнодійної визначають за формулою:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2} = 0.$$

Але коли $R = 0$, то нулю дорівнює і вираз під коренем, а це можливо тоді, коли кожна складова під коренем дорівнює нулю, тобто:

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0.$$

Ці рівняння називають рівняннями рівноваги плоскої системи збіжних сил.

Отже, *для рівноваги плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій всіх сил на кожну з двох координатних осей, що лежать у площині дії сил, дорівнювали нулю.*

Рівновага трьох непаралельних сил, розміщених в одній площині

Теорема: *Якщо три непаралельні сили, розміщені в одній площині, взаємно зрівноважуються, то лінії дії їх перетинаються в одній точці.*

Нехай на тіло в точках A_1 , A_2 та A_3 діють три непаралельні сили $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ і $\bar{F}_3$, що взаємно зрівноважуються і розміщені в одній площині (рис. 7). Лінії дії двох сил, наприклад $\bar{F}_1$ і $\bar{F}_2$, очевидно, перетинаються в одній точці A . Переносимо ці сили вздовж їх ліній дії в точку A та додаємо їх за правилом паралелограма. Тоді сила $\bar{R}$ буде їх рівнодійною. Отже, на тіло тепер діятимуть тільки дві сили: $\bar{R}$ та $\bar{F}_3$. Оскільки за умовою ці

сили зрівноважуються, то вони мають бути рівними за модулем і спрямовані за однією прямою у протилежні боки. Таким чином, лінія дії сили $\vec{F}_3$ збігатиметься з лінією дії сили $\vec{R}$, а отже, проходить через точку A , в якій перетинаються лінії дії сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$. Це й треба було довести.

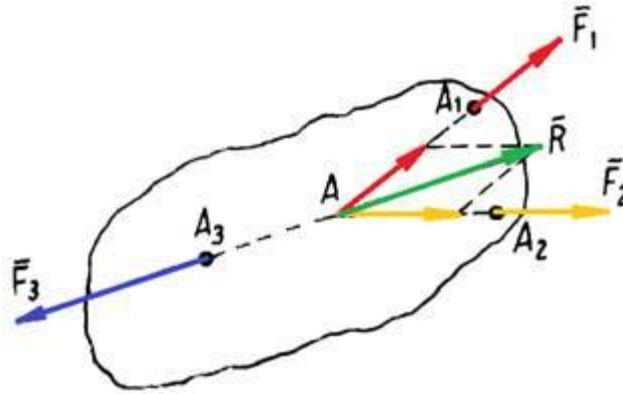


Рис. 7

Ця теорема має велике методичне значення під час розв'язування задач статки. При цьому доцільно додержуватися такої методики.

1. З'ясовуємо рівновагу якого тіла треба розглянути, щоб розв'язати задачу, тобто знайти шукані величини. Зазвичай розглядають рівновагу того тіла, до якого прикладені задані і шукані сили або сили, що дорівнюють шуканим (тобто, якщо треба знайти тиск на опору, то можна розглянути рівновагу тіла, до якого прикладена рівна цій силі реакція опори тощо).

2. Звільняємо тіло від в'язей і зображаємо на рисунку сили, що діють на тіло, і реакції відкинутих в'язей, зображуємо систему координат таким чином, щоб одна із невідомих реакцій була паралельна до однієї із осей (це спростить розв'язування рівнянь рівноваги).

3. До знайденої системи сил застосовуємо умови рівноваги, які відповідають цій системі.

4. Визначаємо шукані величини і досліджуємо результати.

Під час розв'язування задач на рівновагу плоскої системи збіжних сил потрібно раціонально розміщувати осі координат. Якщо одну із координатних осей розмістити вздовж лінії дії однієї із невідомих реакцій, то рівняння рівноваги можна буде розв'язати набагато простіше.

3. Додавання паралельних сил

Під час знаходження рівнодійної двох паралельних сил, що діють на тверде тіло, сили можуть бути спрямовані: в одну і в різні сторони.

Додавання двох сил, спрямованих в одну сторону (рис. 8а).

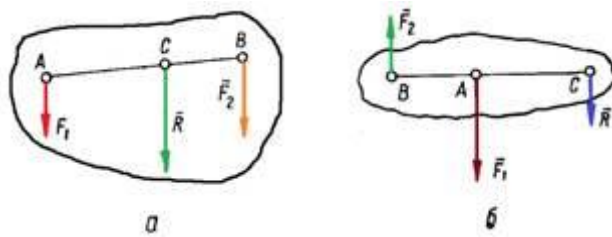


Рис. 8

Враховуючи властивості пропорції і рівності $BC + AC = AB$ і $F_1 + F_2 = R$, матимемо:

$$\frac{BC}{F_1} = \frac{AC}{F_2} = \frac{AB}{R}.$$

Отже, *рівнодійна двох паралельних сил, спрямованих в одну сторону, паралельна цим силам, спрямована у ту саму сторону і дорівнює за модулем їх сумі; лінія дії рівнодійної цих сил проходить між точками прикладання складових сил на відстанях від цих точок, обернено пропорційних модулям сил.*

Додавання двох сил, спрямованих у різні сторони (рис. 8б).

$$R = F_1 - F_2$$

Положення точки C вибирають так, щоб справджувалася рівність:

$$\frac{BC}{F_1} = \frac{AC}{F_2} = \frac{AB}{R}.$$

Отже, *рівнодійна двох паралельних сил, спрямованих у різні сторони, паралельна силам, спрямована в сторону більшої сили і дорівнює за модулем їх різниці; лінія дії рівнодійної проходить за більшою силою на відстанях від складових, обернено пропорційних цим силам.*

За допомогою знайдених рівнянь можна розв'язувати задачі про розкладання цієї сили на дві паралельні їй сили, спрямовані в одну або різні сторони.

4. Момент сили відносно точки

Поняття моменту сили можна застосувати до сил, прикладених до всякого твердого тіла. Момент сили можна визначити відносно будь-якої точки, яку називають центром моменту.

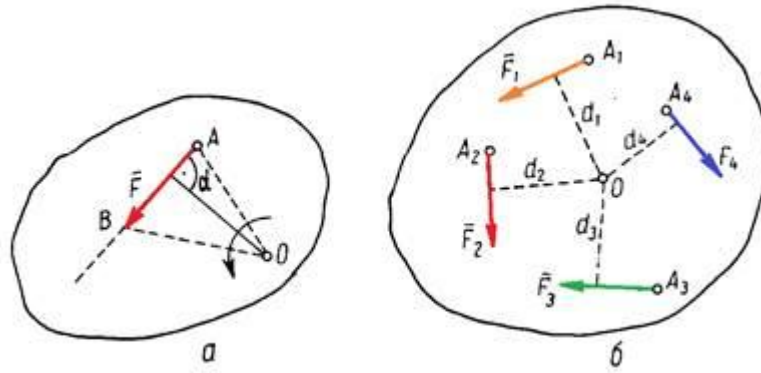


Рис. 9

Моментом сили відносно будь-якої точки на площині називається добуток модуля сили на її плече відносно цієї точки, взятий із знаком плюс або мінус (рис. 9а):

$$M_{O(\vec{F})} = \pm Fd.$$

Момент сили вважають додатним, якщо сила намагається повернути тіло відносно точки O (центра моменту) проти обертання годинникової стрілки, а від'ємним – за стрілкою.

Чисельно момент сили P відносно точки O дорівнює подвоєній площі трикутника AOB :

$$M_{O(\vec{F})} = \pm 2\Delta AOB,$$

де A і B – початок і кінець сили; O – центр моменту.

Якщо лінія дії сили проходить через точку O , то $d = 0$ і момент сили відносно цієї точки дорівнює нулю.

Одиниця моменту дорівнює добуткові одиниці сили на одиницю довжини. Якщо силу вимірювати в кілограмах ($\kappa\Gamma$), а плече – в метрах ($м$), то момент сили буде в кілограмометрах ($\kappa\Gamma м$); якщо силу вимірювати в ньютоні ($Н$), а плече – в метрах ($м$), то момент сили буде в ньютонметрах ($Нм$):

$$1 \kappa\Gamma м \approx 9,81 Нм.$$

Якщо до тіла прикладено кілька сил, що лежать в одній площині, то можна обчислити суму моментів цих сил відносно будь-якої точки O в цій самій площині (рис. 9б). Отже:

$$M_{O(\vec{F}_1)} = F_1 d_1; \quad M_{O(\vec{F}_2)} = F_2 d_2; \quad M_{O(\vec{F}_3)} = F_3 d_3.$$

Момент M_O , що дорівнює алгебраїчній сумі моментів цих сил відносно будь-якої точки O в тій самій площині, називають головним моментом сил відносно цієї точки:

$$M_O = M_{O(\vec{F}_1)} + M_{O(\vec{F}_2)} + \dots + M_{O(\vec{F}_n)}.$$

Доведемо теорему Варіньона про момент рівнодійної.

Момент рівнодійної відносно будь-якого центра дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно того самого центра.

Нехай маємо сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, лінії дії яких перетинаються в точці A (рис. 10). Через будь-який центр O проведемо вісь Ox , перпендикулярну до прямої OA . Щоб довести теорему, знайдемо відповідно вирази моментів

$$M_{O(\bar{F}_1)}, M_{O(\bar{F}_2)}, \dots, M_{O(\bar{F}_n)}, M_{O(\bar{F}_1)} = \pm 2\Delta AOB_1.$$

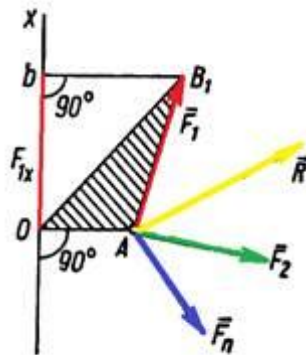


Рис. 10

З рисунка бачимо, що $2\Delta AOB_1 = OA \cdot Ob = OA \cdot F_{1x}$.

де F_{1x} – проекція сили $\bar{F}_1$ на вісь Ox .

Отже:

$$M_{O(F_1)} = OA \cdot F_{1x}$$

Так можна обчислити моменти всіх інших сил.

Позначимо рівнодійну сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ через $\bar{R}$, де $\bar{R} = \sum \bar{F}_i$.

Тоді за теоремою про проекцію суми сил на вісь дістанемо:

$$R_x = \sum F_{ix}.$$

Помноживши обидві частини останньої рівності на OA , матимемо:

$$OA \cdot R_x = \sum (OA \cdot F_{ix}).$$

Тоді

$$M_{O(\mathbb{R})} = \sum M_{O(\mathbb{F}_i)}$$

що є математичним виразом теореми Варіньона.

5. Пара сил. Момент пари сил. Властивості пар. Додавання пар. Умова рівноваги плоскої системи пар

Парою сил називають систему, що складається з двох паралельних сил, рівних за модулем, але спрямованих у протилежні сторони (рис. 11).



Рис. 11

Пара сил намагається надати тілу обертового руху. Обертова дія пари залежить від величини сили – F , плеча пари – h , напрямку обертання, площини дії пари і характеризується моментом пари.

Плече пари – це найкоротша відстань між лініями дії сил пари. **Момент пари** дорівнює добутку модуля однієї з сил пари на плече пари: $M = \pm F h$.

Момент пари є додатним, якщо вона намагається обертати тіло в напрямку, протилежному руху годинникової стрілки.

Пару сил не можна зрівноважити однією силою, її можна зрівноважити тільки іншою парою. Алгебраїчна сума проекцій сил пари на вісь завжди дорівнює нулю.

Теорема про еквівалентні пари: дві пари, що лежать в одній площині, еквівалентні, якщо вони мають однакові алгебраїчні моменти.

Наслідки

1. Не змінюючи механічного стану тіла, пару сил можна перемістити як завгодно в площині її дії.
2. Не змінюючи механічного стану тіла, можна змінити модуль сил і плече пари, але так щоб її момент залишався незмінним.
3. Щоб задати пару, досить задати її момент.

Теорема про додавання пар: система пар, що лежать в одній площині, еквівалентна одній парі, що лежить в тій самій площині і має момент, який дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових пар.

$$M = \sum M_k.$$

Для рівноваги плоскої системи пар сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума моментів цих пар дорівнювала нулю.

$$\sum M_k = 0.$$

6. Теорема про паралельне перенесення сили. Зведення плоскої довільної системи сил до цього центра. Головний вектор та головний момент плоскої системи сил. Окремі випадки приведення плоскої системи сил до цього центра.

Доведемо теорему: механічний стан тіла не порушиться, якщо силу перенести паралельно самій собі в будь-яку точку твердого тіла, додаючи при цьому пару сил, алгебраїчний момент якої дорівнює алгебраїчному моменту перенесеної сили відносно точки, в яку сила переноситься.

Нехай на тверде тіло діє сила F , прикладена в точці A (рис. 12а). Дія цієї сили не зміниться, якщо в будь-якій точці B тіла прикласти дві зрівноважені сили F' і F'' так, щоб $F' = F$, а $F'' = -F$. Одержана система трьох сил являє собою силу F' , що дорівнює F , але прикладену в точці B , і пару (F, F'') , момент якої $M = M_B(F)$.

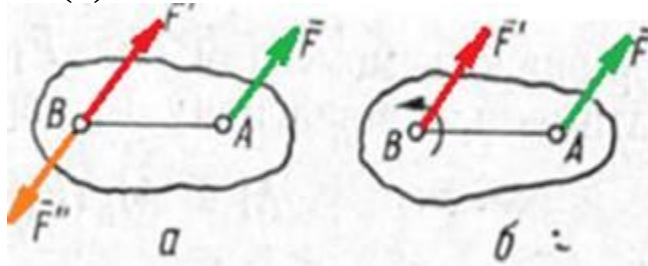


Рис. 12

Отже, теорему доведено.

Пару сил (F, F'') називають приєднаною парою сил.

Зведення плоскої системи сил до цього центра

Нехай на тверде тіло діють сили F_1, F_2, F_3 , що лежать в одній площині (рис. 13а). Візьмемо в цій площині будь-яку точку O , яку назовемо центром зведення, і на підставі доведеної вище теореми перенесемо всі сили в центр O , добавивши при цьому систему трьох пар сил. Моменти цих пар дорівнюють моментам сил F_1, F_2, F_3 відносно центра зведення O .

Додаючи сили F_1, F_2, F_3 за правилом багатокутника, дістанемо їх рівнодійну R , що дорівнює геометричній сумі сил.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Геометричну суму всіх сил системи називають головним вектором системи сил. Модуль і напрямок головного вектора не залежать від центра зведення.

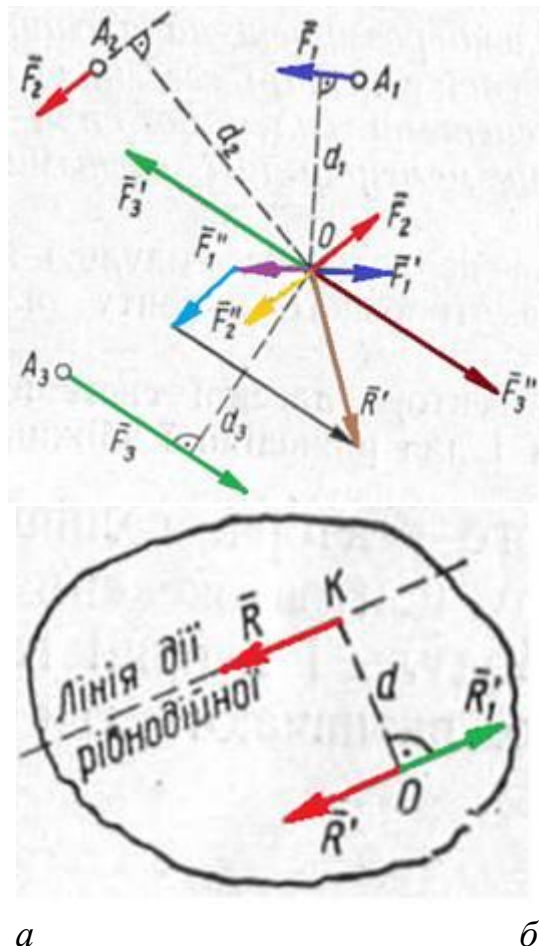


Рис. 13

Модуль і напрямок головного вектора плоскої системи сил визначається так само, як і для рівнодійної системи збіжних сил:

$$R = \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2}; \quad \cos(R, X) = \frac{F_{ix}}{R}; \quad \cos(R, Y) = \frac{F_{iy}}{R}.$$

Плоска система пар еквівалентна одній парі, момент якої дорівнює алгебраїчній сумі моментів цих пар.

$$M = \sum M_o(F_k)$$

Цю пару з моментом M називають головним моментом заданої системи сил.

Таким чином, сили, що довільно розміщені на площині, можна звести до однієї сили, прикладеної в центрі зведення, яка дорівнює головному вектору цієї системи сил, і до пари сил з моментом, що дорівнює головному моменту цієї системи сил відносно центра зведення.

Розглянемо можливі випадки зведення сил, що довільно розміщені на площині.

Випадок 1. Якщо $R = 0$; $M \neq 0$, то задана система сил зводиться до пари сил, момент якої дорівнює головному моменту сил відносно центра зведення.

Випадок 2. Якщо $R \neq 0$; $M = 0$, то задана система сил зводиться до рівнодійної цієї системи сил, що за величиною і напрямком дорівнює головному вектору; лінія дії рівнодіючої проходить через центр зведення O .

Випадок 3. Якщо $R \neq 0$; $M \neq 0$. Задана система сил зводиться до однієї сили – рівнодійної цієї системи сил, що дорівнює головному вектору сил і прикладена в точці (рис. 14б) на відстані $OK = \frac{M}{R}$ від центра зведення точки O .

Випадок 4. Якщо $R = 0$; $M = 0$, то плоска система довільно розміщених сил перебуває у рівновазі.

7. Умови рівноваги плоскої довільної системи сил, рівняння рівноваги. Рівновага плоскої системи паралельних сил. Раціональний вибір напрямку координатних осей і центра моментів

Плоска система довільно розміщених сил перебуває у рівновазі, коли головний вектор і головний момент системи дорівнюють нулю.

$$R = \sqrt{\left(\sum F_{kx}\right)^2 + \left(\sum F_{ky}\right)^2} = 0; \quad M = \sum M_o(F_k) = 0.$$

Отже, для рівноваги плоскої системи довільно розміщених сил необхідно і достатньо, щоб сума проекцій всіх сил на кожну з двох довільно вибраних координатних осей дорівнювала нулю і щоб алгебраїчна сума моментів всіх сил відносно будь-якої точки в площині також дорівнювала нулю.

$$\sum F_{kx} = 0; \quad \sum F_{ky} = 0; \quad \sum M_o(F_k) = 0.$$

Під час розв'язування деяких задач буває доцільно замість одного або двох рівнянь проекцій складати рівняння моментів.

Якщо одне рівняння проекцій замінити, то умови рівноваги плоскої системи довільно розміщених сил матимуть вигляд:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad \sum M_o(F_k) = 0; \quad \sum M_A(F_k) = 0.$$

Якщо замінити два рівняння проекцій, то умови рівноваги плоскої системи довільно розміщених сил матимуть вигляд:

$$\sum M_o(F_k) = 0; \quad \sum M_A(F_k) = 0; \quad \sum M_B(F_k) = 0.$$

В окремому випадку, коли на тіло діє плоска система паралельних сил, напрямком координатних осей можна вибрати так, щоб вісь X була перпендикулярна до паралельних сил, а вісь Y – паралельна їм. Тоді проекція кожної сили на вісь X дорівнюватиме нулю; отже незалежно від того чи зрівноважується ця система сил, чи ні, завжди матимемо $\sum F_{kx} = 0$.

Тому для рівноваги паралельних сил, що лежать в одній площині, достатньо двох рівнянь $\sum F_{ky} = 0; \quad \sum M_o(F_k) = 0$.

Для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума всіх сил дорівнювала нулю і щоб алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно будь-якої точки площини також дорівнювала нулю.

8. Визначення опорних реакцій балок

Зосереджені сили та розподілені навантаження

Зосереджене навантаження – це вид зовнішнього навантаження, яке прикладено до деякої точки тіла. Ми розглядали сили, які були представлені у вигляді вектора, прикладеного до точки. Проте у природі існує велика кількість взаємодій тіл, які здійснюються не в точці і які не можна уявити у вигляді вектора, прикладеного до точки.

Такими силовими факторами є сили тиску рідини або газу на поверхню твердих тіл, сили тяжіння, як масові сили, електромагнітні сили тощо. А тому у теоретичній механіці вводять поняття про розподілені сили, які діляться на поверхневі та об'ємні.

Поверхневі сили діють на деяку поверхню тіла. Об'ємні сили діють на кожний елемент об'єму тіла, яке розглядається. Прикладом таких сил є сила тяжіння.

У теоретичній механіці розглядають дію на тіло тільки зосереджених сил, які прикладені до абсолютно твердих тіл. А тому розподілене навантаження необхідно замінити його рівнодією, тобто зосередженою силою. Введемо декілька загальних положень.

Розподілене навантаження – навантаження, яке безперервно діє на деякій площі тіла; характеризується його інтенсивністю q , тобто величиною сили, яка припадає на одиницю об'єму тіла (у випадку об'ємних сил), на одиницю площі (у випадку поверхневих сил) та на одиницю довжини (якщо поверхню, на яку діє навантаження, можна вважати лінією, тобто шириною поверхні можна знехтувати). В останньому випадку розподілене навантаження має назву плоского, на силових схемах його зображують у вигляді епюри, тобто графіка інтенсивності навантаження, прикладеного до лінійного контуру тіла.

У загальному випадку розподілене навантаження зображується у вигляді певної кривої, що відображає цей закон зміни інтенсивності навантаження на ділянці тіла (рис. 14). Напрямок дії навантаження показують стрілками.

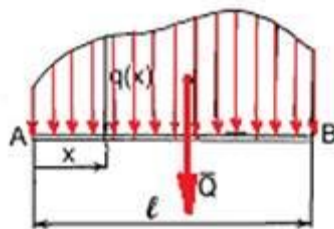


Рис. 14

Спочатку розглядатимемо тільки рівномірно розподілене навантаження та навантаження, розподілене за лінійним законом. Замінюємо розподілене навантаження зосередженою силою.

Розглянемо ці два випадки:

1) *рівномірно розподілене навантаження* (або навантаження, розподілене за законом прямокутника) показують на схемах у вигляді прямокутника, розміри якого такі: висота – це інтенсивність навантаження $\bar{q}$, довжина – це довжина l ділянки тіла, на якій діє навантаження. Стрілки показують напрямок дії навантаження (рис. 15). Для того щоб замінити це навантаження рівнодієюною силою $\bar{Q}$, треба визначити її. У такому випадку:

$$Q = q \cdot l,$$

де q – інтенсивність навантаження, $[H / m]$;

l – довжина ділянки тіла, на якій прикладене навантаження, $[m]$.

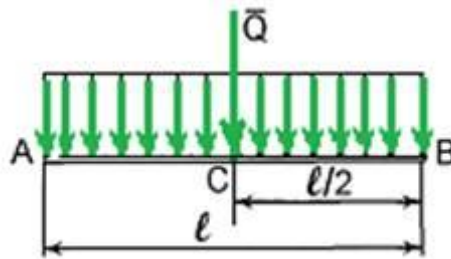


Рис. 15

Точка С прикладання рівнодіючої сили $\bar{Q}$ розміщується посередині ділянки тіла, на якій діє навантаження. Тобто $AC = l/2$, а напрямок збігається з напрямком розподіленого навантаження.

2) *навантаження розподілене за лінійним законом* (тобто за законом трикутника). У цьому випадку (рис. 16) інтенсивність розподіленого навантаження на ділянці l змінюється від 0 до максимального значення q_{max} . Рівнодійна сила $\bar{Q}$ від цього навантаження за величиною дорівнює:

$$Q = \frac{l}{2} q_{max}$$

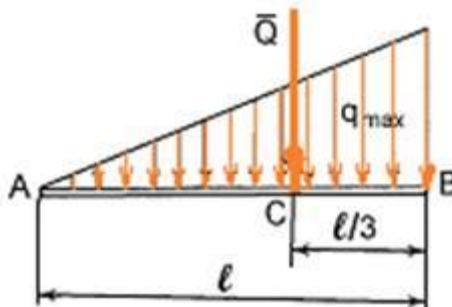


Рис. 16

Точка С прикладання рівнодійної $\bar{Q}$ розташована на відстані $AC = \frac{2}{3} \cdot l$
 або $BC = \frac{1}{3} \cdot l$, а напрямок збігається з напрямком навантаження.

Види опор балок

З технічного погляду опори конструкцій досить різноманітні. Під час формування розрахункової схеми все різноманіття існуючих опорних пристроїв схематизується у вигляді ряду основних типів опор, з яких найбільше часто зустрічаються: *шарнірно-рухлива опора* (можливі позначення для неї представлено на рис. 17а), *шарнірно-нерухлива опора* (рис. 17б) і *жорстке защемлення або закладення* (рис. 17с).



Рис. 17

У шарнірно-рухливій опорі виникає одна опорна реакція, перпендикулярна опорній площині. Така опора позбавляє опорний переріз одного ступеня волі, тобто перешкоджає зсуву в напрямку опорної площини, але допускає переміщення в перпендикулярному напрямку й поворот опорного перерізу.

У шарнірно-нерухливій опорі виникають вертикальна й горизонтальна реакції. Тут неможливі переміщення за напрямками опорних стрижнів, але допускається поворот опорного перерізу.

У жорсткому защемленні виникають вертикальна й горизонтальна реакції й опорний (реактивний) момент. При цьому опорний переріз не може зміщатися й повертатися.

Методика визначення опорних реакцій балок

Для розв'язування задач на рівновагу плоскої довільної системи сил необхідно скласти розрахунково-силову схему задачі. Прикласти до осі балки задані активні сили. Далі умовно звільнити балку від в'язей і замінити їх відповідними реакціями в'язей. Таким чином, балка знаходитиметься у рівновазі під дією плоскої системи довільних сил. Для розв'язання задачі потрібно використати умови рівноваги, скласти рівняння рівноваги і розв'язати їх.

9. В'язі з тертям

Тертям називають опір, що виникає під час переміщення одного тіла по поверхні іншого. Залежно від характеру цього переміщення розрізняють два види тертя: тертя ковзання і тертя кочення.

Тертям ковзання називають опір, що виникає під час ковзання одного тіла по поверхні іншого.

Основною причиною тертя є те, що поверхні стичних тіл не абсолютно гладкі, а в тій чи іншій мірі шорсткі. Тому під час переміщення одного тіла по поверхні іншого потрібна деяка сила для подолання опору, що чинять мікроскопічні нерівності поверхонь.

Мащення тертьових поверхонь значно зменшує тертя, оскільки масло заповнює всі нерівності і безпосереднє тертя поверхонь замінюється ковзанням їх по маслу і ковзання шарів між собою.

Силу тертя, що виникає за відносного спокою тіла, називають тертям спокою, а силу тертя, що діє під час ковзання тіла, називають тертям руху.

Якщо позначити через F максимальну величину сили тертя спокою, а через R_n нормальну реакцію опорної поверхні, то на підставі цього закону матимемо:

$$F = f R_n ,$$

де: f – коефіцієнт пропорційності, що називається **коефіцієнтом тертя ковзання**.

Опір, що виникає під час кочення одного тіла по іншому, називають тертям кочення. Цей опір зумовлено деформаціями цих тіл. Тому точка прикладання нормальної реакції зміщується так, що виникає пара сил, яку називають парою тертя кочення.

Максимальну величину плеча цієї пари, що залежить від матеріалу заданих тіл, називають **коефіцієнтом тертя кочення**, який має розмірність довжини. Максимальна величина моменту пари тертя кочення дорівнює:

$$M_k = kN,$$

де N – нормальна реакція;

k – коефіцієнт тертя кочення.

Запитання для самоконтролю

1. Яку систему сил називають системою збіжних сил?
2. Для чого і яким чином будується силовий багатокутник?
3. Як формулюється умова рівноваги системи збіжних сил у геометричній формі?
4. Як формулюється теорема про рівновагу тіла під дією трьох непаралельних сил?
5. Як визначають проекції сили на вісь і площину?
6. Який напрям має сила, якщо її проекція на вісь дорівнює нулю?
7. Як визначити силу за її проекціями?
8. Чому дорівнює проекція рівнодійної сили на вісь через її складові?
9. Як знайти аналітично рівнодійну силу?
10. Які умови і які рівняння рівноваги системи збіжних сил?

11. Чому дорівнює рівнодійна двох однаково спрямованих паралельних сил?
12. Чому дорівнює рівнодійна двох протилежно спрямованих паралельних сил? Де знаходиться точка її прикладення?
13. Що таке момент сили відносно центра (точки)?
14. Куди спрямований вектор моменту сили відносно точки?
15. Що таке пара сил, або просто пара?
16. Які властивості має пара сил у площині?
17. Як визначити момент пари?
18. Яка умова рівноваги системи пар у площині?
19. Які дві пари є еквівалентними?
20. Сформулюйте теорему про паралельне перенесення сили.
21. Що таке головний момент плоскої системи довільних сил?
22. В якому випадку плоска система сил зводиться до рівнодійної?
23. Чи залежить головний вектор від вибору центра зведення?
24. Як замінити рівномірно розподілене навантаження зосередженою силою?
25. Що називають тертям ковзання?
26. Що називають тертям кочення?

Тема 1.3. Просторова система сил

План

1. Паралелепіпед сил. Рівновага просторової системи збіжних сил
2. Момент сили відносно осі
3. Загальний випадок дії просторової системи сил на тіло. Рівновага довільної просторової системи сил. Рівновага просторової системи паралельних сил

1. Паралелепіпед сил. Рівновага просторової системи збіжних сил

Систему сил, лінії дії яких лежать у різних площинах, називають *просторовою системою сил*.

Просторові системи сил, як і плоскі, можна поділити на три види: просторову систему збіжних сил, систему сил, довільно розміщених у просторі, і просторову систему паралельних сил.

Візьмемо силу $\vec{P}$, вектор якої довільно розміщений у просторі (рис. 1). Виберемо у просторі прямокутну декартову систему координат xyz , початок відліку якої (точку O) суміщений з точкою прикладання вектора сили $\vec{P}$. Спроекуємо вектор сили $\vec{P}$ на площину xOy . Опустимо з точки A (кінець вектора сили) на вказану площину перпендикуляр, який перетинає її в точці a . На площині xOy утворено вектор $\vec{Oa}$, який і є проекцією $\vec{P}_{xy}$ сили на площину. За модулем ця проекція дорівнюватиме

$$P_{xy} = P \cos \alpha ,$$

де α – кут між вектором сили $\bar{P}$ та площиною xOy .

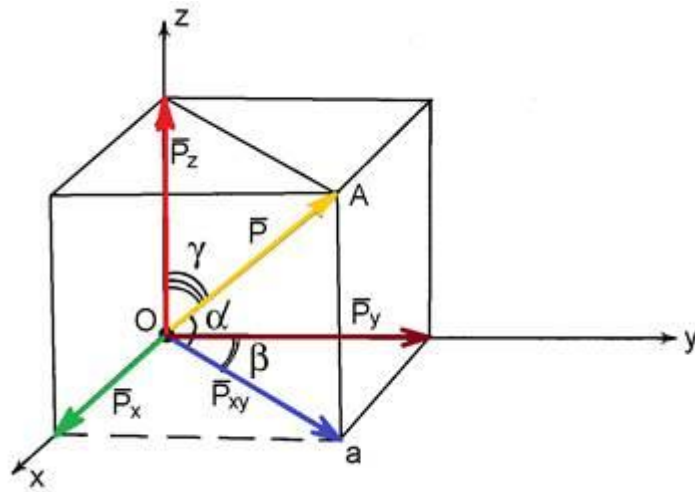


Рис. 1

Якщо в площині xOy позначити кут β , то є можливість спроектувати силу $\bar{P}$ на осі x та y , опускаючи з точки a на осі перпендикуляри і за відомим вже правилом отримати проекції вектора $\bar{P}_{xy}$ на вказані осі:

$$P_x = P_{xy} \cdot \sin \beta = P \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta ,$$

$$P_y = P_{xy} \cdot \cos \beta = P \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta .$$

У такому випадку крізь вісь z та вектор сили $\bar{P}$ можна провести площину, тому є можливість спроектувати силу на цю вісь за відомим правилом. Ця проекція дорівнюватиме:

$$P_z = P \cdot \cos \gamma ,$$

де γ – кут між вектором сили $\bar{P}$ та віссю z .

Рівнодіюча просторової системи сил, що сходяться в одній точці, прикладена в тій самій точці і рівна за модулем та напрямком діагоналі паралелепіпеда, ребра якого рівні та паралельні заданим силам.

Для рівноваги просторової системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій всіх сил на кожну з трьох координатних осей дорівнювали нулю.

$$\sum F_{ix} = 0 ; \quad \sum F_{iy} = 0 ; \quad \sum F_{iz} = 0 .$$

2. Момент сили відносно осі

Для випадку довільної просторової системи сил необхідно знати поняття про момент сили відносно осі, який характеризує обертальний ефект, що створюється силою, яка намагається повернути тіло навколо даної осі.

Щоб обчислити момент сили F відносно осі Z , треба спроектувати цю силу на площину I , перпендикулярну до осі, а потім обчислити момент цієї проекції F_1 відносно точки O – перетину осі Z з площиною I (рис. 2).

Отже, **моментом сили відносно** осі називається взятий із знаком плюс або мінус добуток модуля проекції сили на площину, перпендикулярну до осі, на її плече d_1 відносно точки O перетину осі з площиною:

$$M_z(F) = \pm F_1 \cdot d_1.$$

Момент сили відносно осі будемо вважати додатним, якщо, дивлячись назустріч осі Z , можна бачити проекцію сили так, що вона намагається обертати площину I навколо осі Z проти руху годинникової стрілки. У протилежному випадку момент вважають від'ємним.

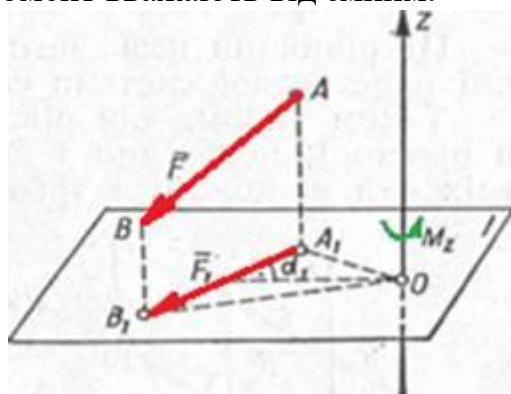


Рис. 2

Момент сили відносно осі зображують відрізком, відкладеним на осі Z від точки O в додатному напрямку, якщо $M_z(F) > 0$, і у від'ємному, якщо $M_z(F) < 0$.

Значення моменту сили відносно осі можна також виразити подвоєною площею трикутника A_1OB_1 : $M_z(F) = \pm 2 \Delta A_1OB_1$.

Момент сили відносно осі дорівнює нулю у двох випадках:

- а) якщо $F_1 = 0$, тобто лінія дії сили паралельна осі;
- б) якщо $d_1 = 0$, тобто лінія дії сили перетинає вісь.

3. Загальний випадок дії просторової системи сил на тіло. Рівновага довільної просторової системи сил. Рівновага просторової системи паралельних сил

Умови рівноваги довільної просторової системи сил.

Для рівноваги тіла, під дією системи сил довільно розміщених у просторі, необхідно, щоб воно не могло переміщатися вздовж кожної з трьох координатних осей.

Для цього треба, щоб:

$$\sum F_{kx} = 0 ; \quad \sum F_{ky} = 0 ; \quad \sum F_{kz} = 0 .$$

Крім того, треба, щоб тіло не мало змоги обертатися навколо кожної з цих трьох осей; тому мають справдитися такі умови:

$$\sum M_x(F_k) = 0 ; \quad \sum M_y(F_k) = 0 ; \quad \sum M_z(F_k) = 0 .$$

Таким чином, для рівноваги системи сил, довільно розміщених у просторі, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій всіх сил на кожну з трьох довільно вибраних координатних осей і алгебраїчна сума моментів всіх сил відносно кожної з цих осей дорівнювала нулю.

Коли всі сили, що діють на тіло, паралельні у просторі, то можна вибрати координатні осі так, щоб одна із осей (наприклад Z) була паралельна силам. Тоді проекції кожної з сил на осі X і Y та їх моменти відносно осі Z дорівнюватимуть нулю і система рівнянь зведеться до трьох умов рівноваги

$$\sum F_{kz} = 0 ; \quad \sum M_x(F_k) = 0 ; \quad \sum M_y(F_k) = 0 .$$

Решта три рівняння являтимуть собою тотожності.

Отже, для рівноваги просторової системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій всіх сил на вісь, паралельну силам, і алгебраїчна сума моментів всіх сил відносно кожної з двох осей, що лежать в площині, перпендикулярній до цих паралельних сил, також дорівнювали нулю.

Запитання для самоконтролю

1. Назвіть умову рівноваги для просторової системи збіжних сил.
2. Як розкласти силу, розміщену в просторі на три складові?
3. Чому дорівнює рівнодіюча для просторової системи збіжних сил?
4. Що називають моментом сили відносно осі?
5. У яких випадках момент сили відносно осі дорівнює нулю?
6. Назвіть умову рівноваги для просторової системи довільних сил?
7. Назвіть умову рівноваги для просторової системи паралельних сил?

Тема 1.4. Центр ваги

План

1. Центр паралельних сил
2. Центр ваги твердого тіла
3. Методи знаходження координат центра ваги. Статична стійкість положення рівноваги твердого тіла
- 1. Центр паралельних сил**

Центр паралельних сил – це точка, через яку проходить лінія дії рівнодійної системи паралельних сил за будь-якого повертання їх навколо точок прикладання в один бік і на такий самий кут.

Покажемо існування центра паралельних сил на прикладі системи двох сил F_1 і F_2 . Відповідно до теореми про додавання двох паралельних сил, спрямованих в один бік, знайдемо рівнодійчу R цих сил і лінію її дії (рис. 1).

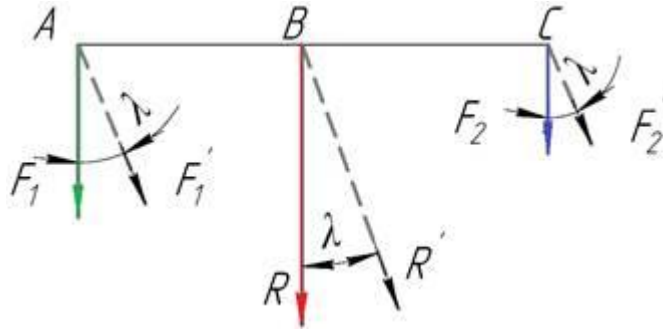


Рис. 1

$$R = F_1 + F_2; \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}.$$

Точка С, яка лежить на лінії АВ, що сполучує точки прикладання цих сил, є центром двох паралельних сил F_1 і F_2 , оскільки від повертання їх на один і той самий кут λ відношення пліч ВС і СА не зміниться і рівнодійчу також пройде через точку С.

Можна дійти висновку, що рівнодійчу паралельних сил рівна їх сумі, паралельна їм, спрямована в ту саму сторону, а її лінія дії ділить пряму, яка з'єднує їх точки прикладання на відрізки, зворотно пропорційні цим силам.

Координати центра системи n паралельних сил визначають за формулами:

$$X_c = \frac{\sum F_n \cdot X_n}{\sum F_n}; \quad Y_c = \frac{\sum F_n \cdot Y_n}{\sum F_n}; \quad Z_c = \frac{\sum F_n \cdot Z_n}{\sum F_n},$$

де X_n, Y_n, Z_n – координати точок прикладання сил, відносно вибраної системи осей координат.

2. Центр ваги твердого тіла

Силу, з якою тіло притягується до Землі, називають **силою тяжіння**.

Для тіл, розміри яких малі порівняно з радіусом землі ($R = 6380$ км) можна вважати, що сили ваги їх частинок паралельні одна одній і зберігають постійну величину за будь якого повертання тіла.

Центром ваги називають центр паралельних сил тяжіння усіх елементарних частинок тіла.

Центр ваги – це точка, яка може лежати й за межами тіла (наприклад кільце, циліндр з отвором).

Координати центра ваги тіла знаходять за такими самими формулами, що й координати центра паралельних:

$$X_c = \frac{\sum G_n \cdot X_n}{\sum G_n}; \quad Y_c = \frac{\sum G_n \cdot Y_n}{\sum G_n}; \quad Z_c = \frac{\sum G_n \cdot Z_n}{\sum G_n},$$

де G_n – сила тяжіння кожної елементарної частинки тіла;

X_n, Y_n, Z_n – координати частинки;

$\sum G_n$ – сила тяжіння усього тіла.

Якщо тіла однорідні, то за такими самими формулами можна визначити координати центра ваги об'ємів, площин і ліній.

1) Сила тяжіння елементарної частини, виражена через її об'єм V_n буде $G_n = \gamma \cdot V_n$, де γ – вага одиниці об'єму:

$$X_c = \frac{\gamma \cdot \sum G_n \cdot X_n}{\gamma \cdot \sum G_n} = \frac{\sum V_n \cdot X_n}{V}; \quad Y_c = \frac{\sum V_n \cdot Y_n}{V}; \quad Z_c = \frac{\sum V_n \cdot Z_n}{V},$$

де V – об'єм тіла.

2) Якщо тіло є однорідною пластиною завтовшки h , то сила тяжіння елементарної частинки, виражена через площу A_n , буде

$G_n = \gamma \cdot h \cdot A_n$, тоді для площі:

$$X_c = \frac{\gamma \cdot h \cdot \sum A_n \cdot X_n}{\gamma \cdot h \cdot \sum A_n} = \frac{\sum A_n \cdot X_n}{A}; \quad Y_c = \frac{\sum A_n \cdot Y_n}{A};$$

$$Z_c = \frac{\sum A_n \cdot Z_n}{A}.$$

3) Якщо тіло є однорідним дротом сталого поперечного перерізу A , то сила тяжіння елементарної частинки, виражена через довжину l_n буде $G_n = \gamma \cdot l_n \cdot A$, тоді для лінії:

$$X_c = \frac{\gamma \cdot A \cdot \sum l_n \cdot X_n}{\gamma \cdot A \cdot \sum l_n} = \frac{\sum l_n \cdot X_n}{l}; \quad Y_c = \frac{\sum l_n \cdot Y_n}{l}; \quad Z_c = \frac{\sum l_n \cdot Z_n}{l}.$$

3. Методи знаходження координат центра ваги. Статична стійкість положення рівноваги твердого тіла

Центр ваги тіла можна визначити **теоретичним** та **експериментальним** методами.

Існує три методи теоретичного визначення центра ваги: метод симетрії, метод розбиття, метод від'ємних мас.

Метод симетрії. Якщо однорідне тіло має площину симетрії, то центр ваги тіла лежить у цій площині; якщо однорідне тіло має вісь симетрії, то центр ваги тіла лежить на цій осі; якщо однорідне тіло має дві осі симетрії,

то центр ваги тіла лежить у точці їх перетину; центр ваги однорідного тіла обертання лежить на осі обертання.

Метод розбиття – тіло розбивають на найменшу кількість частин, сила тяжіння і центри ваги яких відомі, після цього використовують формули, розглянуті вище.

Метод від'ємних мас – тіло, яке має порожнини, вважають суцільним, масу ж вільних порожнин вважають від'ємною. Формули для визначення координат центра ваги тіла залишаються ті самі. Отже, для визначення центра ваги тіла, що має вільні порожнини, треба застосовувати метод розбиття, але масу вільних порожнин вважати від'ємною.

Тіло під дією власної ваги може перебувати в стані спокою лише тоді, коли напрямок сили ваги проходить через точку опори, оскільки тільки в цьому випадку сила ваги врівноважуватиметься силою опору в'язі.

При цьому можливі такі три випадки:

1) **Центр ваги тіла знаходиться вище опори** (рис. 2а). Коли тіло відхилити від положення рівноваги (рис. 2б), виникне пара сил Q , N , яка почне відхиляти тіло від свого початкового положення. Таку рівновагу називають *нестійкою*.

Нестійка рівновага може бути лише тоді, коли центр ваги лежить вище точки опори.

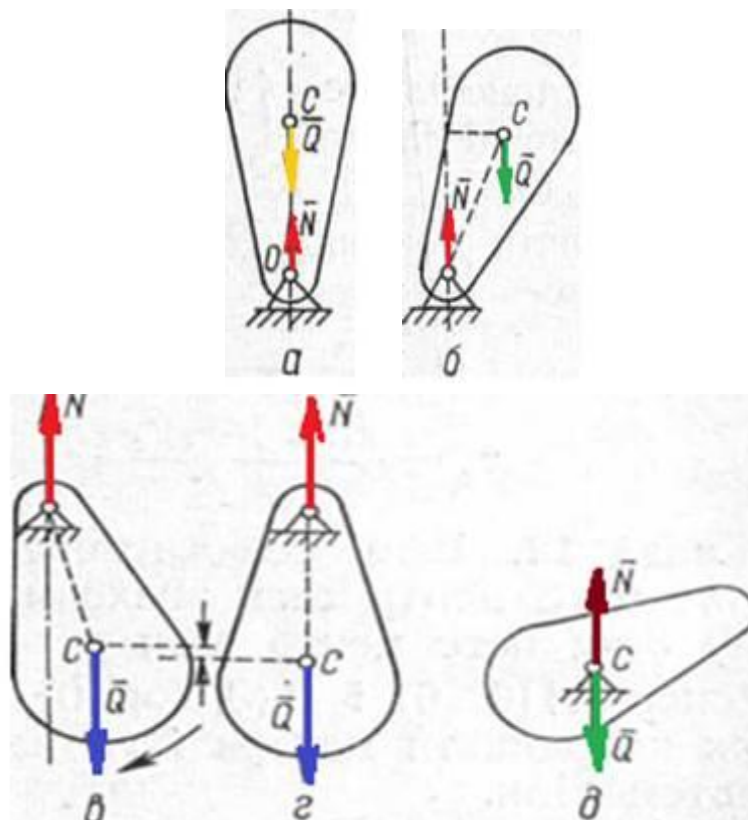


Рис. 2

2) **Центр ваги знаходиться нижче точки опори** (рис. 2в,г). За відхилення тіла з положення рівноваги виникне пара сил Q , N , що знову поверне його в початкове положення. Таку рівновагу називають *стійкою*. Це

буде лише тоді, коли центр ваги тіла лежить нижче опори і займає найнижче з можливих положень.

3) **Центр ваги збігається з точкою опори** (рис. 2д). У такому випадку за відхилення тіла з положення рівноваги центр ваги залишиться на місці, пара сил при цьому не виникне. Отже, тіло перебуватиме в стані спокою за будь-якого положення. Таку рівновагу називають *байдужою*.

Якщо тіло має кілька точок опори, то рівновага буде стійкою, доки пара сил Q , N , що виникне, намагатиметься повернути тіло в початкове положення.

Наприклад, трактор буде стійким, доки напрям сили його ваги проходить між колесами. Якщо ж трактор займе таке положення, за якого лінія дії сили ваги його пройде через точку опори колеса, то рівновага буде нестійкою; за найменшого збільшення кута нахилу сила ваги його утворить з силою опору ґрунту пару, яка перекине трактор.

Запитання для самоконтролю

1. Як визначають координати центра паралельних сил?
2. Як визначають координати центра ваги тіла?
3. За якими формулами визначають координати центра ваги об'єму?
4. Як визначають координати центра ваги площини?
5. Як визначають координати центра ваги лінії?
6. Які існують методи визначення центра ваги?
7. Яку рівновагу називають нестійкою, стійкою та байдужою?

КІНЕМАТИКА

Тема 1.5. Кінематика точки

План

1. Предмет кінематики. Спокій і рух, відносність цих понять. Система відліку. Основні поняття кінематики: траєкторія, відстань, шлях, швидкість, прискорення
2. Способи задання руху точки. Натуральний спосіб руху точки; швидкість та прискорення точки. Прискорення повне, нормальне, дотичне
3. Види руху точки залежно від прискорення

1. Предмет кінематики. Спокій і рух, відносність цих понять. Система відліку. Основні поняття кінематики: траєкторія, відстань, шлях, швидкість, прискорення

Кінематикою називають розділ теоретичної механіки, в якому вивчають рух матеріальних тіл у просторі з геометричної точки зору, без врахування сил, що діють на них.

Рух у механіці – це зміна з часом положення певного тіла в просторі відносно інших тіл.

Щоб визначити положення рухомого тіла (або точки) у просторі будь-яку систему координат жорстко зв'язують з тим тілом, відносно якого вивчають рух. Цю систему координат називають **системою відліку**. Система відліку може бути рухомою і умовно нерухомою. Рух тіла відносно нерухомої системи відліку називають абсолютним; а відносно рухомої – відносним.

Рух тіла відбувається в просторі з часом. Простір в механіці розглядають як тривимірний евклідовий простір. **Час** – це скалярна безперервно змінна величина, і його вважають незалежною змінною величиною.

Криву, яку описує точка під час руху її в просторі відносно вибраної системи відліку, називають її **траєкторією**.

2. Способи задання руху точки. Натуральний спосіб руху точки; швидкість та прискорення точки. Прискорення повне, нормальне, дотичне

Рух точки задається двома способами: натуральним і координатним.

За **натурального** способу задається траєкторія і рівняння руху за цією траєкторією, а також початок і напрям руху.

Рівняння руху в загальному випадку:

$$S = f(t),$$

де: S – відстань точки від початкового положення, що є функцією часу;
 t – час руху точки від початкового моменту.

Знаючи траєкторію руху точки і рівняння руху за цією траєкторією, можна визначити положення точки у будь-який момент часу; для цього в рівняння $S = f(t)$ треба підставити час.

Координатний спосіб полягає у тому, що положення точки у системі відліку визначається трьома координатами X , Y , Z .

Рівняння руху точки у координатному вигляді $X = f(t)$; $Y = f(t)$; $Z = f(t)$, за допомогою їх в кожний момент часу можна визначити положення точки в просторі.

Якщо точка за довільно вибрані, але рівні проміжки часу проходить однаковий шлях, то рух її називають **рівномірним**, а в протилежному випадку – **нерівномірним**.

За рівномірного руху **швидкість** точки є сталою величиною, а за нерівномірного – змінною. Найпростіше швидкість точки визначають тоді, коли вона рухається рівномірно і прямолінійно. У цьому разі модуль швидкості дорівнює відношенню шляху S , пройденого точкою, до проміжку часу t , впродовж якого рухалась точка:

$$V = \frac{S}{t}.$$

За прямолінійного руху точки вектор швидкості буде спрямований за прямолінійною траєкторією з цього положення точки в бік її руху.

За рівномірного прямолінійного руху, шлях S , пройдений точкою, дорівнює добутку швидкості V точки на час її руху, $S = V \cdot t$, це рівняння називають рівнянням рівномірно-прямолінійного руху точки.

Якщо в початковий момент часу ($t = 0$) точка M знаходиться від точки O на відстані $S_0 = OM_0$, тобто в точці M_0 (рис. 1), то рівняння руху матиме вигляд: $S = S_0 + V \cdot t$.

Тоді швидкість точки дорівнює:

$$V = \frac{S - S_0}{t} \quad (\text{м/с}).$$

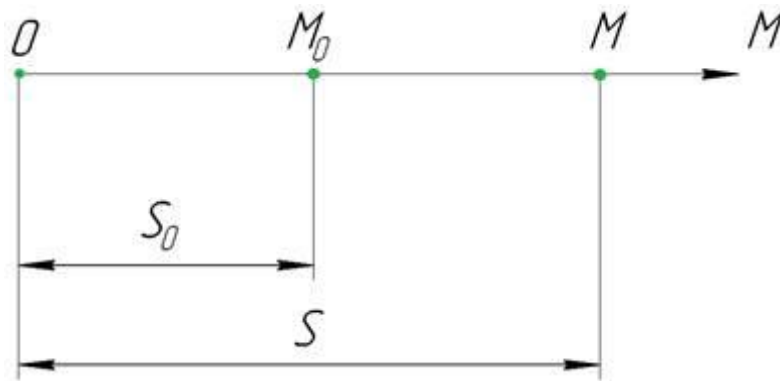


Рис. 1

За нерівномірного руху розрізняють два поняття: *середня швидкість* і *швидкість у певний момент*.

Розглянемо, як визначають швидкість точки у загальному випадку нерівномірного криволінійного руху за натурального способу визначення руху.

Позначимо проміжок часу, протягом якого відбувається рух, через Δt . Знак Δ (грецька літера «дельта») означає приріст відповідної змінної величини (в даному випадку t). Нехай будь-яка точка M рухається за криволінійною траєкторією (рис. 2). У момент часу t ця точка займає на траєкторії положення M , а за проміжок часу Δt пройде відстань і перейде в положення M_1 . З'єднаємо точки M і M_1 вектором. Вектор MM_1 називають *вектором переміщення* точки за деякий проміжок часу.

Середня швидкість точки визначатиметься так:

$$V_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

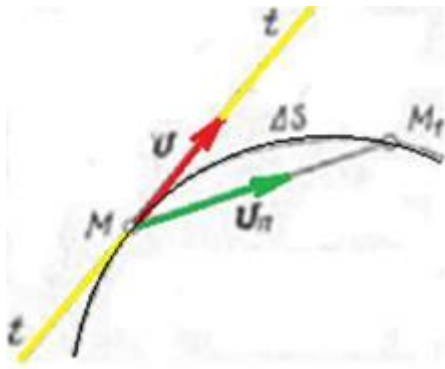


Рис. 2

Переміщення точки MM_1 є вектор, а тому вектор середньої швидкості точки має напрямок вектора її переміщення, оскільки Δt є скалярна величина.

Якщо зменшувати проміжок часу, залишаючи незмінним початок цього проміжку, то безперервно зменшуватиметься і величина переміщення $MM_1 = \Delta S$ точки, а середня швидкість наближуватиметься до значення швидкості точки в певний момент часу.

Швидкості точки в певний момент часу – це границя, до якої прямує середня швидкість, коли Δt прямує до нуля.

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} V_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}.$$

Отже, *швидкість V точки в певний момент часу дорівнює першій похідній за часом від дугової координати*. Швидкість спрямована за дотичною до траєкторії в бік руху точки.

Рівномірний рух – рух, за якого швидкість точки за однакові проміжки часу змінюється на однакову величину.

Величину, яка характеризує зміну вектора швидкості за модулем і напрямком, називають прискоренням.

У прямолінійному русі точки вектор швидкості завжди збігається з траєкторією і тому вектор зміни швидкості також збігається з траєкторією. Якщо за невеликий проміжок часу Δt швидкість точки змінилася на ΔV , то

середнє прискорення $a_c = \frac{\Delta V}{\Delta t}$. Середнє прискорення не дає уявлення про дійсне прискорення у кожний певний момент часу (дійсне прискорення називають миттєвим). Дійсне прискорення – це границя, до якої прямує середнє прискорення за Δt , що прямує до нуля:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt}.$$

Враховуючи, що $V = \frac{dS}{dt}$,
дістаємо

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2} \quad (\text{м/с}^2).$$

Дійсне прискорення в прямолінійному русі дорівнює першій похідній швидкості за часом або другій похідній координати (відстані від початку відліку переміщення) за часом.

Коли точка рухається за криволінійною траєкторією, то швидкість змінює свій напрямок. Уявимо точку М, яка за час Δt , рухаючись за криволінійною траєкторією, перемістилася у положення М₁ (рис. 3). Вектор приросту (зміни) швидкості позначимо ΔV , тоді $\Delta V = V_1 - V$.

Щоб знайти вектор ΔV , перенесемо вектор V_1 у точку М і побудуємо трикутник швидкостей. Знайдемо вектор середнього прискорення: $a_c = \frac{\Delta V}{\Delta t}$.

Вектор a_c паралельний вектору ΔV , оскільки від ділення векторної величини на скалярну напрямок вектора не зміниться.

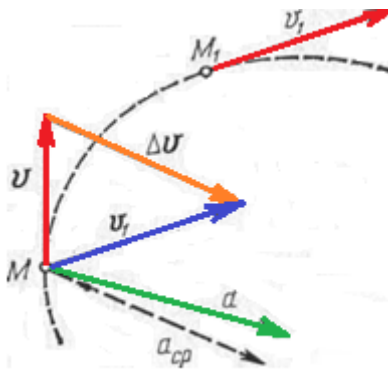


Рис. 3

Вектор дійсного прискорення – це границя, до якої прямує відношення вектора приросту швидкості відповідного проміжку часу, коли він прямує до нуля,

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t}.$$

Таку границю називають векторною похідною. Таким чином, *дійсне прискорення точки в криволінійному русі дорівнює векторній похідній швидкості за часом.*

З рис. 3 бачимо, що вектор прискорення в криволінійному русі завжди спрямований у бік угнутості траєкторії.

Прискорення в криволінійному русі, якщо рух точки задано звичайним способом, визначається за теоремою про проекції прискорення на дотичну і нормаль.

Проекцію повного прискорення на нормаль до траєкторії називають *нормальним прискоренням*; проекцію повного прискорення на

дотичну до траєкторії називають **дотичним прискоренням**; його іноді називають ще тангенціальним.

Теорема. Нормальне прискорення a_n дорівнює квадрату швидкості, поділеному на радіус кривизни траєкторії у певній точці, дотичне прискорення a_t дорівнює першій похідній швидкості за часом.

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}, \quad a_t = \frac{dV}{dt}.$$

Аналізуючи формули дотичного і нормального прискорень, можна побачити, що коли швидкість за модулем не змінюється, то $a_t = \frac{dV}{dt} = 0$; а коли швидкість не змінюється за напрямком (прямолінійний рух), то $a_n = \frac{V^2}{\infty} = 0$.

Отже, дотичне прискорення характеризує зміну швидкості лише за модулем, а нормальне – лише за напрямком.

Знаючи дотичне і нормальне прискорення, можна визначити модуль і напрямок повного прискорення за формулами: модуль прискорення $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$;
напрямок прискорення

$$\cos(a_t, a) = \frac{a_t}{a}$$

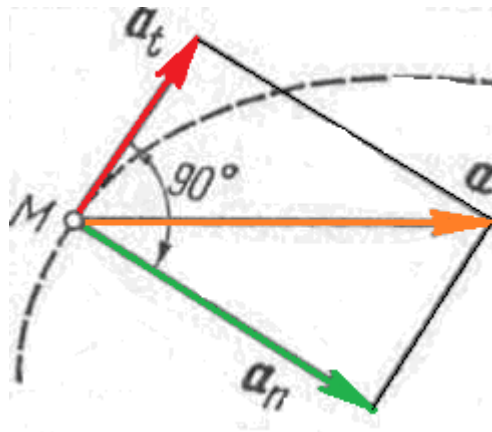


Рис. 4

Часто дотичне і нормальне прискорення розглядають не як проекції, а як **складові повного прискорення**, тобто векторні величини. Коли осі взаємно перпендикулярні, то проекції вектора на ці осі і його складові, спрямовані за цими осями, рівні між собою за модулем. Дотичне, нормальне і повне прискорення показано на рис. 4.

Якщо $a_t > 0$, то вектори дотичного прискорення і швидкості спрямовані в один бік і тому рух буде прискореним. А коли $a_t < 0$, то вектор дотичного прискорення має протилежний до швидкості напрямок і тому рух буде сповільненим. Вектор нормального прискорення завжди напрямлений до центра кривизни, тому це прискорення називають ще *доцентровим*.

3. Види руху точки залежно від прискорення

Аналізуючи формули дотичного і нормального прискорень, можна дійти таких висновків:

1. $a_t = \frac{dV}{dt} \neq 0$, $a_n = \frac{V^2}{\rho} \neq 0$, рух нерівномірний ($V \neq \text{const}$), криволінійний ($\rho \neq \infty$);
2. $a_t = \frac{dV}{dt} = 0$, $a_n = \frac{V^2}{\rho} \neq 0$, рух рівномірний ($V = \text{const}$), криволінійний ($\rho \neq \infty$);
3. $a_t = \frac{dV}{dt} \neq 0$, $a_n = \frac{V^2}{\rho} = 0$, рух нерівномірний ($V \neq \text{const}$), прямолінійний ($\rho = \infty$);
4. $a_t = \frac{dV}{dt} = 0$, $a_n = \frac{V^2}{\rho} = 0$, рух рівномірний прямолінійний.

Під час рівномірного руху дотичне прискорення $a_t = \frac{dV}{dt} = 0$. Модуль швидкості точки в рівномірному русі – величина стала $V = \frac{dS}{dt} = \text{const}$. Звідси $dS = V \cdot dt$, інтегруючи цей вираз, дістаємо

$$\int_{S_0}^S dS = \int_0^t V \cdot dt, \quad S - S_0 = V \cdot t.$$

Остаточно формули рівномірного руху:

$$V = \text{const}, \quad S = S_0 + V \cdot t.$$

У рівнозмінному русі дотичне прискорення – величина стала:

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2} = \text{const},$$

звідси

$$dV = a_t \cdot dt.$$

Інтегруючи цей вираз, дістаємо:

$$\int_V^{V_0} dV = \int_0^t a_t \cdot dt, \quad V - V_0 = a_t \cdot t.$$

Остаточно формула швидкості:

$$V = V_0 \pm a \cdot t.$$

Оскільки $dS = V \cdot dt$, інтегруючи цей вираз, дістаємо рівняння рівно змінного руху точки:

$$\int_S^{S_0} dS = \int_0^t (V_0 + a \cdot t) \cdot dt, \quad S - S_0 = V_0 \cdot t + \frac{a_t \cdot t^2}{2}.$$

Формули рівнозмінного руху:

$$V = V_0 \pm a \cdot t; \quad S = S_0 + V_0 \cdot t \pm \frac{a_t \cdot t^2}{2}.$$

Якщо точка рухається криволінійно, то вона має нормальне

прискорення $a_n = \frac{V^2}{\rho}$, а модуль повного прискорення визначають за формулою:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}.$$

Запитання для самоконтролю

1. Що вивчає кінематика?
2. Які існують системи відліку?
3. Який рух називають рівномірним?
4. Який рух називають рівнозмінним?
5. Які є способи задання руху точки?
6. Що називають швидкістю точки?
7. Що називають прискоренням точки?
8. Які існують види руху точки залежно від прискорення?

Тема 1.6. Кінематика найпростіших рухів твердого тіла

План

1. Поступальний рух твердого тіла
2. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі, рівняння руху
3. Кутова швидкість та кутове прискорення
4. Рівномірне та рівнозмінне обертання. Лінійні швидкості та прискорення точок тіла, яке обертається навколо нерухомої осі

1. Поступальний рух твердого тіла

Рух тіла, під час якого будь-яка пряма, проведена у тілі, залишається паралельною сама собі, називають поступальним.

Поступальний рух не слід плутати з прямолінійним. За поступального руху траєкторії точок тіла можуть бути будь-якими кривими лініями. Приклади: рух кузова автомобіля на прямій горизонтальній ділянці шляху;

рух поршня стаціонарного двигуна внутрішнього згорання; клавіша соломотряса (траєкторії – кола, радіуси яких дорівнюють радіусам корб).

Якщо взяти в тілі, що рухається поступально, відрізок AB , то він, переміщаючись разом з тілом, займе положення A_1B_1 (рис. 1). Замінивши дуги AA_1 і BB_1 хордами, дістанемо чотирикутник ABB_1A_1 у якому дві протилежні сторони AB і A_1B_1 за умовою рівні і паралельні.

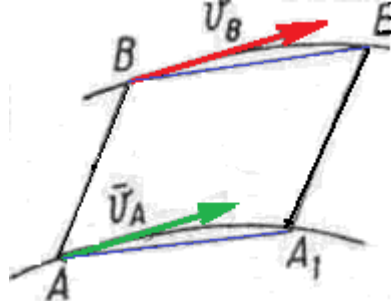


Рис. 1

У такому випадку цей чотирикутник має бути паралелограмом. Але тоді хорда AA_1 дорівнює і паралельна хорді BB_1 .

На основі цього можна дійти висновку, що *у поступальному русі усі точки твердого тіла мають однакові траєкторії, швидкості і прискорення.*

Отже, для вивчення поступального руху твердого тіла досить вивчити рух однієї його точки.

2. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі, рівняння руху

Обертальним називається такий рух твердого тіла, за якого будь-які дві точки, що належать тілу (або незмінно з ним зв'язані), залишаються за весь час руху нерухомими. Пряму, що проходить через ці дві нерухомі точки, називають *віссю обертання*.

Обертальний рух у техніці – явище дуже поширене. Переважна більшість механізмів і машин мають ланки, які рухаються обертально, наприклад вали, зубчасті колеса, корби тощо. Поняття обертального руху може стосуватися лише тіла, але не точки; так, наприклад, рух точки за колом – не обертальний рух, а криволінійний.

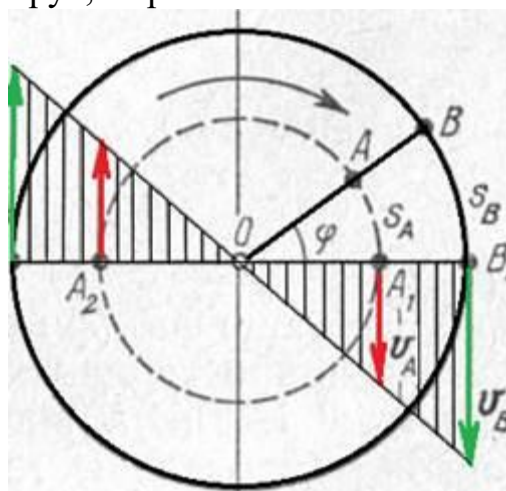


Рис. 2

За обертального руху всі точки тіла, що не лежать на осі обертання, описують кола, центри яких знаходяться на осі обертання, а радіуси дорівнюють відстаням від цих точок до осі обертання.

Розглянемо диск, який обертається навколо осі, перпендикулярної до рис. 2. Точка О – слід цієї осі. Очевидно, що траєкторії точок обертового тіла є кола різних радіусів, розміщені в площинах, перпендикулярних до осі обертання, з центрами, що лежать на цій осі.

Нехай за час t диск повернувся на кут φ . При цьому точка А пройшла шлях S_A , а точка В – шлях S_B . Оскільки точки, що містяться на різних відстанях від осі обертання, за той самий проміжок часу проходять різні шляхи, то вони мають різні швидкості і прискорення.

Отже, під час обертального руху тіла його точки, що містяться на різних відстанях від осі обертання, мають неоднакові траєкторії, швидкості і прискорення.

Звідси виходить, що лінійне переміщення (шлях), лінійна швидкість і прискорення не можуть характеризувати обертальний рух тіла загалом. Обертальний рух тіла можна характеризувати кутом φ , на який воно повертається за певний проміжок часу. Цей кут називають кутовим переміщенням тіла. Кутове переміщення виражають у радіанах (рад) або обертах (об); в останньому випадку кутове переміщення позначають N . Щоб установити залежність між кутом φ і N , складемо пропорцію:

$$1 \text{ об} - 2\pi \text{ рад},$$

$$N \text{ об} - \varphi \text{ рад},$$

Звідки:

$$\varphi = 2 \cdot \pi \cdot N,$$

де: N – кількість обертів тіла.

Кут φ за обертання тіла змінюється залежно від часу, тому закон обертального руху в загальному вигляді можна записати так:

$$\varphi = f(t).$$

З рис. 2 бачимо, що шлях будь-якої точки обертового тіла:

$$S = r \cdot \varphi,$$

де r – відстань точки від осі обертання.

3. Кутова швидкість та кутове прискорення

Швидкість будь-якої точки тіла визначають так:

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{d(r\varphi)}{dt} = r \cdot \frac{d\varphi}{dt},$$

(r винесли за знак похідної, оскільки для цієї точки твердого тіла ця величина стала).

Вираз $\frac{d\varphi}{dt}$ позначимо ω і назовемо кутовою швидкістю.

Кутова швидкість – це кінематична міра руху обертового тіла, яка характеризує швидкість його кутового переміщення.

Кутова швидкість дорівнює першій похідній кутового переміщення за часом

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \text{ (рад/с)}.$$

Формулу для визначення швидкості будь-якої точки обертового тіла записують так:

$$V = \omega \cdot r.$$

У техніці швидкість обертання часто вимірюють в обертах за хвилину, n – частота обертання.

Залежність між кутовою швидкістю і частотою обертання. Запишемо пропорцію ω рад – 1 с, $2\pi n$ рад – 60 с.

З пропорції знайдемо

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} \approx 0,1 \cdot n \text{ (рад/с)}.$$

Величина, що характеризує швидкість зміни кутової швидкості залежно від часу, називається кутовим прискоренням тіла.

Кутове прискорення дорівнює першій похідній кутової швидкості або другій похідній кутового переміщення за часом

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \text{ (рад/с}^2\text{)}.$$

Нормальне прискорення точки дорівнює:

$$a_n = \omega^2 \cdot r.$$

Дотичне прискорення будь-якої точки нерівномірного руху обертового тіла:

$$a_t = \varepsilon \cdot r.$$

4. Рівномірне та рівнозмінне обертання. Лінійні швидкості та прискорення точок тіла, яке обертається навколо нерухомої осі

Якщо тіло обертається навколо нерухомої осі зі сталою кутовою швидкістю, то такий рух називають **рівномірним**. Формули рівномірного обертального руху: $\omega = const$, $\varphi = \omega \cdot t$.

Якщо тіло обертається навколо нерухомої осі зі сталим кутовим прискоренням, то такий рух називають **рівнозмінним**.

Формули рівнозмінного обертального руху:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \text{const}, \quad \omega = \omega_0 \pm \varepsilon t, \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Формула для визначення швидкості будь-якої точки обертального тіла:

$$V = \omega \cdot r.$$

Повне прискорення точки дорівнює:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}.$$

Нормальне прискорення точки дорівнює:

$$a_n = \omega^2 \cdot r.$$

Дотичне прискорення будь-якої точки нерівномірного руху обертального тіла:

$$a_t = \varepsilon \cdot r.$$

Запитання для самоконтролю

1. Який рух називають поступальним?
2. Як рухаються усі точки твердого тіла за поступального руху?
3. Який рух називають обертальним?
4. Що називають віссю обертання?
5. Що називають кутовою швидкістю?
6. Як визначають кутова швидкість тіла?
7. Що називають кутовим прискоренням?
8. Як визначають кутове прискорення тіла?
9. Які одиниці виміру мають кутова швидкість та кутове прискорення?
10. За якою формулою визначають дотичне прискорення?
11. За якою формулою визначають нормальне прискорення?
12. Як визначають повне прискорення?

Тема 1.7. Складний рух точки

План

1. Абсолютний, відносний та переносний рух точки
2. Теорема про додавання швидкостей

1. Абсолютний, відносний та переносний рух точки

Нерідко доводиться розглядати рух точок водночас відносно двох систем відліку, одну з яких умовно приймають нерухомою, а друга певним

способом рухається відносно першої. У такому випадку рух точки називають складним.

Рух точки відносно нерухомої системи координат називають *абсолютним*. Рух точки відносно рухомої системи координат називають *відносним*. Рух рухомої системи координат відносно нерухомої називають *переносним*. Абсолютний рух точки складний, він містить відносний і переносний рухи.

Пояснимо це за допомогою рис. 1. Нехай XOY – рухома система координат, яка переміщується в площині рисунка рівномірно поступально вздовж осі x ; точка A рівномірно переміщується вгору по осі y . Якщо рух буде лише відносним, то точка перейде з положення A в положення A_1 . Якщо ж рух буде лише переносним, то точка з положення A перейде в положення A_2 . А коли водночас відбуватимуться відносний і переносний рухи, то точка за той самий проміжок часу перейде з положення A в положення A_3 .

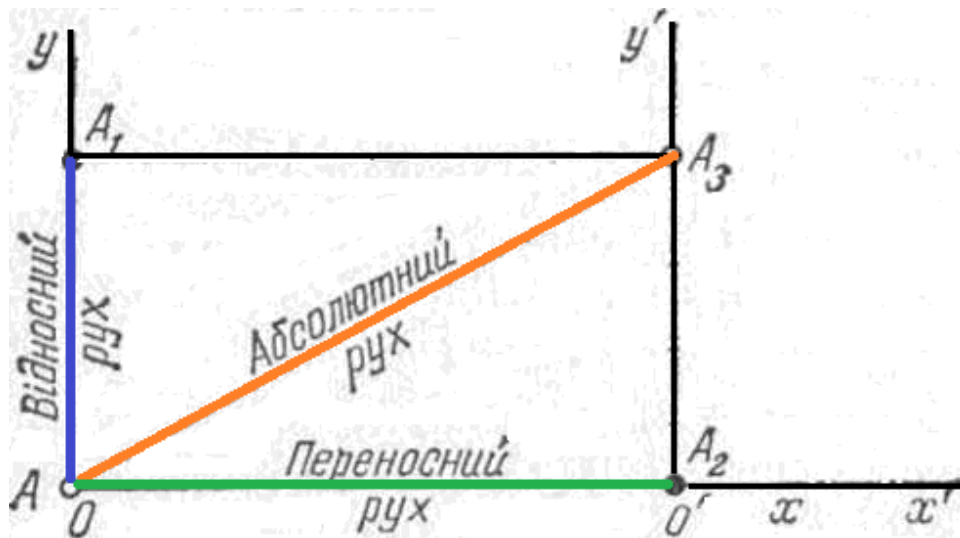


Рис. 1

Зважаючи на означення переносного і відносного рухів, а також на розглянутий приклад, можна вибрати такий метод вивчення цих рухів. Якщо треба вивчити відносний рух точки, то потрібно уявно зупинити переносний рух, а коли доводиться вивчати переносний рух, то потрібно уявно зупинити відносний рух.

2. Теорема про додавання швидкостей

Швидкість точки в абсолютному русі називають *абсолютною*. Швидкість точки у відносному русі називають *відотною*. Швидкість розглядуваної точки, уявно закріпленої в певний момент на рухомій системі координат, називають *переносною*. Зв'язок між цими швидкостями визначається теоремою про додавання швидкостей.

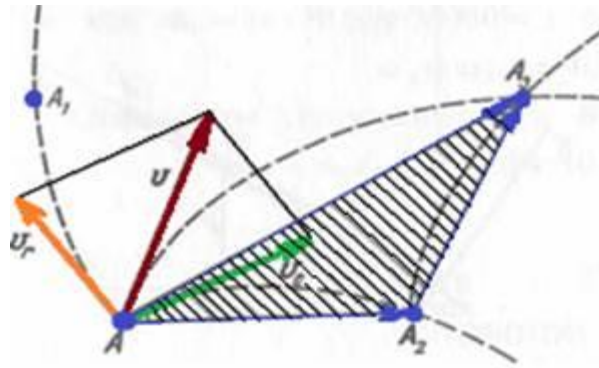


Рис. 2

Теорема. *Абсолютна швидкість точки дорівнює векторній сумі відносної і переносної швидкостей.*

Нехай за час Δt точка перейшла з положення A в положення A_3 , рухаючись за траєкторією абсолютного руху, тобто за дугою AA_3 (рис. 2). Коли б рух був лише відносним, то точка перейшла б у положення A_1 , а коли б рух був лише переносним, то точка перейшла б у положення A_2 . Можна уявити, що точка з A перейшла в положення A_3 , рухаючись спочатку лише за траєкторією переносного руху (дуга AA_2), а потім лише за траєкторією відносного руху (дуга A_2A_3 , яка дорівнює дузі AA_1).

Сполучивши точки A , A_2 і A_3 хордами, дістанемо таку залежність між векторами зміщень точки A :

$$AA_3 = AA_2 + A_2A_3.$$

Поділимо всі члени рівностей на Δt перейдемо до границі, коли Δt прямує до нуля,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{AA_3}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{AA_2}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A_2A_3}{\Delta t},$$

Звідси:

$$\vec{V} = \vec{V}_{пер} + \vec{V}_{від}.$$

де: V – вектор абсолютної швидкості;

$V_{пер}$ – вектор переносної швидкості;

$V_{від}$ – вектор відносної швидкості.

Теорему доведено.

Додавання прискорень

$$\vec{a} = \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{від}.$$

За переносного поступального руху абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі переносного і відносного прискорень.

Запитання для самоконтролю

1. Який рух називають абсолютним?
2. Який рух називають відносним?
3. Який рух називають переносним?
4. Яку швидкість називають переносною?
5. Сформулюйте теорему про додавання швидкостей.

Тема 1.8. Плоскопаралельний рух твердого тіла

План

1. Плоскопаралельний рух твердого тіла
2. Розкладання плоскопаралельного руху на поступальний та обертальний
3. Швидкості точок плоскої фігури
4. Поняття про миттєвий центр швидкостей

1. Плоскопаралельний рух твердого тіла

Плоскопаралельним рухом твердого тіла називають такий рух, в якому всі точки тіла переміщуються в площинах, паралельних якійсь площині, яку називають основною. Прикладами плоскопаралельного руху можуть бути рух колеса на прямолінійній ділянці шляху, рух гонка корбово-повзункового механізму.

З означення плоскопаралельного руху випливає, що будь-яка пряма АВ, проведена в тілі перпендикулярно до основної площини, рухається поступально.

2. Розкладання плоскопаралельного руху на поступальний та обертальний

Вивчення плоскопаралельного руху зводиться до вивчення руху плоскої фігури S в її площині Q (рис. 1). Цей рух можна розкласти на два: поступальний разом з полюсом, обертальний навколо полюса.

Рух відносно нерухомої системи координат називають *абсолютним*. Рух відносно рухомої системи координат називають *відносним*. Рух рухомої системи координат відносно нерухомої називають *переносним*. Абсолютний рух точки складний, він охоплює відносний і переносний рухи.

Полюсом називається довільна точка, зв'язана з рухомою фігурою і яка приймається за центр повороту. За полюс можна вибрати будь-яку точку плоскої фігури.

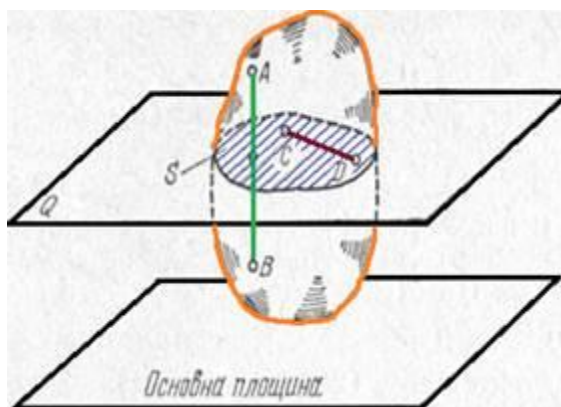


Рис. 1

Обертальний рух навколо полюса не залежить від вибору полюса, поступальний рух залежить від вибору полюса.

Кутова швидкість ω і кутове прискорення ε плоскої фігури також не залежать від вибору полюса і є за плоскопаралельного руху твердого тіла спільною кінематичною характеристикою всіх точок тіла. Кутову швидкість у плоскопаралельному русі називають *миттєвою кутовою швидкістю*, а кутове прискорення – *миттєвим кутовим прискоренням*.

3. Швидкості точок плоскої фігури

За полюс можна прийняти деяку точку А фігури (рис. 2). Тоді швидкість будь-якої іншої точки В цієї фігури згідно з теоремою про додавання швидкостей складатиметься із швидкості V_A точки А (за поступального руху швидкості всіх точок тіла однакові) і швидкості обертального руху V_{BA} точки В навколо точки А, тобто:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}.$$

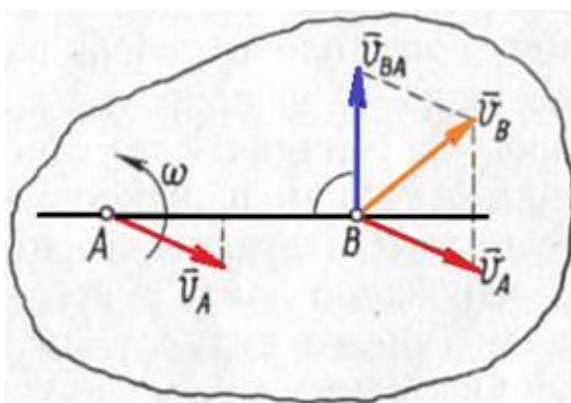


Рис. 2

Вектор V_{BA} спрямований перпендикулярно до радіуса обертання АВ у бік обертання, а за модулем:

$$V_{BA} = \omega \cdot AB,$$

де ω – кутова швидкість обертального руху плоскої фігури.

Теорема про швидкості точок плоскої фігури: *швидкість будь-якої точки плоскої фігури дорівнює геометричній сумі швидкості полюса і обертальної швидкості цієї точки навколо полюса.*

Важливе значення має теорема про проекції швидкостей двох точок плоскої фігури на пряму, що з'єднує ці точки: *проекції швидкостей двох точок плоскої фігури на пряму, що з'єднує ці точки, рівні між собою.*

4. Поняття про миттєвий центр швидкостей

Простим методом визначення швидкостей точок за плоскопаралельного руху тіла є метод миттєвих центрів швидкостей (м. ц. ш.).

М. ц. ш. називають зв'язану з плоскою фігурою точку, швидкість якої в певний момент часу дорівнює нулю.

- 1) швидкість миттєвого центра дорівнює нулю;
- 2) миттєвий центр лежить на перпендикулярі, опущеному з точки на напрямок її швидкості;
- 3) швидкість точки дорівнює добутку миттєвої кутової швидкості на відстань точки від миттєвого центра швидкостей (рис. 3):

$$V_A = \omega \cdot OA.$$

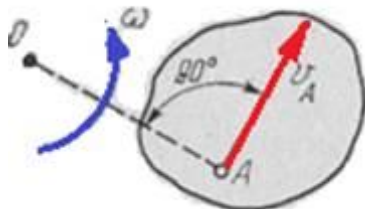


Рис. 3

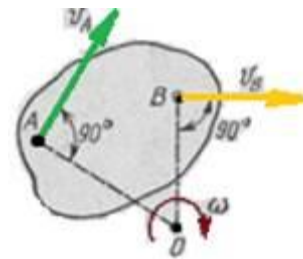


Рис. 4

На підставі цих властивостей можна встановити такі п'ять способів визначення положення миттєвого центра швидкостей плоскої фігури.

1. Відомі миттєва кутова швидкість ω і швидкість V_A якоїсь точки A плоскої фігури (рис. 3). У такому випадку миттєвий центр швидкостей O міститься на перпендикулярі, опущеному з точки A на вектор швидкості V_A на відстані:

$$OA = \frac{V_A}{\omega}.$$

2. Відомі напрями швидкостей двох точок A і B в плоскої фігури (рис. 4).

Тоді миттєвий центр O лежить на перетині перпендикулярів, опущених з точок A і B на напрямку їх швидкостей, до того ж:

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{\omega \cdot OA}{\omega \cdot OB} = \frac{OA}{OB},$$

тобто швидкості точок плоскої фігури прямо пропорційні їх відстаням від миттєвого центра швидкостей.

3. Відомо, що швидкості двох точок А і В плоскої фігури паралельні між собою, однаково спрямовані і перпендикулярні до відрізка АВ, але різні за модулем (рис. 5). Тоді миттєвий центр швидкостей О лежить у точці перетину прямої, яка сполучає початки векторів V_A і V_B з прямою, яка сполучає кінці цих векторів. Якщо вектори швидкостей точок А і В між собою рівні, то миттєвий центр швидкостей у певний момент лежить у нескінченності, миттєва кутова швидкість дорівнює нулю, швидкості усіх точок плоскої фігури будуть однакові і тому рух буде миттєво поступальним.

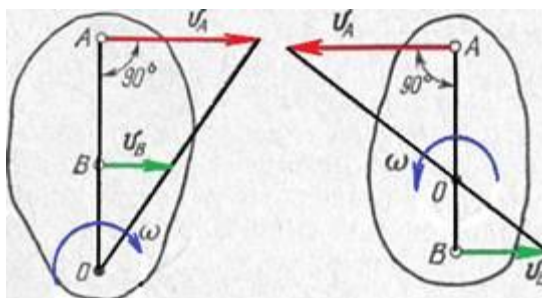


Рис. 5

Рис. 6

4. Відомо, що швидкості точок А і В плоскої фігури паралельні між собою, мають протилежні напрямки і перпендикулярні до відрізка АВ (рис. 6). У цьому випадку миттєвий центр швидкостей О міститься у точці перетину відрізка АВ з прямою, яка сполучає кінці векторів V_A і V_B .

5. Відомо, що плоска фігура котиться без проковзування за нерухомою кривою. Тоді миттєвий центр швидкостей О лежить у точці дотику фігури і кривої, оскільки швидкість цієї точки фігури в певний момент дорівнює нулю.

Насамкінець розглянемо кочення колеса за прямолінійною рейкою за різних умов тертя. На рис. 7 показано положення миттєвого центра швидкостей і графіки швидкостей точок вертикального діаметра для випадку тертя ковзання, тертя кочення, тертя кочення з проковзуванням, часткового і повного буксування колеса.

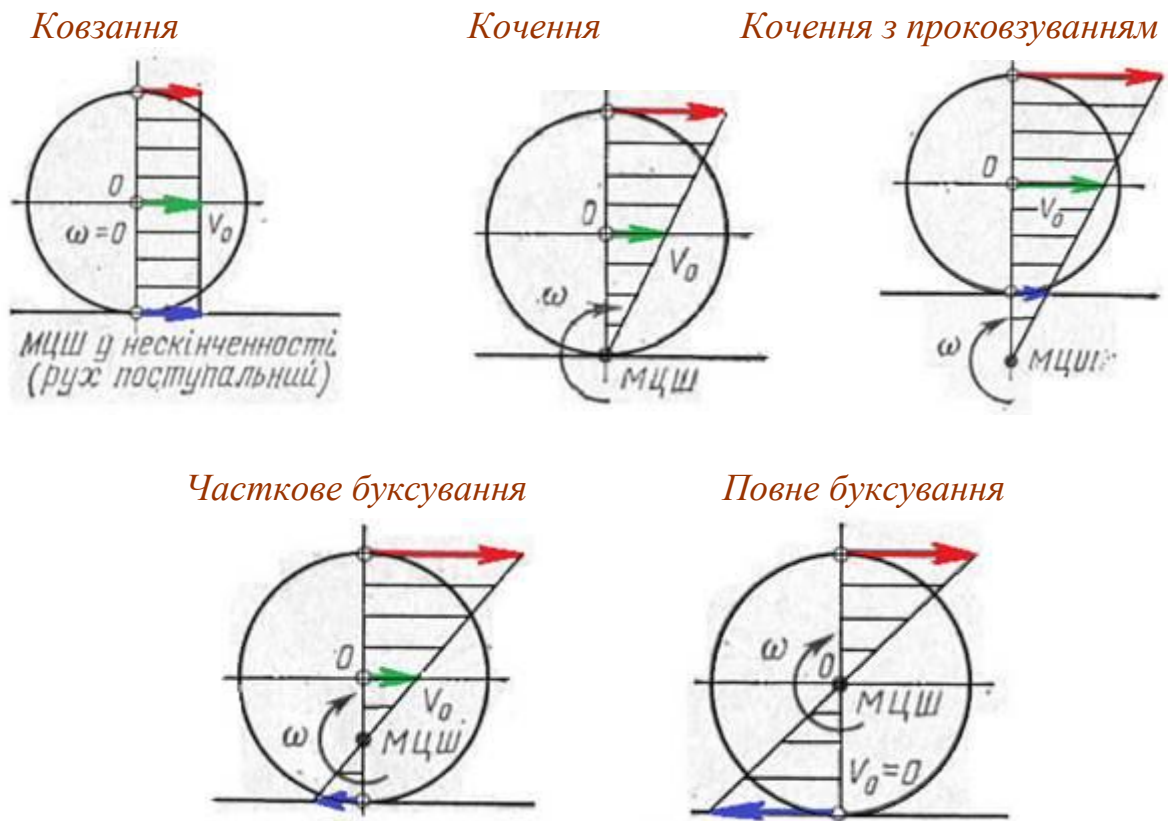


Рис. 7

Запитання для самоконтролю

1. Який рух називають плоскопаралельним?
2. Який рух називають абсолютним?
3. Який рух називають відносним?
4. Який рух називають переносним?
5. Чи залежить обертальний рух навколо полюса від вибору полюса?
6. Що називають полюсом за плоскопаралельного руху?
7. Сформулюйте теорему про швидкості точок плоскої фігури.
8. Сформулюйте теорему про проекції швидкостей двох точок плоскої фігури на пряму, що з'єднує ці точки.
9. Яку точку називають миттєвим центром швидкостей?
10. Назвіть основні способи визначення положення миттєвого центра швидкостей плоскої фігури.

ДИНАМІКА

Тема 1.9. Вступ до динаміки

План

1. Предмет динаміки. Основні поняття і визначення: маса, матеріальна точка, сила, постійні та змінні сили, закони динаміки
2. Основне рівняння динаміки. Дві основні задачі динаміки

1. Предмет динаміки. Основні поняття і визначення: маса, матеріальна точка, сила, постійні та змінні сили, закони динаміки

Динаміка – це частина теоретичної механіки, яка вивчає механічний рух тіл залежно від сил, що впливають на цей рух.

Установлення основних законів динаміки почалося з часів італійського вченого Галілея (1564–1642); далі його продовжив Ньютон, Галілей спростував погляд, який панував у науці з часів Арістотеля (IV ст. до н. е.), про те, що з двох тіл, що падають на Землю, важче те, яке падає швидше. Галілей виявив, що причиною зміни швидкості є сила, тобто причина виникнення прискорення (рис.1).



Рис.1

Динаміка ґрунтується на низці положень, що є аксіомами і називаються **законами динаміки**. Перед тим, як перейти до вивчення цих законів, введемо поняття ізолюваної матеріальної точки, тобто точки, на яку не діють інші матеріальні точки. Насправді ізолюваних тіл у природі не існує і поняття ізолюваної матеріальної точки цілком умовне.

Перший закон динаміки, який називають *аксіомою інерції* або *першим законом Ньютон**а*, стосовно матеріальної точки формулюється так: *ізолювана матеріальна*

точка перебуває або у стані спокою, або рухається прямолінійно і рівномірно.

У кінематиці було встановлено, що прямолінійний рівномірний рух – це єдиний вид руху, в якому прискорення дорівнює нулю. Тому аксіому інерції можна сформулювати так: прискорення ізольованої матеріальної точки дорівнює нулю.

Отже, ізольована від впливу навколишніх тіл точка сама собі не може надати прискорення. Цю властивість тіл називають інерцією, або інертністю. Можна сказати, що інерція або *інертність – це властивість тіла зберігати свою швидкість незмінною за модулем і напрямом* (зокрема і швидкість, яка дорівнює нулю).

Змінити швидкість, тобто надати прискорення, може лише прикладена до тіла сила. Залежність між силою і наданим нею прискоренням виражається другим законом динаміки, або другим законом Ньютона, який формулюється так: *прискорення, якого надає матеріальній точці сила, має напрям сили і пропорційне її модулю.*

Якщо сила F_1 надає матеріальній точці прискорення α_1 а сила F_2 – прискорення α_2 , то за другим законом можна записати:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}; \quad \text{або} \quad \frac{F_1}{\alpha_1} = \frac{F_2}{\alpha_2}.$$

Отже, для цієї матеріальної точки відношення сили до прискорення є величина стала. Це відношення позначимо m і назовемо масою цієї точки:

$$\frac{F}{\alpha} = m = \text{const}.$$

Ця рівність означає, що дві матеріальні точки мають однакові маси, якщо від однієї і тієї самої сили вони набувають однакового прискорення; що більша маса точки, то більшу силу треба прикласти, щоб надати їй потрібного прискорення. Маса – одна з основних характеристик будь-якого матеріального об'єкта, що визначає його інертні і гравітаційні властивості. Ньютон називав масою кількість матерії в тілі і вважав масу сталою величиною.

Маса – це міра інертності тіла.

2. Основне рівняння динаміки. Дві основні задачі динаміки

Другий закон Ньютона має вигляд:

$$F = m \cdot \alpha.$$

Його називають основним рівнянням динаміки і формулюють так: *сила – це вектор, що дорівнює добутку маси точки на її прискорення.* Основне

рівняння динаміки – це рівняння руху матеріальної точки у векторній формі. З досліду відомо, що під дією притягання Землі тіла падають у пустоті в цьому місці з однаковим прискоренням, яке називають прискоренням вільного падіння.

Сила тяжіння тіла дорівнює його масі, помноженій на прискорення вільного падіння:

$$G = m \cdot g .$$

Прискорення вільного падіння g у різних місцях земної поверхні різне; воно зменшується від полюса до екватора, бо земна куля сплюснута в напрямі полюсів. Іншою причиною зменшення прискорення вільного падіння під час переміщення від полюсів до екватора є відцентрова сила. Для Москви $g = 9,8156 \text{ м/с}^2$, на полюсах $g = 9,83 \text{ м/с}^2$, на екваторі $g = 9,78 \text{ м/с}^2$. З цього випливає, що сила тяжіння тіла залежить від місця, в якому зважують тіла.

Із другого закону Ньютона виходить, що під впливом сталої сили вільна матеріальна точка, яка була у стані спокою, рухатиметься прямолінійно рівномірно. Рух під дією сталої сили може бути прямолінійним і криволінійним (в останньому випадку матеріальна точка має початкову швидкість, вектор якої не збігається з лінією дії сил). Прикладом руху під впливом сталої сили є вільне падіння тіл.

До основних законів динаміки відносять відому із статички аксіому взаємодії, або третій закон Ньютона. Стосовно матеріальної точки закон формулюють так: ***сили взаємодії двох матеріальних точок за модулем рівні між собою і мають протилежні напрями.***

Принцип незалежності дії сил формулюється так: ***коли на матеріальну точку одночасно діє кілька сил, то її прискорення дорівнює векторній сумі прискорень, що їх набувала б ця точка від кожної сили окремо.***

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots \vec{F}_n .$$

На основі аксіом динаміки можна розв'язати дві **задачі динаміки**:

- 1) за заданим рухом точки визначати сили, які діють на неї;
- 2) знаючи сили, які діють на точку, визначити її рух.

Запитання для самоконтролю

1. Що вивчає динаміка?
2. Сформулюйте закони динаміки?
3. Чому дорівнює сила тяжіння тіла?
4. Сформулюйте принцип незалежності дії сил.
5. Назвіть дві основні задачі динаміки.

Тема 1.10. Метод кінетостатики

План

1. Поняття про вільну та невільну точки. Поняття про силу інерції. Сили інерції за прямолінійного та криволінійного руху матеріальної точки
2. Принцип Д'Аламбера, метод кінетостатики

1. Поняття про вільну та невільну точки. Поняття про силу інерції. Сили інерції за прямолінійного та криволінійного руху матеріальної точки

Нехай матеріальна точка, маса якої m , рухається з прискоренням α під дією якоїсь системи активних і реактивних сил, рівнодіюча яких F . Скористаємось однією з відомих формул (основним рівнянням динаміки), щоб рівняння руху записати у вигляді рівнянь рівноваги (метод кінетостатики):

$$F = m \cdot \alpha.$$

Перепишемо це рівняння у такому вигляді:

$$F + (-m \cdot \alpha) = 0.$$

Вираз у дужках позначимо F^{in} і назовемо **силою інерції**:

$$F^{in} = -m \cdot \alpha.$$

Сила інерції – це вектор, який дорівнює добутку маси точки на її прискорення і має протилежний до прискорення напрям.

У криволінійному русі точки повне прискорення дорівнює векторній сумі дотичного і нормального прискорень (рис. 1).

Дотичне прискорення:

$$a_t = \frac{dV}{dt},$$

нормальне прискорення:

$$a_n = \frac{V^2}{\rho},$$

повне прискорення:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Кожному прискоренню відповідає своя сила інерції:

$$F_t^{in} = m \cdot \frac{dV}{dt} \quad \text{– дотична, або тангенціальна, сила інерції;}$$

$$F_n^{in} = m \cdot \frac{V^2}{\rho} = m \cdot \omega^2 \cdot R \quad \text{– нормальна, або відцентрова, сила інерції;}$$

$$F^{in} = m \cdot \alpha \quad \text{– повна сила інерції.}$$

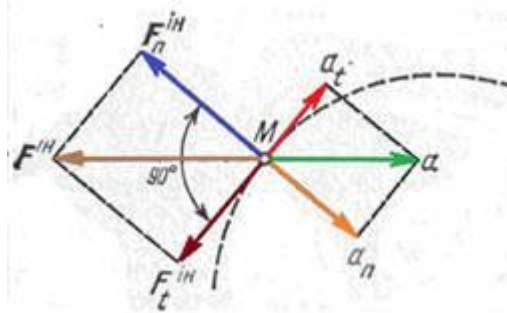


Рис. 1

2. Принцип Д'Аламбера, метод кінетостатики

$$\vec{F} + \vec{F}_{in} = 0$$

Цю рівність, яка є математичним виразом принципу, що носить ім'я французького вченого **Д'Аламбера** (1717–1783), можна розглядати як рівняння рівноваги матеріальної точки. Підкреслимо, що добута рівність, хоч і називається рівнянням рівноваги, насправді є видозміненим рівнянням руху матеріальної точки.

Принцип Д'Аламбера формулюють так: **активні і реактивні сили, які діють на матеріальну точку разом із силами інерції утворюють систему взаємно зрівноважених сил, що відповідає всім умовам рівноваги.**

Треба пам'ятати, що сила інерції прикладена до розглядуваної матеріальної точки умовно, але для зв'язку, який спричинює прискорення, вона реальна. Пояснимо це на прикладі (рис. 2). Нехай до тіла, яке лежить на горизонтальній площині, прив'язано нитку, яка може витримати силу тяжіння G цього тіла. Якщо до нитки прикласти силу F статично (поступово), то тіло підніметься вгору і нитка не обірветься, а коли силу F прикласти динамічно (раптово, ривком), то нитка обірветься. Це пояснюється так.

Щоб підняти вантаж, йому потрібно надати певного прискорення α . Для визначення натягу нитки застосуємо принцип Д'Аламбера і складемо рівняння рівноваги.

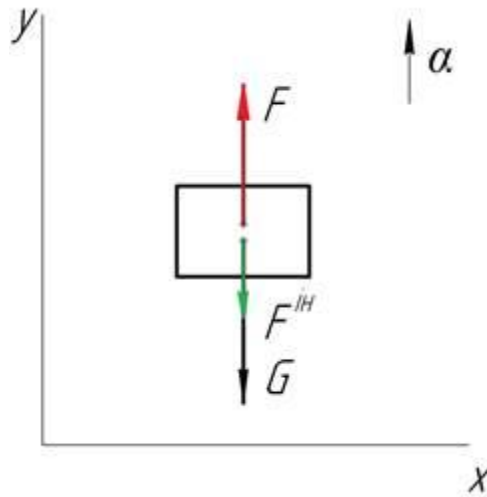


Рис. 2

$$\sum F_y = 0; F - G - F^{IH} = 0.$$

Вагою тіла називають силу, з якою тіло внаслідок притягання до Землі діє на опору (або підвіс), яка утримує його від вільного падіння. Якщо тіло і опора нерухомі, то вага тіла дорівнює його силі тяжіння.

Розглянемо рівномірний рух по колу, що лежить у горизонтальній площині, каменя, на який діє сила тяжіння G . Камінь прив'язано до невагомої нитки завдовжки R , яка лежить у тій самій площині (рис. 3а).

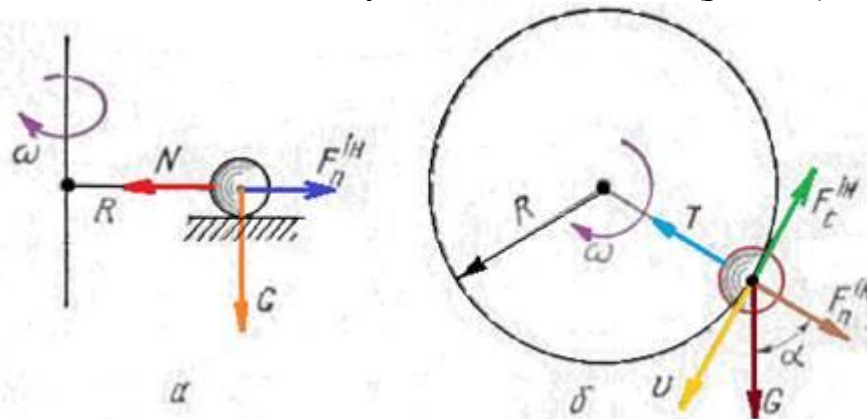


Рис. 3

Щоб нитка залишалась у площині руху каменя, припускаємо, що він ковзає на ідеальній гладенькій горизонтальній площині. Швидкість каменя позначимо V .

Тоді $F_n^{IH} = m \cdot \frac{V^2}{R}$ – відцентрова сила інерції (ця сила натягує нитку);

$N = m \cdot \frac{V^2}{R}$ – доцентрова сила, прикладена до каменя (ця сила утримує камінь на колі).

Відцентрова і доцентрова сили (дія і протидія) за третім законом Ньютона дорівнюють одна одній за модулем і мають протилежні напрями.

Очевидно, що дотична сила інерції F у цьому випадку дорівнює нулю, бо $V = \text{const}$.

З досвіду відомо, що за достатньої швидкості нитка може розірватись і камінь полетить по дотичній до кола, тобто в напрямку швидкості, яку має камінь у момент розриву нитки. Це свідчить про те, що відцентрова сила інерції є реальною силою для зв'язку, але до тіла вона прикладена умовно.

Всередині тіл, які рухаються з прискоренням, також виникають внутрішні сили інерції, бо для кожної частинки тіла сусідні частинки є зв'язками. Знайдемо, чому дорівнюватиме натяг нитки, коли камінь рухається по колу, яке лежить у вертикальній площині (рис. 3б). Щоб знайти натяг T нитки, застосуємо принцип Д'Аламбера, тобто прикладемо до каменя нормальну силу інерції F_n^{in} і дотичну силу інерції F_t^{in} . Спроекуємо всі сили на напрям нитки, тоді

$$T - G \cdot \cos \lambda - F_n^{in} = 0,$$

звідки

$$T = F_n^{in} + G \cdot \cos \lambda = \frac{m \cdot V^2}{R} + G \cdot \cos \lambda.$$

Натяг нитки буде максимальним, коли $\alpha = 0$, тобто коли камінь буде в нижньому положенні:

$$T_{\max} = \frac{m \cdot V^2}{R} + G.$$

Натяг нитки буде мінімальним, коли $\alpha = \pi$ рад, тобто коли камінь буде вгорі:

$$T_{\min} = \frac{m \cdot V^2}{R} - G.$$

Зазначимо, що під впливом сили тяжіння каменя модуль його швидкості V змінюватиметься і досягне найменшого значення у верхньому положенні, а найбільшого – в нижньому.

Приклад розв'язку задачі

Для механізму, вказаному на рис. 4, який складається з вантажу 3 та чотирьох ступінчастих зубчастих коліс, за заданим законом зміни швидкості вантажу $V_3 = 10 \cdot (t^3 + 4 \cdot t^2)$ знайти в момент часу $t_1 = 1$ с за $G = 280$ Н, $R_1 = 10$ см, $r_1 = 5$ см, $R_2 = 25$ см, $r_2 = 24$ см: швидкості і прискорення точок А і В та вантажу 3; кутові швидкості та прискорення ступінчастих коліс 1 та 2 механізму; натяг шнуру до якого підвішений вантаж. Масою шнура і тертям у ланках механізму знехтувати.

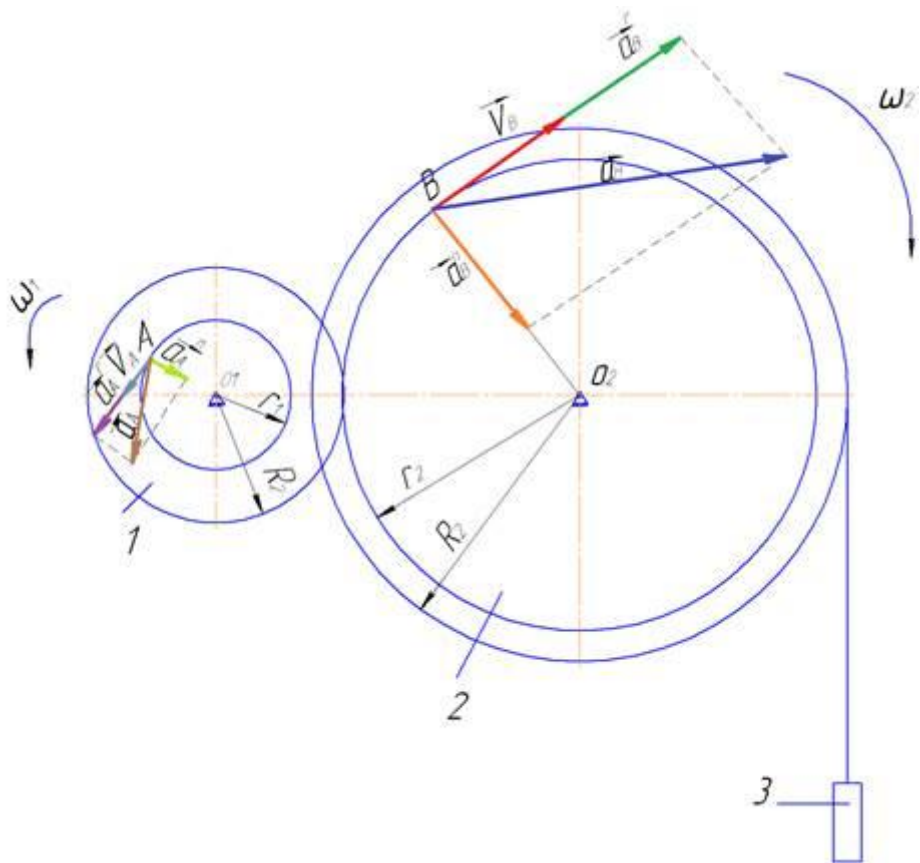


Рис. 4

1) Визначаємо швидкість і прискорення вантажу 3

За умовою $V_3 = 10 \cdot (t^3 + 4 \cdot t^2)$ за $t_1 = 1$ с; швидкість вантажу $V_3 = 10 \cdot (1^3 + 4 \cdot 1^2) = 50$ см/с, вантаж рухається прямолінійно, тому прискорення вантажу 3 дорівнює:

$$a_3 = \frac{dV_3}{dt} = (10 \cdot t^3 + 40 \cdot t^2)' = 30 \cdot t^2 + 80 \cdot t;$$

за $t_1 = 1$ с

$$a_3 = 110 \text{ см/с}^2.$$

2) Кутова швидкість колеса 2 дорівнює:

$$\omega_2 = \frac{V_3}{R_2} = \frac{10(t^3 + 4 \cdot t^2)}{25} = 0,4 \cdot (t^3 + 4 \cdot t^2);$$

за $t_1 = 1$ с

$$\omega_2 = 2 \text{ рад/с}.$$

3) Кутове прискорення колеса 2 дорівнює:

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{0,4 \cdot (t^3 + 4 \cdot t^2)}{dt} = (0,4 \cdot t^3 + 1,6 \cdot t^2)' = 1,2 \cdot t^2 + 3,2 \cdot t;$$

за $t_1 = 1$ с

$$\varepsilon_2 = 4,4 \text{ рад/с}^2.$$

4) Визначимо передаточне число механізму

$$u_{1-2} = \frac{r_2}{R_1} = \frac{24}{10} = 2,4;$$

тоді кутова швидкість колеса 1.

$$\omega_1 = \omega_2 \cdot u_{1-2} = 0,4 \cdot (t^3 + 4 \cdot t^2) \cdot 2,4 = 0,96 \cdot (t^3 + 4 \cdot t^2),$$

за $t_1 = 1$ с

$$\omega_1 = 4,8 \text{ рад/с}.$$

5) Кутове прискорення колеса 1 дорівнює:

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = [0,96 \cdot (t^3 + 4 \cdot t^2)]' = 2,88 \cdot t^2 + 7,68 \cdot t,$$

за $t_1 = 1$ с

$$\varepsilon_1 = 10,56 \text{ рад/с}^2.$$

6) Швидкість точки А $V_A = \omega_1 \cdot r_1 = 4,8 \cdot 5 = 2,25 \text{ см/с};$

7) Прискорення точки А дорівнює:

$$a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^{\tau})^2} = \sqrt{115,2^2 + 52,8^2} = 126,7 \text{ см/с}^2,$$

де

$$a_A^n = \omega_1^2 \cdot r_1 = 4,8^2 \cdot 5 = 115,2 \text{ см/с}^2 \text{ — нормальна складова прискорення;}$$

$$a_A^{\tau} = \varepsilon_1 \cdot r_1 = 10,56 \cdot 5 = 52,8 \text{ см/с}^2 \text{ — дотична складова прискорення.}$$

8) Швидкість точки В

$$V_B = \omega_2 \cdot r_2 = 2 \cdot 24 = 48 \text{ см/с};$$

Прискорення точки В дорівнює:

$$a_B = \sqrt{(a_B^n)^2 + (a_B^{\tau})^2} = \sqrt{96^2 + 105,6^2} = 142,7 \text{ см/с}^2,$$

$$\text{де } a_B^n = \omega_2^2 \cdot r_2 = 2^2 \cdot 24 = 96 \text{ см/с}^2 \text{ — нормальна складова прискорення;}$$

$$a_B^{\tau} = \varepsilon_2 \cdot r_2 = 4,4 \cdot 24 = 105,6 \text{ см/с}^2 \text{ — дотична складова прискорення.}$$

Напрями швидкостей і прискорень показані на рис. 4.

9) До вантажу прикладаємо активні сили і реакції зв'язків: сила тяжіння G спрямована вертикально донизу, реакція шнура N чисельно дорівнює його натягу і спрямована вертикально догори. Умовно прикладемо до цих сил силу інерції $F_{\text{ін}}$ спрямовану протилежно прискоренню вантажу тобто вертикально догори (рис. 5).



Рис. 5

10) Складаємо рівняння рівноваги.

$$\sum F_y = N + F_{\text{ін}} - G = 0;$$

$$N = G - F_{\text{ін}} = 220 - 24,2 = 195,8 \text{ Н},$$

де

$$F_{\text{ін}} = \frac{G}{g} \cdot a_3 = \frac{220}{10} \cdot 1,1 = 24,2 \text{ Н}.$$

Відповідь: $V_3 = 50 \text{ см/с}$, $\omega_2 = 2 \text{ рад/с}$, $\varepsilon_2 = 4,4 \text{ рад/с}^2$, $\omega_1 = 4,8 \text{ рад/с}$,
 $\varepsilon_1 = 10,56 \text{ рад/с}^2$, $V_A = 2,25 \text{ см/с}$, $V_B = 48 \text{ см/с}$, $a_A = 126,7 \text{ см/с}^2$, $a_B = 142,7 \text{ см/с}^2$,
 $N = 195,8 \text{ Н}$.

Запитання для самоконтролю

1. Що називають силою інерції?
2. За якого руху виникає сила інерції?
3. Чому дорівнює сила інерції за руху тіла по криволінійній траєкторії?
4. У чому полягає суть методу кінетостатики?

Тема 1.11. Робота і потужність

План

1. Робота сталої сили за прямолінійного руху. Робота рівнодійної, робота сили тяжіння, робота сили пружності. Робота сталої сили, прикладеної до обертового тіла
2. Потужність. Поняття про механічний коефіцієнт корисної дії

1. Робота сталої сили за прямолінійного руху. Робота рівнодійної, робота сили тяжіння, робота сили пружності. Робота сталої сили, прикладеної до обертового тіла

Розглянемо матеріальну точку M , до якої прикладено силу F . Нехай точка перемістилася прямолінійно з положення M_0 у положення M_1 і пройшла при цьому шлях S (рис. 1).

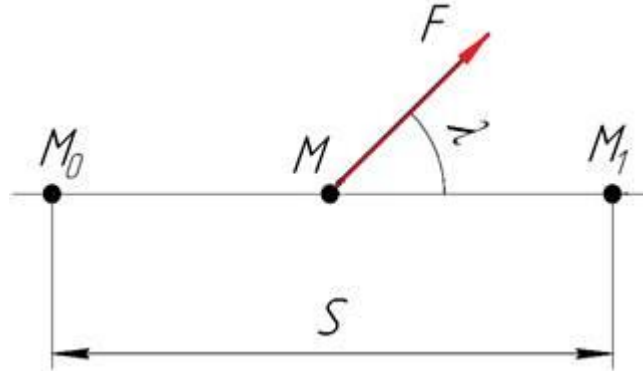


Рис. 1

Робота – це міра дії сили, прикладеної до матеріальної точки під час її переміщення. Робота сили дорівнює добутку її модуля на шлях і на косинус кута між напрямками сили і переміщення.

$$A = F \cdot S \cdot \cos \lambda$$

Робота – величина скалярна.

Розглянемо три окремих випадки обчислення роботи:

1) $\lambda = 0^\circ$, тоді $A = F \cdot S$; 2) $\lambda = 90^\circ$, тоді $W = 0$; 3) $\lambda = 180^\circ$, тоді $A = -F \cdot S$.

Виходить, що робота буде **додатною**, якщо напрямки сили і переміщення збігаються ($\lambda < 90^\circ$); вона буде **від'ємною**, коли напрям сили протилежний до напрямку переміщення ($\lambda > 90^\circ$); робота **дорівнює нулю**, коли напрямки сили і переміщення взаємно перпендикулярні. Сили, які виконують додатну роботу, називають **рушійними силами**, а ті, що виконують від'ємну роботу, – **силами опору**. Одиниця роботи:

$[A] = [F] \cdot [S]$ – сила $\times$ довжина = ньютон $\times$ метр (Нм) = джоуль (Дж).

Джоуль – це робота сили в один ньютон на шляху в один метр (коли напрямки сили і переміщення збігаються).

На нескінченно малій ділянці ds криволінійний шлях можна вважати прямолінійним, а силу – сталою. Тоді елементарна робота dA на шляху ds дорівнюватиме:

$$dA = F \cdot ds \cdot \cos(F, V).$$

Робота наприкінці переміщення дорівнюватиме сумі елементарних робіт:

$$A = \int_0^s F \cdot ds \cdot \cos(F, V).$$

Теорема. *Робота рівнодіючої сили на якійсь ділянці шляху дорівнює алгебраїчній сумі робіт складових сил на тій самій ділянці шляху.*

$$A_R = \sum A_n$$

Теорема. *Робота сили тяжіння не залежить від виду траєкторії і дорівнює добутку модуля сили на вертикальне переміщення точки її прикладання.*

$$A = G \cdot h$$

Коли тіло піднімається вгору, то робота сили тяжіння буде від'ємною, коли тіло рухається донизу – додатною, а коли тіло рухається на горизонтальній поверхні, то робота сили тяжіння дорівнює нулю.

Робота сталої сили, прикладеної до обертового тіла, дорівнює добутку обертового моменту на кутове переміщення.

$$A = M \cdot \varphi$$

2. Потужність. Поняття про механічний коефіцієнт корисної дії

Робота будь-якої сили може тривати різні проміжки часу. Щоб визначити швидкість виконання роботи, в механіці введено поняття потужності.

Потужністю сили називають роботу, виконану протягом одиниці часу. Якщо робота відбувається рівномірно, то потужність визначається за формулою:

$$P = \frac{A}{t}.$$

Коли напрями сили і переміщення збігаються, формулу потужності можна записати:

$$P = \frac{A}{t} = \frac{F \cdot S}{t} = F \cdot V.$$

Потужність сили дорівнює добутку модуля сили на швидкість точки її прикладання.

У технічній системі одиниць одиницею потужності є **1 кГм/с** – потужність сили, що виконує протягом 1 секунди роботу в 1 кГм.

У Міжнародній системі одиниць за одиницю потужності взято **ват (Вт)** – потужність сили, що виконує протягом 1 секунди роботу в 1 джоуль.

Використовується інша одиниця потужності **кінська сила**.

1 кінська сила – це потужність, яку затрачують на підняття вантажу 75 кг на висоту 1 м за 1 секунду.

$$1 \text{ кВт} = 1,36 \text{ к.с.}; \quad 1 \text{ к.с.} = 0,735 \text{ кВт}.$$

Якщо роботу виконує сила, прикладена до обертового тіла, яке рухається рівномірно, то потужність обчислюють за формулою:

$$P = M \cdot \omega .$$

Потужність сили, прикладеної до обертового тіла, дорівнює добутку обертового моменту на кутову швидкість.

Здатність тіла виконувати роботу під час переходу від одного стану до іншого називають **енергією**. Енергія – це загальна міра різних форм руху матерії(рис.2).

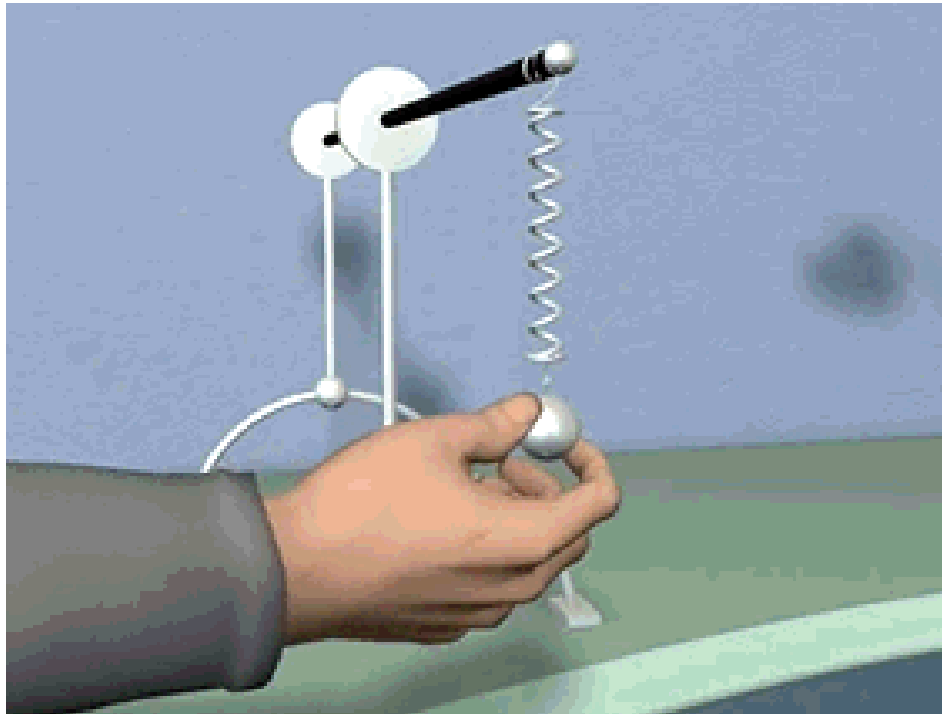


Рис.2. Пружинний маятник, що демонструє перехід потенціальної енергії в кінетичну і навпаки

Під час передавання або перетворення енергії, а також під час виконання роботи неминучі втрати енергії. У процесі передавання руху або виконання роботи рушійні сили механізмів і машин перемагають сили опору, які поділяють на *сили корисного опору і сили шкідливого опору*. Втрати на подолання сил шкідливого опору неминучі в усіх механізмах і машинах; це зумовлюють сили тертя і опору навколишнього середовища.

Відносну кількість енергії, яку використовують у машині за прямим призначенням, характеризують *коефіцієнтом корисної дії* (ККД) і позначають

Коефіцієнтом корисної дії називають відношення корисної роботи (або потужності) до затраченої:

$$\eta = \frac{A_k}{A} = \frac{P_k}{P} .$$

Якщо коефіцієнт корисної дії враховує тільки механічні втрати, то його називають **механічним ККД**. ККД – завжди правильний дріб, його

іноді подають у відсотках. Що ближче ККД до одиниці, то продуктивніша машина.

Якщо ряд механізмів з'єднано послідовно, тобто кожний наступний механізм рухається ведучою ланкою попереднього механізму, то загальний ККД дорівнюватиме добутку ККД усіх механізмів:

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \dots \cdot \eta_n.$$

Запитання для самоконтролю

1. Дайте визначення роботи.
2. За якою формулою визначають роботу сили на деякому переміщенні?
3. У яких випадках робота сили додатна, від'ємна і дорівнює нулю?
4. Сформулюйте теорему про роботу рівнодійної.
5. Що називають потужністю сили?
6. Як визначають роботу і потужність за обертального руху?
7. Що називають механічним коефіцієнтом корисної дії?

Тема 1.12. Загальні теореми динаміки

План

1. Імпульс сили, кількість руху матеріальної точки. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки
2. Кінетична енергія матеріальної точки. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки

1. Імпульс сили, кількість руху матеріальної точки. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки

Загальні теореми динаміки матеріальної точки встановлюють залежність між зміною динамічних мір руху матеріальної точки і мірами дії сил, прикладених до цієї точки.

Кількість руху $m \cdot v$ матеріальної точки – це вектор, який дорівнює добутку маси точки на її швидкість і має напрям швидкості.

Кількість руху – це динамічна міра руху матеріальної точки.

Одиниця кількості руху $[m \cdot V] = [m] \cdot [V] = \text{кг} \cdot \text{м/с}$.

Імпульсом сталої сили $F \cdot t$ називають вектор, який дорівнює добутку сили на час її дії. Імпульс сили – це міра її дії у часі.

Одиниця імпульсу сили $[F \cdot t] = [F] \cdot [t] = [m] \cdot [a] \cdot [t] = (\text{кг} \cdot \text{м/с}^2) \cdot \text{с} = \text{кг} \cdot \text{м/с}$ (рис.1).



Ялєкѳ

Рис.1. Колиска Ньютона —
це пристрій, що демонструє закон збереження імпульсу та енергії

Кількість руху і імпульс сили мають однакові одиниці. Зв'язок між ними встановлює **теорема про зміну кількості руху**, яка формулюється так: **зміна кількості руху матеріальної точки за якийсь проміжок часу дорівнює імпульсу прикладеної до неї сили за той самий проміжок часу**.

Доведемо цю теорему для випадку прямолінійного руху матеріальної точки під дією сталої сили F . Оскільки такий рух буде рівнозмінім, то його швидкість визначається формулою:

$$V = V_0 + a \cdot t$$

Перенесемо V_0 у ліву частину і помножимо обидві частини рівності на масу m матеріальної точки:

$$m \cdot V - m \cdot V_0 = m \cdot a \cdot t = F \cdot t$$

У лівій частині рівності маємо зміну кількості руху за час t , а в правій — імпульс сили за той самий проміжок часу, що й треба було довести. Якщо рух сповільнений ($V < V_0$), то вектор сили спрямований протилежно до вектора швидкості, тому в останню формулу силу треба підставляти з від'ємним знаком.

Для випадку криволінійного руху матеріальної точки під дією змінної за модулем і напрямом сили час t можна розбити на нескінченно малі проміжки, в межах яких вектор сили можна вважати сталим, а шлях – прямолінійним. Тоді імпульс сили за скінченний проміжок часу t дорівнюватиме сумі елементарних імпульсів. При цьому математичний вираз теореми про зміну кількості руху матиме вигляд:

$$m \cdot V - m \cdot V_0 = \int_0^t F \cdot dt$$

Якщо до матеріальної точки прикладено кілька сталих сил, то зміна кількості руху дорівнюватиме сумі (алгебраїчній, коли сили діють по одній прямій, або векторній, коли сили діють під кутом одна до одної) імпульсів даних сил:

$$m \cdot V - m \cdot V_0 = \sum (Ft)$$

2. Кінетична енергія матеріальної точки. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки

Механічною енергією називають енергію переміщення і взаємодії тіл. Механічну енергію поділяють на кінетичну і потенціальну.

Кінетичною енергією, або енергією руху, називають енергію, яку має будь-яка матеріальна точка під час руху. Кінетична енергія – це динамічна міра руху матеріальної точки.

Кінетична енергія матеріальної точки дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості:

$$E_k = \frac{m \cdot V^2}{2}$$

Кінетична енергія – величина скалярна і завжди додатна. Одиниці кінетичної енергії: Дж.

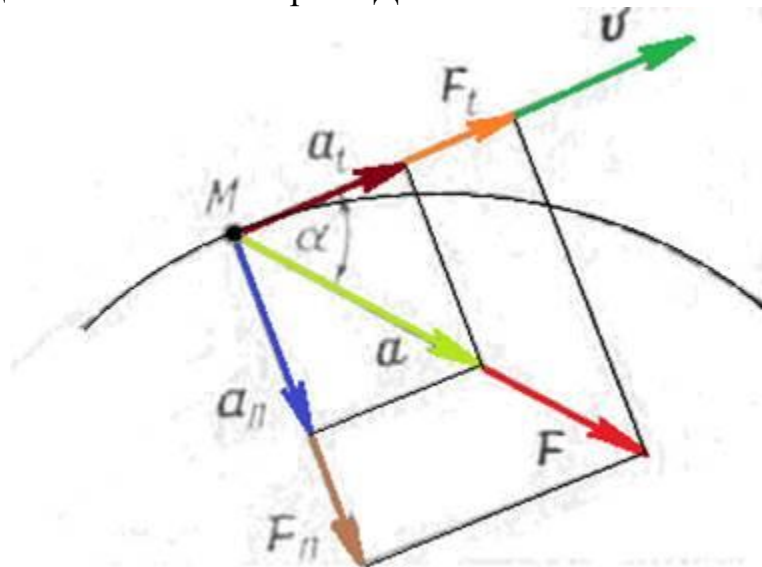


Рис. 1

Кінетична енергія має розмірність роботи. Зв'язок між кінетичною енергією і роботою встановлює *теорема про зміну кінетичної енергії*, яка формулюється так: *зміна кінетичної енергії матеріальної точки на якомусь відрізку шляху дорівнює роботі сили, прикладеної до точки на тому самому відрізку шляху.*

Доведемо цю теорему для випадку криволінійного руху матеріальної точки під дією змінної сили. Запишемо для цієї точки основне рівняння динаміки:

$$m \cdot a = F ,$$

де: F – сила, яка діє на точку;

a – повне прискорення точки;

m – маса точки.

Спроектуємо цю векторну рівність на напрям швидкості V точки:

$$m \cdot a \cdot \cos \lambda = F \cdot \cos \lambda ;$$

як відомо з кінематики

$$a \cdot \cos \lambda = a_t = \frac{dV}{dt} .$$

Помножимо обидві частини рівності на нескінченно мале переміщення ds , дістанемо:

$$m \cdot \frac{dV}{dt} \cdot ds = m \cdot dV \cdot \frac{ds}{dt} = m \cdot V \cdot dV ; \quad m \cdot V \cdot dV = F \cdot \cos \lambda \cdot ds .$$

Проінтегруємо обидві частини цієї рівності

$$m \int_{V_0}^V V \cdot dV = \int_0^s F \cdot \cos \lambda \cdot ds ,$$

тоді

$$\frac{m \cdot V^2}{2} - \frac{m \cdot V_0^2}{2} = A .$$

Якщо до матеріальної точки прикладено кілька сил, то зміна кінетичної енергії дорівнюватиме алгебраїчній сумі робіт цих сил:

$$\frac{m \cdot V^2}{2} - \frac{m \cdot V_0^2}{2} = \sum A_{F_i}$$

Запитання для самоконтролю

1. Дайте визначення імпульсу сили та кількості руху.
2. Сформулюйте теорему про зміну кількості руху.
3. Що називають кінетичною енергією?
4. За якою формулою визначають кінетичну енергію?
5. Сформулюйте теорему про зміну кінетичної енергії.

6. В яких одиницях вимірюють імпульс сили, кількість руху та кінетичну енергію?

Тема 1.13. Елементи динаміки системи

План

1. Система матеріальних точок. Внутрішні і зовнішні сили. Момент інерції твердого тіла
2. Основне рівняння динаміки для обертального руху твердого тіла
3. Кінетична енергія твердого тіла за поступального, обертального і плоскопаралельного руху

1. Система матеріальних точок. Внутрішні і зовнішні сили. Момент інерції твердого тіла

Сукупність матеріальних точок, які взаємодіють між собою, називають механічною системою матеріальних точок. Будь-яке тверде тіло можна вважати незмінною механічною **системою матеріальних точок**. Сили взаємодії точок цієї системи називають **внутрішніми**; сили, з якими діють на цю систему інші точки, що не належать до цієї системи, – **зовнішніми**.

Всі формули динаміки точки застосовні до тіла, яке рухається поступально.

Рівняння поступального руху твердого тіла нічим не відрізняється від основного рівняння динаміки точки:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a},$$

де m – маса тіла, яка є мірою інертності тіла за поступального руху.

За обертального руху твердого тіла мірою його інертності є момент інерції тіла відносно осі обертання. **Момент інерції** тіла відносно осі – це сума добутків мас матеріальних точок, які утворюють це тіло, на квадрат відстаней їх до цієї осі

$$J = \sum (m_i \cdot r_i^2).$$

Одиниця вимірювання моменту інерції $\text{кг} \cdot \text{м}^2$.

Суттєва відмінність осьового моменту інерції тіла від його маси полягає в тому, що маса тіла є для нього величиною постійною, тоді як момент інерції тіла залежить не тільки від самої оберткової маси, але й від розподілу цієї маси відносно осі обертання.

Моменти інерції деяких однорідних тіл:

- 1) момент інерції тонкого однорідного стрижня завдовжки l і масою m :

$$J = \frac{1}{3} ml^2;$$

2) момент інерції круглого однорідного циліндра радіусом R і масою m :

$$J = \frac{1}{2} m R^2 .$$

Теорема Гюйгенса: Момент інерції тіла відносно даної осі дорівнює моменту інерції тіла відносно осі, що їй паралельна і проходить через центр маси тіла, плюс добуток маси всього тіла на квадрат відстані між осями.

$$J_1 = J + m d^2$$

2. Основне рівняння динаміки для обертального руху твердого тіла

Для тіла яке обертається навколо нерухомої осі основне рівняння динаміки має вигляд:

$$M_{об} = J \cdot \varepsilon .$$

Обертальний момент дорівнює добуткові моменту інерції тіла відносно осі обертання на кутове прискорення.

Величина $M_{об}$ може залежати від φ і t . Якщо $M_{об}=0$, то $\omega=const$, тобто тіло обертається рівномірно. Якщо $M_{об}=const$, то $\varepsilon=const$, тобто тіло обертається рівнозмірно.

3. Кінетична енергія твердого тіла за поступального, обертального і плоскопаралельного руху

Кінетична енергія твердого тіла дорівнює сумі кінетичних енергій матеріальних точок, які утворюють це тіло:

$$E_k = \frac{\sum (m_i \cdot V^2)}{2} .$$

Обчислимо кінетичну енергію твердого тіла для трьох випадків руху.

1) Тіло рухається поступально

Оскільки в поступальному русі усі точки тіла рухаються з однаковими швидкостями, його швидкість обчислюється за тією самою формулою, що й кінетична енергія матеріальної точки:

$$E_{пос.} = \frac{m \cdot V_c^2}{2} .$$

Кінетична енергія тіла за поступального руху дорівнює половині добутку маси тіла на квадрат швидкості руху центра мас.

2) Тіло обертається навколо нерухомої осі

$$E_{\text{ос.}} = \frac{\sum (m_i \cdot V_i^2)}{2} = \frac{\sum [m_i \cdot (\omega \cdot r_i)^2]}{2} = \left(\frac{\omega^2}{2}\right) \cdot \sum (m_i \cdot r_i^2)$$

$$E_{\text{ос.}} = \frac{J \cdot \omega^2}{2}$$

Кінетична енергія твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, дорівнює половині добутку моменту інерції тіла відносно осі обертання на квадрат його кутової швидкості.

3) Тіло рухається плоскопаралельно

$$E_m = \frac{m \cdot V_c^2}{2} + \frac{J_c \cdot \omega^2}{2}$$

Кінетична енергія твердого тіла, яке рухається плоскопаралельно, дорівнює сумі кінетичних енергій у поступальному русі разом з центром ваги і обертальному русі навколо центральної осі, перпендикулярної до основної площини.

Теорема про зміну кінетичної енергії системи тіл: зміна кінетичної енергії системи тіл за деякого переміщення дорівнює алгебраїчній сумі робіт усіх зовнішніх і внутрішніх сил, які діяли на систему під час переміщення.

$$\sum E - \sum E_0 = \sum A$$

Кінетична енергія системи тіл дорівнює сумі кінетичних енергій кожного тіла окремо. Якщо тіло тверде, то сума робіт його внутрішніх сил дорівнює нулю.

Запитання для самоконтролю

1. Що називають системою матеріальних точок?
2. Які сили називають зовнішніми, а які внутрішніми?
3. Що називають моментом інерції тіла?
4. За якою формулою визначають момент інерції тонкого однорідного стрижня і круглого однорідного циліндра?
5. Сформулюйте теорему Гюйгенса про момент інерції відносно паралельних осей.
6. Який вигляд має основне рівняння динаміки для обертального руху твердого тіла?
7. Чому дорівнює кінетична енергія за поступального руху тіла?
8. Чому дорівнює кінетична енергія за обертального руху тіла?
9. Чому дорівнює кінетична енергія за плоскопаралельного руху тіла?
10. Сформулюйте теорему про зміну кінетичної енергії системи тіл.

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

Тема 2.1. Основні положення

План

1. Завдання й методи механіки матеріалів. Деформоване тіло.
Пружність і пластичність. Попередні поняття про розрахунки на міцність, жорсткість і стійкість
2. Класифікація навантажень
3. Основні гіпотези і припущення
4. Метод перерізів. Основні види навантаження (деформації) бруса.
Напруження повне, нормальне, дотичне

1. Завдання й методи механіки матеріалів. Деформоване тіло. Пружність і пластичність. Попередні поняття про розрахунки на міцність, жорсткість і стійкість

Механіка матеріалів і конструкцій із моменту свого виникнення завжди була тісно пов'язана з практикою. Виробнича експлуатація машин і засобів механізації постійно висуває все нові завдання, розв'язання яких сприяє розвитку науки про механіку матеріалів і конструкцій, що в свою чергу сприяє розвитку науково-технічного прогресу.

Завданням науки про механіку матеріалів і конструкцій є створення наукових основ для прикладних розрахунків окремих частин конструкцій і механізмів машин із урахуванням їх надійності та ресурсозбереження.

Розрахунок під час проектування забезпечує створення надійних, міцних та легких конструкцій.

Значно ускладнювалося би завдання під час конструювання машин і механізмів, коли б доводилося розв'язувати кожне питання шляхом експериментування.

Однак, було б помилковим вважати, що механіка матеріалів і конструкцій – це суто теоретична наука. Оскільки ця наука має справу з міцністю і жорсткістю реальних елементів і систем, виготовлених із існуючих конструктивних матеріалів, методи науки про механіку матеріалів і конструкцій мають ґрунтуватися на вивченні та пізнанні справжніх властивостей цих матеріалів, тобто на відповідно поставлених експериментах.

Таким чином, механіка матеріалів і конструкцій є не тільки теоретичною, а й експериментальною наукою, її теоретичні положення засновані на законах механіки твердого тіла: на умовах рівноваги, законах додавання сил, теоремах про моменти сил, на принципі можливих переміщень і т. інше. Разом із тим розв'язок будь-якої задачі механіки

матеріалів і конструкцій починається з припущень, які ґрунтуються на наслідках експериментальних досліджень, і закінчується перевіркою одержаних результатів розрахунків у лабораторії.

Реальні тіла внаслідок дії зовнішніх сил змінюють свою форму та розміри.

Зміна форми та розмірів тіла називається **деформацією**.

Деформація, яка зникає повністю після припинення дії зовнішніх сил, називається **пружною**. Деформація, яка після припинення дії зовнішніх сил не зникає, називається **залишковою**. Залишкові деформації в елементах машин і споруд, як правило, не допускаються. Під час проектування елементів конструкцій їх розміри мають бути такими, щоб не виникали залишкові деформації.

Здатність тіл відновлювати свою початкову форму і розміри після припинення дії зовнішніх сил називається **пружністю**.

Відомо, що в природі немає зовсім пружних тіл, тобто таких, у яких після припинення дії зовнішніх сил повністю зникають деформації.

Проте деякі матеріали (сталь, дерево та ін.), за своїми властивостями подібні до таких тіл, якщо зовнішні сили не перевершують певної границі (границі пружності), встановленої для них дослідним шляхом. Перевищення цієї границі веде до виникнення залишкових деформацій.

Конструювання та розрахунок механізмів, деталей машин або інженерних споруд тісно пов'язані між собою. Тобто, конструювання передбачає детальне розроблення задуму, ідеї у вигляді креслеників певних конструкцій, що мають бути виготовлені з обраних конструкційних матеріалів, а метою розрахунку конструкцій є ретельна **перевірка їх на міцність, жорсткість і стійкість**.

Міцність – це здатність матеріалу конструкції і їх елементів чинити опір дії зовнішніх сил без появи пластичних деформацій і руйнування.

Розрахунки на міцність дають змогу визначити розміри і форму деталі, що визначають задане навантаження за найменших витрат матеріалів.

Жорсткість – це здатність тіла або конструкції протидіяти деформації.

Розрахунки на жорсткість гарантують, що зміни форми і розмірів конструкції і їх елементів не перевищать допустимих норм.

Стійкість – це здатність конструкції протидіяти зусиллям, які намагаються вивести її з початкового стану рівноваги.

Розрахунки на стійкість запобігають можливості раптової втрати стійкості і викривлення довгих або тонких деталей.

Механіка матеріалів і конструкцій – це наука про міцність окремих частин конструкцій і машин, яка ґрунтується на результатах набуток практичного досвіду із використанням сучасних методів моделювання.

2. Класифікація навантажень

Зовнішні сили, які діють на конструкцію класифікують за кількома ознаками.

1. Залежно від місця прикладання:

- поверхневі сили, які діють на поверхні елемента (тиск рідини на стінки гідравлічного циліндра механізму навіски енергетичного засобу);
- об'ємні сили, прикладені до кожної точки об'єму елемента (сили ваги добрив у бункері розкидача, інерційні сили).

2. Залежно від розміру площі дії:

- зосереджені сили, що діють на площу, розмір якої малий порівняно з величиною елемента (тиск колеса вагона на рейку);
- розподілені навантаження, які безперервно діють на деяку площу елемента (тиск води на греблю).

3. Залежно від тривалості дії:

- постійні навантаження, які діють протягом всього часу роботи конструкції (власна вага конструкції);
- тимчасові навантаження, які діють лише певний час (вага автомобіля, який проїжджає на мосту).

4. За характером дії:

- статичні сили, які, діючи на елемент, зростають поступово від нуля до кінцевої величини;
- динамічні сили, дія яких спричиняє в елементах значні прискорення; до них належать інерційні, ударні, повторно-періодичні та вибухові сили.

3. Основні гіпотези і припущення

Під час вивчення напруженого стану реальних тіл виникають труднощі, зумовлені різноманітністю фізичних і механічних властивостей матеріалів. У зв'язку з цим теорію розрахунку доводиться будувати на певних гіпотезах і припущеннях.

Основні гіпотези і припущення

1. *Гіпотеза плоских перерізів.* Плоскі перерізи, проведені в тілі до деформації, залишаються плоскими і після деформації.

2. *Гіпотеза про суцільність тіл.* Весь об'єм тіл суцільно заповнений речовиною або матерією.

3. *Припущення про малість деформацій.* Деформації тіл, зумовлені дією зовнішніх сил, малі порівняно з їх розмірами, тобто тіла незначно змінюють свою форму, що дає можливість застосувати принцип незалежності дії сил та інші теореми механіки твердого тіла.

4. *Припущення про однорідність тіл.* Фізичні та механічні властивості тіла в усіх точках і за всіма напрямками однакові. Однорідні тіла (матеріали), які мають однакові фізичні та механічні властивості за всіма напрямками,

називають ізотропними. Тіла, які не мають властивостей ізотропності, називають анізотропними. До них можна віднести деревину і синтетичні матеріали.

5. *Принцип Сен-Венана.* У точках тіла, досить віддалених від місць прикладання навантажень, внутрішні сили майже не залежать від способу прикладання сил. Цей принцип дає змогу спростити розрахунки, замінюючи одну систему сил її еквівалентною, але легко визначеною з умов рівноваги.

6. *Принцип незалежності дії сил.* Результат дії на тіло системи сил дорівнює сумі результатів дії тих самих сил, які прикладаються до тіла, причому в будь-якому порядку.

4. Метод перерізів. Основні види навантаження (деформації) бруса. Напруження повне, нормальне, дотичне

Для розрахунків деталей машин і споруд на міцність потрібно знати внутрішні сили пружності, які виникають як результат дії прикладених до деталей зовнішніх сил. Виникнення внутрішніх сил супроводжується деформацією матеріалу. Ці сили протидіють зовнішнім силам і намагаються відновити попередню форму тіла.

Під час визначення внутрішніх сил користуються методом перерізів.

Метод перерізів полягає в тому, що тіло уявно розрізають площиною (рис. 1) на дві частини, будь-яку з них відкидають і замість неї до перерізу залишеної частини прикладають внутрішні сили, які діяли до розрізання; залишену частину розглядають як самостійне тіло, яке перебуває в рівновазі під дією зовнішніх і прикладених до перерізу внутрішніх сил.

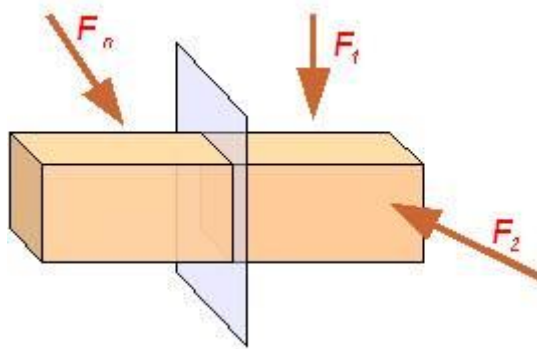


Рис. 1

Очевидно, що за третім законом Ньютона (аксіома взаємодії) внутрішні сили, які діють у перерізі залишеної і відкинутої частин тіла, однакові за модулем, але протилежні за напрямком. Таким чином, розглядаючи рівновагу будь-якої з двох частин розрізаного тіла, дістанемо одне й те саме значення внутрішніх сил, але зручніше розглядати ту частину тіла, для якої рівняння рівноваги будуть простіші.

У загальному випадку навантаження на залишену частину тіла діє просторова система сил. Для визначення внутрішніх сил можна скласти шість рівнянь рівноваги, із кожного із них визначити по одному невідомому. Можна зробити висновок, що внутрішні сили еквівалентні шести внутрішнім силовим факторам.

Шість внутрішніх силових факторів, які виникають у поперечному перерізі бруса в загальному випадку (рис. 2), мають назви: N – поздовжня сила, Q_x , Q_y – поперечні сили, M_k – крутний момент, M_{zx} , M_{zy} – згинальні моменти.

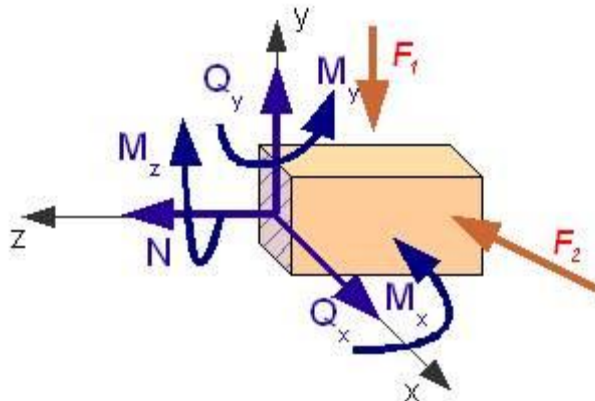


Рис. 2

За різних деформацій у поперечному перерізі бруса виникають різні внутрішні силові фактори. Розглянемо окремі випадки.

1. У перерізі виникає лише поздовжня сила N . У цьому випадку буває деформація розтягу (якщо сила N спрямована від перерізу) або деформація стиску (якщо сила N спрямована до перерізу).

2. У перерізі виникає лише поперечна сила Q . У цьому випадку буває деформація зсуву.

3. У перерізі виникає лише крутний момент M_k . Тоді буває деформація кручення.

4. У перерізі виникає лише згинальний момент M_z . Тоді буває деформація чистого згину. Якщо в перерізі одночасно виникає згинальний момент M_z і поперечна сила Q , то згин називають поперечним.

Якщо в перерізі одночасно виникає кілька внутрішніх силових факторів (наприклад, згинальний і крутний моменти або згинальний момент і поздовжня сила), то в цих випадках трапляється поєднання основних деформацій.

Поряд з поняттям деформації одним з основних понять опору матеріалів є напруга. Напруга характеризує інтенсивність внутрішніх сил, які діють у перерізі.

Напруга – це внутрішня сила, віднесена до одиниці площі перерізу.

$$p = \frac{N}{A} = \frac{\text{сила}}{\text{площа}} = \frac{H}{m^2} = Pa(\text{паскаль})$$

Оскільки Па дуже мала одиниця напруги, то використовують МПа (мегапаскаль):

$$1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па} = 1 \text{ Н/мм}^2.$$

Напруга – величина векторна.

Вектор повної напруги p розкладається на дві складові:

σ – нормальну напругу, перпендикулярну до площини перерізу;

τ – дотичну напругу, таку, що лежить у площині перерізу.

Модуль повної напруги визначається за формулою $p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$.

Розкладання повної напруги на нормальну і дотичну має цілком визначений фізичний смисл. У поперечних перерізах бруса у випадку розтягу, стиску і чистого згину діють тільки нормальні напруги, а в разі зсуву і кручення – тільки дотичні.

Напруги, за яких матеріал руйнується, називаються **границею міцності**.

Запитання для самоконтролю

1. Укажіть основні завдання і методи механіки матеріалів і конструкцій.
2. Що називають деформацією?
3. Які існують деформації?
4. Що таке пружність і які деформації називають пружними?
5. Що називають міцністю?
6. Що називають жорсткістю?
7. Що називають стійкістю?
8. Сформулюйте гіпотезу про суцільність тіл.
9. Сформулюйте припущення про малість деформацій.
10. Сформулюйте припущення про однорідність тіл.
11. Сформулюйте принцип Сен-Венана.
12. Сформулюйте принцип незалежності дії сил.
13. З якими ознаками класифікують зовнішні сили?
14. У чому полягає суть методу перерізів?
15. Які внутрішні силові фактори виникають у поперечних перерізах бруса?
16. Що називають напругою?
17. На які напруги розкладається повна напруга?

Тема 2.2. Розтяг і стиск

План

1. Поздовжні сили та їх епюри

2. Нормальні напруження в поперечних перерізах та їх епюри
3. Поздовжні та поперечні деформації під час розтягу (стиску). Закон Гука. Модуль поздовжньої пружності, коефіцієнт поперечної деформації (коефіцієнт Пуассона). Жорсткість перерізів та жорсткість бруса під час розтягу і стиску. Визначення осьових переміщень поперечних перерізів бруса
4. Експериментальне дослідження розтягу й стиску матеріалів
5. Коефіцієнт запасу міцності за статичного навантаження на границі міцності та границі текучості
6. Допустимі напруження. Розрахунки на міцність: перевірка міцності, визначення допустимого навантаження, визначення необхідних розмірів поперечного перерізу

1. Поздовжні сили та їх епюри

Центральний розтяг або стиск стрижня виникає під дією сил, прикладених до його кінців і спрямованих уздовж осі бруса. Під час деформації розтяг або стиск у будь-якому поперечному перерізі виникає тільки поздовжня сила N .

Для визначення значення поздовжньої сили в поперечному перерізі бруса застосовують метод перерізів.

Поздовжня сила – це рівнодіюча внутрішніх нормальних сил, які виникають у поперечному перерізі бруса. Тому *поздовжня сила в поперечному перерізі бруса чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, розміщених по один бік перерізу*. Розтяжні поздовжні сили вважатимемо додатними, а стискальні – від’ємними.

2. Нормальні напруження в поперечних перерізах та їх епюри

Лабораторні дослідження показали, що для розтягу справедлива гіпотеза плоских перерізів і, отже, всі волокна бруса видовжуються на одну і таку саму величину. Це дає змогу зробити висновок про те, що під час розтягу і стиску в поперечних перерізах бруса виникають тільки нормальні напруги, які рівномірно розподілені у перерізі; їх обчислюють за формулою:

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

де: N – поздовжня сила;

A – площа поперечного перерізу.

Очевидно, що для розтягу і стиску форма перерізу на величину напруги не впливає.

У перерізах, близьких до точок прикладання сил, закон розподілу напруг буде складнішим, але, користуючись принципом пом’якшення граничних умов, нехтуватимемо цими відхиленнями і вважатимемо, що у

всіх перерізах бруса напруги розподілені рівномірно і що в перерізі, де до бруса прикладено вздовж осі зосереджену силу, значення поздовжньої сили і напруг змінюються стрибкоподібно.

Для наочного зображення вздовж осі бруса поздовжніх сил і нормальних напруг будують графіки, які називають **епюрами**.

Побудувати епюри поздовжніх сил і нормальних напружень ступінчастого бруса, зображеного на рис. 1.

Розв'язок. Розділимо брус на ділянки і пронумеруємо їх, як показано на рис. 1. Межами ділянок є точки прикладання зовнішніх сил і місця зміни розмірів поперечного перерізу. Цей брус складається з трьох ділянок.

Для побудови епюри поздовжніх сил N під рисунком бруса проведено вісь або базу епюри, паралельну осі бруса, і штриховими лініями обмежимо його ділянки. Величини поздовжніх сил у довільному масштабі відкладемо перпендикулярно до осі епюри, причому додатні значення N (розтяг) відкладаємо вгору, а від'ємні (стиск) – донизу від осі. Епюру штрихуємо тонкими лініями, перпендикулярними до осі. Лінія штрихування в масштабі (ордината графіка) дає значення поздовжньої сили у відповідному поперечному перерізі бруса.

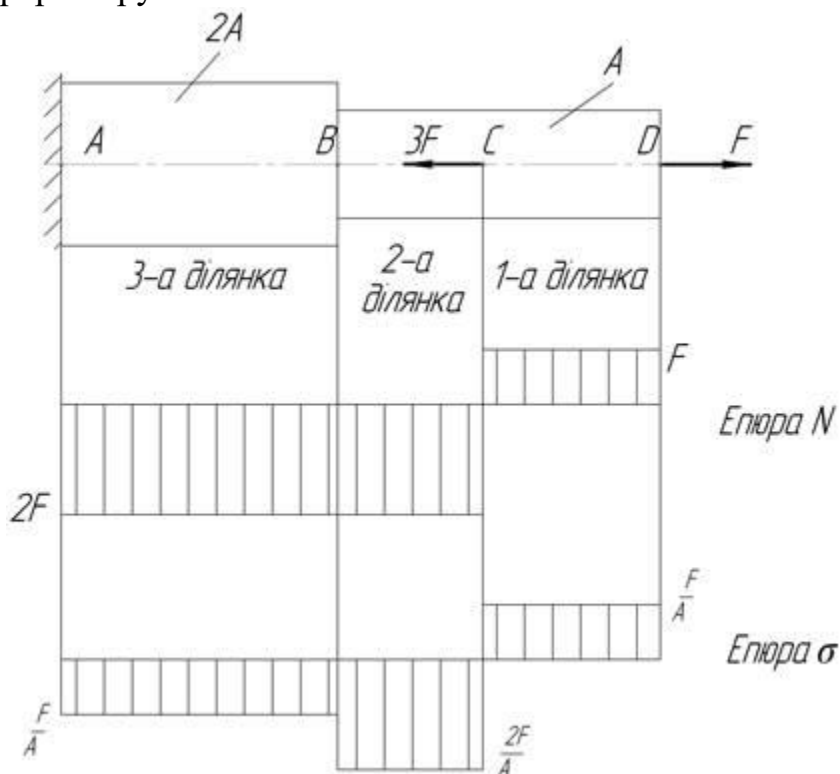


Рис. 1

У точках прикладання зосереджених сил на епюрі N відбуваються стрибкоподібні зміни, причому величина «стрибка» дорівнює модулю прикладеної в перерізі бруса зовнішньої зосередженої сили.

Перейдемо до побудови епюри N . Застосовуючи метод перерізів, з'ясуємо, що в усіх поперечних перерізах першої ділянки діє поздовжня

сила $N_1 = F$. Відкладемо вгору від осі епюри величину F у довільному масштабі і проведемо пряму, паралельну осі епюри. У точці C бруса прикладено силу $3F$. Застосовуючи метод перерізів, з'ясуємо, що в усіх поперечних перерізах другої і третьої ділянок діє поздовжня сила $N_2 = N_3 = -2F$ і епюра буде горизонтальною лінією, яка проходить на $2F$ нижче від осі епюри.

Очевидно, що значення ординати епюри поздовжніх сил під закріпленням дорівнює реакції закріплення. Зазначимо, що за методом перерізу зручніше розглядати рівновагу частини бруса, розміщеної з боку його вільного кінця, у противному разі треба заздалегідь визначити і вводити в рівняння рівноваги реакцію закріплення.

Щоб побудувати епюру σ , визначимо нормальні напруження на ділянках бруса, беручи відношення значення поздовжньої сили (з епюри N) до площі поперечного перерізу. Тоді:

- на першій ділянці нормальні напруження будуть $\sigma_1 = \frac{F}{A}$,
- на другій $\sigma_2 = \frac{2F}{A}$,
- на третій $\sigma_3 = \frac{2F}{2A} = \frac{F}{A}$.

Правила побудови епюри σ такі самі і для епюри N , зокрема і правило знаків.

У межах кожної ділянки напруження сталі, тому епюра σ на кожній ділянці паралельна осі.

У розрахунках на міцність звертають особливу увагу на ті перерізи бруса, в яких напруження за абсолютним значенням максимальні. Ці перерізи можуть бути небезпечними. У цьому прикладі такими є перерізи бруса на другій ділянці.

3. Поздовжні та поперечні деформації під час розтягу (стиску). Закон Гука. Модуль поздовжньої пружності, коефіцієнт поперечної деформації (коефіцієнт Пуассона). Жорсткість перерізів та жорсткість бруса під час розтягу і стиску. Визначення осьових переміщень поперечних перерізів бруса

Розглянемо деформації. Під дією прикладених розтяжних сил стрижень видовжується на деяку величину Δl . Якщо позначити початкову довжину через l , то **абсолютне видовження** визначиться з виразу: $\Delta l = l_1 - l$,

де l_1 — довжина стрижня після деформації.

Абсолютне видовження вимірюється в одиницях довжини (мм, см).

Для зручності порівняння деформацій застосуємо поняття про *відносне видовження*, яке дорівнює: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$. Відносне видовження число абстрактне, іноді його подають у відсотках $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \cdot 100\%$.

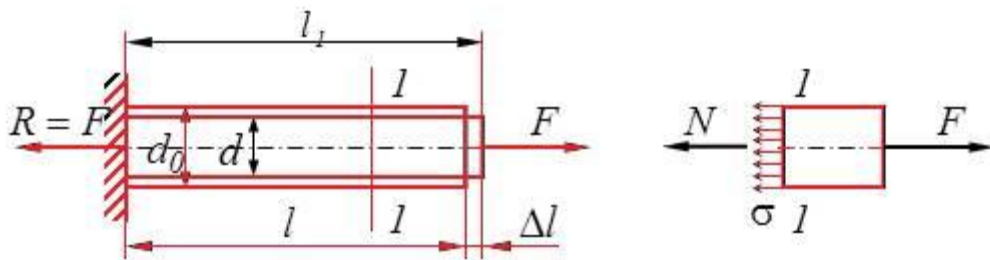


Рис. 2. Модель розтягу бруса

Якщо розглядати тільки пружні деформації бруса, то для них дослідним шляхом можна встановити залежність між напруженням і відносним видовженням. Ця залежність називається законом Гука. **Закон Гука** для розтягу і стиску справедливий лише у певних межах навантаження і формулюється так: *нормальна напруга прямо пропорційна відносному видовженню або укороченню*.

Залежність можна записати у вигляді рівності $\sigma = E \cdot \varepsilon$.

Коефіцієнт пропорційності E характеризує жорсткість матеріалу, тобто його здатність протидіяти пружним деформаціям розтягу або стиску, і називається модулем поздовжньої пружності або модулем пружності першого роду, вимірюється в (паскалях) Па.

Якщо у формулу закону Гука підставити $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$, $\sigma = \frac{N}{A}$, то дістанемо формулу для визначення абсолютного видовження або укорочення бруса:

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}.$$

Добуток EA у знаменнику називають жорсткістю перерізу під час розтягу і стиску; він характеризує одночасно фізико-механічні властивості матеріалу і геометричні розміри поперечного перерізу бруса.

Для бруса, що має кілька ділянок, які відрізняються матеріалом, розмірами поперечного перерізу, величиною поздовжньої сили, зміна довжини всього бруса дорівнює алгебраїчній сумі видовжень і укорочень окремих ділянок:

$$\Delta l = \sum \Delta l_k$$

Стрижні, на які діють розтяжні або стискальні сили, як показали досліди, зазнають не тільки поздовжньої, а й поперечної деформації. Відносна поперечна деформація дорівнює:

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d},$$

де: d – початковий поперечний розмір,
 Δd – зміна поперечного розміру.

Залежність між відносною поперечною ε' і відносною поздовжньою ε деформаціями вперше встановив французький учений Пуассон (1781–1840).

$\mu = \frac{|\varepsilon'|}{|\varepsilon|}$ коефіцієнт Пуассона, залежить від властивостей матеріалу і лежить у межах від 0 (корок) до 0,5 (парафін); для сталі $\mu = 0,25 \dots 0,33$, для чавуна $\mu = 0,23 \dots 0,27$.

4. Експериментальне дослідження розтягу й стиску матеріалів

Механічні характеристики матеріалів, тобто величини, які характеризують їх міцність, пластичність, пружність, твердість, а також пружні сталі величини E і μ потрібні конструктору для вибору матеріалів та розрахунків проєктованих деталей, визначають за допомогою механічних випробувань стандартних зразків, виготовлених з досліджуваного матеріалу.

Найбільш поширеніше і важливіше механічне випробування на розтяг маловуглецевої сталі (наприклад, сталі Ст.3) за статичного навантаження.

У процесі цього випробування спеціальний пристрій випробувальної машини автоматично креслить діаграму, яка показує залежність між розтяжною силою і абсолютним видовженням, тобто в координатах $(F, \Delta l)$. Для вивчення механічних властивостей матеріалу незалежно від розмірів зразка застосовують діаграму в координатах «напруга – відносне видовження» (σ, ε) . Ці діаграми відрізняються одна від одної лише масштабами. Діаграму розтягу маловуглецевої сталі подано на рис. 3. Ця діаграма має такі характерні точки. Точка А відповідає границі пропорційності. **Границею пропорційності** σ_p називають таку найбільшу напругу, до якої деформації зростають пропорційно навантаженню, тобто відповідно до закону Гука (для сталі Ст.3 $\sigma_p = 200$ МПа).

Точка А практично відповідає й іншій границі, яку називають границею пружності. **Границею пружності** σ_{pr} називають таку найбільшу напругу, до якої деформації практично залишаються пружними.

Точка С відповідає границі текучості. **Границею текучості** $\sigma_{т}$ називають таку напругу, за якої у зразку виникає помітне видовження без збільшення навантаження (для сталі Ст.3 $\sigma_{т} = 240$ МПа).

Коли деформація досягає границі текучості, поверхня зразка стає матовою, бо на ній появляється сітка **ліній Людерса-Чернова**, нахилених до осі під кутом 45° . Ці лінії вперше в 1859 р. описали німецький металург Людерс і незалежно від нього в 1884 р. російський металург Д.К. Чернов (1839–1921), який запропонував використовувати їх для експериментального вивчення напруг у складних деталях.

Границя текучості – це основна механічна характеристика для оцінювання міцності пластичних матеріалів.

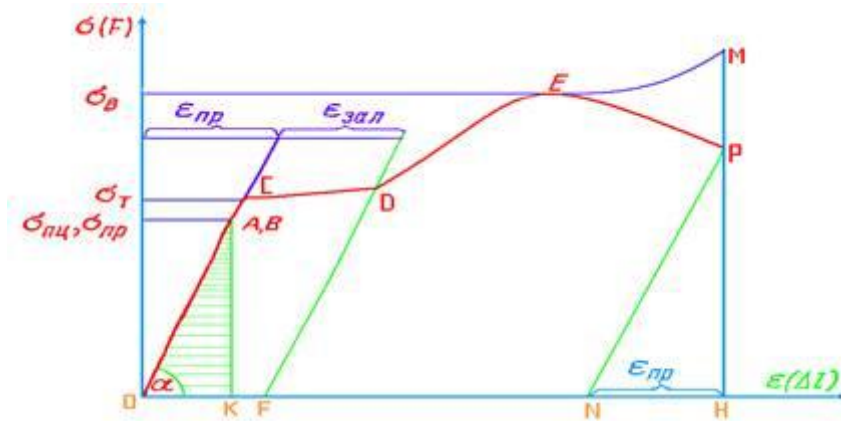


Рис. 3

Точка В відповідає тимчасовому опору або границі міцності.

Тимчасовим опором σ_m називають умовну напругу, що дорівнює відношенню максимальної сили, яку витримує зразок, до початкової площі його поперечного перерізу (для сталі Ст.3 $\sigma_m = 400$ МПа). Коли деформація досягає тимчасового опору, то на розтягуваному зразку утворюється місцеве звуження – шийка, тобто починається руйнування зразка. В означенні тимчасового опору йдеться про умовну напругу, оскільки в перерізах шийки напруги будуть більшими.

Границею міцності σ_m називають тимчасовий опір зразка, який руйнується без утворення шийки. Границя міцності є основною механічною характеристикою для оцінювання міцності крихких матеріалів.

Точка D відповідає напрузі, яка виникає у зразку в момент розриву усіх поперечних перерізів, крім перерізу шийки.

Точка M відповідає напрузі, яка виникає у найменшому поперечному перерізі шийки в момент розриву. Цю напругу можна назвати напругою розриву.

Деформація зразка за границею пружності складається з **пружної** і **залишкової**, причому пружна частина деформації підлягає закону Гука й за границею пропорційності (рис. 3). Якщо навантаження зняти, то зразок скоротиться відповідно до прямої TF діаграми. За повторного навантаження того самого зразка його деформація відповідатиме діаграмі FTBD. Отже, за повторного розтягування зразка, раніше навантаженого більше, ніж границя пружності, механічні властивості

матеріалу змінюються, а саме: підвищується міцність (границя пружності і пропорційності) і зменшується пластичність. Це явище називають **наклепом**.

Іноді наклеп небажаний (наприклад, під час пробивання отворів під заклепки збільшується можливість виникнення тріщин біля отворів). В інших випадках наклеп створюють навмисно (наприклад, ланцюги підіймальних машин, арматуру залізобетонних конструкцій, проводи, троси попередньо витягують за границю текучості). Дріт, який витягують волочінням, як результат наклепу має значно більшу міцність, ніж точений зразок з того самого матеріалу.

Ступінь пластичності матеріалу можна охарактеризувати величиною (у відсотках) залишкового відносного видовження δ і залишкового відносного звуження ψ шийки зразка після розриву:

$$\delta = \frac{l_p - l_o}{l_j} \cdot 100; \psi = \frac{A_o - A_{ш}}{A_o} \cdot 100,$$

де: l_o – початкова довжина зразка;

l_p – довжина зразка після розриву;

A_o – початкова площа поперечного перерізу зразка,

$A_{ш}$ – площа найменшого поперечного перерізу шийки зразка після розриву.

Що більші δ і ψ , то пластичніший матеріал. Матеріали, які мають дуже малу пластичність, називають крихкими. Діаграма розтягу крихких матеріалів не має переходу текучості, в них під час руйнування шийка не утворюється.

Діаграма стиску сталі до границі текучості збігається з діаграмою розтягу, до того ж результати випробування сталі на розтяг і стиск однакові. Результати випробувань на розтяг і стиск чавуну значно відрізняються; границя міцності на розтяг у 3–5 разів менша, ніж на стиск. Інакше кажучи, чавун значно гірше працює на розтяг, ніж на стиск.

Чітко виражену площадку текучості мають лише діаграми розтягу маловуглецевої сталі і деяких сплавів кольорових металів. На рис. 4 показано для порівняння діаграми розтягу сталей з різним вмістом вуглецю; з рисунка видно, що із збільшенням відсотка вмісту вуглецю зростає міцність сталі і зменшується її пластичність.

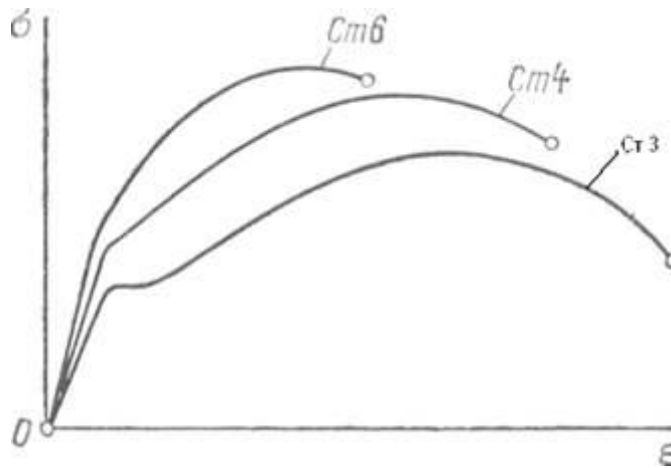


Рис. 4

Для пластичних матеріалів, діаграми розтягу яких не мають чітко вираженої ділянки текучості (середньо- і високовуглецеві, леговані сталі) або зовсім її не мають (мідь, дюралюміній), вводиться поняття умовної границі текучості – напруги, за якої відносне залишкове видовження зразка дорівнює 0,2 %. Умовну границю текучості також позначатимемо σ_T (іноді її позначають $\sigma_{0,2}$).

Поділ матеріалів на пластичні і крихкі цілком умовний, оскільки залежно від характеру діючого навантаження крихкий матеріал може набути пластичних властивостей і, навпаки, пластичний матеріал набуває властивостей крихкого. Так, наприклад, деталь з пластичного матеріалу за низької температури або ударного навантаження руйнується без утворення шийки, як крихка.

5. Коефіцієнт запасу міцності за статичного навантаження на границі міцності та границі текучості

У заводських умовах часто треба перевірити міцність деталі, наприклад для контролю правильності проведеної термообробки. Вирізати зразок з виготовленої деталі, як правило, неможливо, тому для непрямого визначення міцності матеріалу застосовують випробування на твердість.

Твердістю називається властивість матеріалу протидіяти прониканню в його поверхню більш твердого тіла – наконечника (індентора).

Для визначення твердості використовують методи Бринеля, Роквела та Вікерса.

Числом твердості за **Бринелем** HB є відношення сили, з якою загартована кулька тисне на поверхню зразка, до площини A одержаного

при цьому відбитка:

$$HB = \frac{F}{A}$$

Під час випробування за методом **Роквела** у поверхню зразка вдавлюється гострий алмазний конус (шкала C) або сталева загартована

кулька (шкала B). З урахуванням значень сили F і глибини проникнення у зразок конуса (кульки) від двох послідовних навантажень за шкалою приладу визначається число твердості за Роквелом HR_C (HR_B).

Між числом твердості та границею міцності для кожного матеріалу існує експериментально підтверджена залежність. Так, для вуглецевої сталі $\sigma_B = (0,35 - 0,4)HB$.

Як результат механічних випробувань визначаються граничні (небезпечні) напруження $\sigma_{нб}$, за яких може порушитися працездатність конструкції. За небезпечне напруження за статичного навантаження для пластичних матеріалів можна прийняти границю текучості σ_m , а для крихких – границю міцності на розтяг σ_m^+ чи на стиск σ_m^- . Для забезпечення міцності деталей необхідно, щоб напруження, що виникають у них у процесі експлуатації, були меншими від небезпечних з певним запасом.

Максимальне безпечне напруження називається **допустимим**. Воно визначається як відношення небезпечного напруження до нормативного (призначеного нормами проектування конструкцій) **коефіцієнта запасу**:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{нб}}{[n]}.$$

Нормативний коефіцієнт запасу $[n]$ лежить у широких межах 1,5–5. Його значення залежить від умов роботи деталі, точності методів розрахунку, властивостей матеріалу, призначення конструкції та інших факторів. Більш детальні рекомендації щодо нормативного коефіцієнта запасу наводяться у спеціальній довідниковій літературі залежно від галузі техніки, досвіду проектування та експлуатації машин певного типу.

6. Допустимі напруження. Розрахунки на міцність: перевірка міцності, визначення допустимого навантаження, визначення необхідних розмірів поперечного перерізу

Умова міцності. Міцність стрижня під час осьового розтягу і стиску забезпечена, якщо для кожного його поперечного перерізу найбільше розрахункове (робоче) напруження σ не перевищує допустимого $[\sigma]$:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma].$$

Допустимі напруження – це максимальні значення напружень, за яких забезпечується надійна робота конструкції:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{зрпч}}{[n]},$$

де: $\sigma_{гран}$ – граничні напруження (напруження, за яких відбувається порушення роботи або руйнування деталей конструкції), для конструкцій з пластичних матеріалів граничним напруженням є межа текучості σ_m , а для крихких матеріалів – це межа міцності σ_m ;

$[n]$ – допустимий (мінімально необхідний) коефіцієнт запасу міцності.

Для конструкцій з пластичних матеріалів допустимі напруження на розтяг і стиск однакові, тому для них σ – найбільше за абсолютною величиною напруження. Крихкі матеріали значно гірше працюють на розтяг, ніж на стиск:

$$[\sigma_{cm}] \approx 3-5[\sigma_p],$$

де: $[\sigma_{cm}]$ – допустиме напруження стиску;

$[\sigma_p]$ – допустиме напруження розтягу.

Умова міцності для крихкого матеріалу:

$$\sigma_{cm} \leq [\sigma_{cm}] \quad \sigma_p \leq [\sigma_p],$$

де σ_{cm} , σ_p – найбільші розрахункові напруження стиску і розтягу.

Залежно від мети розрахунку можна виконати три види розрахунків на міцність:

1) Перевірка міцності (перевірний розрахунок) – за заданої поздовжньої сили N і площі поперечного перерізу A визначають робоче (розрахункове) напруження порівнюють його з допустимим:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma].$$

Допускається недовантаження до 5 %, перевантаження до 10 %.

2) Підбір поперечного перерізу (проектний розрахунок) – за відомих поздовжньої сили N і допустимого напруження $[\sigma]$ визначають необхідні розміри перерізу:

$$A = \frac{N}{[\sigma]}.$$

3) Визначення допустимого навантаження:

$$[N] \leq [\sigma] \cdot A.$$

Запитання для самоконтролю

1. Що називають поздовжньою силою?
2. Чому чисельно дорівнює поздовжня сила?
3. Які напруження виникають у поперечних перерізах бруса під час розтягу і стиску?

4. За якою формулою визначають нормальні напруження?
5. Що називають епюрами і для чого їх будують?
6. Який переріз бруса називають небезпечним?
7. Що називають абсолютним видовженням, як його визначити?
8. Що називають відносним видовженням, як його визначити?
9. Сформулюйте закон Гука для розтягу і стиску.
10. Що називають модулем пружності?
11. Що називають жорсткістю перерізу, що вона характеризує?
12. Що називають відносною поперечною деформацією?
13. Від чого залежить коефіцієнт Пуассона?
14. Чому дорівнює абсолютна деформація для бруса з різними ділянками?
15. Що називають границею пропорційності?
16. Що називають границею пружності?
17. Що називають границею текучості?
18. Що називають границею міцності?
19. Яка деформація називають пружною і залишковою?
20. Яке явище називають наклепом?
21. Чим характеризують ступінь пластичності матеріалу?
22. Що називають твердістю матеріалу?
23. За якими методами визначають твердість матеріалу?
24. Яке напруження називають допустимим?
25. Що називають нормативним коефіцієнтом запасу міцності?
26. Сформулюйте умову міцності під час розтягу і стиску.
27. Як визначити допустиме напруження?
28. У чому полягає суть перевірного розрахунку?
29. У чому полягає суть проектного розрахунку?
30. Як визначається допустиме навантаження під час розтягу і стиску?

Тема 2.3. Практичні розрахунки на зріз і зминання

План

1. Чистий зсув
2. Закон Гука для зсуву. Модуль зсуву. Залежність між трьома пружними постійними для ізотропного тіла
3. Зріз. Основні припущення та розрахункові формули
4. Зминання, умовності розрахунку, розрахункові формули

1. Чистий зсув

Зсувом називають такий вид деформації, за якої в будь-якому поперечному перерізі виникає лише поперечна сила.

Деформацію зсуву можна спостерігати, наприклад під час різання ножицями металевих штаб або прутків.

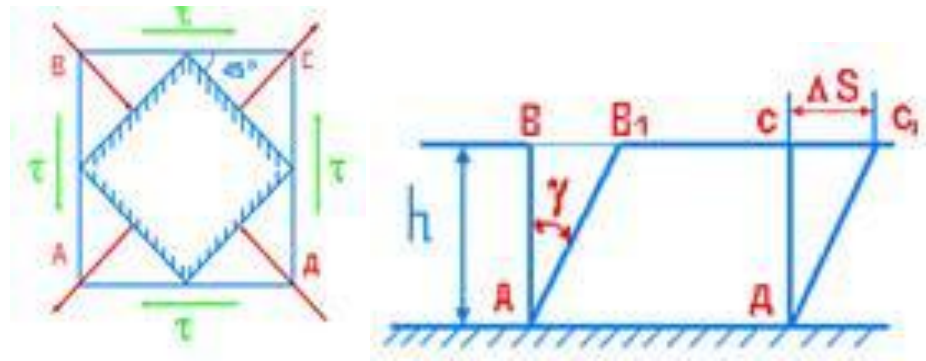


Рис. 1

Під час визначення напруг на похилих площадках у розтягнених або стиснених брусах визначено, що в цих перерізах виникають, крім нормальних, дотичні напруги. Останні намагаються зсунути одну частину бруса відносно другої.

Розглянемо паралелепіпед, який закріплений нижньою гранню і на який діє сила Q (рис. 1).

Під дією сили грань ab переміститься в положення $a'b'$.

Коли на площадки елемента діють тільки дотичні напруги, в ньому виникають деформації **чистого зсуву**.

Лінійне переміщення aa' називається абсолютним зсувом. Відношення абсолютного зсуву $aa' = \Delta S$ до висоти паралелепіпеда h називається **відносним зсувом**, тобто:

$$\frac{\Delta S}{h} = \operatorname{tg} \gamma$$

Внаслідок малої величини кута тангенс можна замінити кутом. Отже, мірою відносного зсуву є кут γ .

2. Закон Гука для зсуву. Модуль зсуву. Залежність між трьома пружними постійними для ізотропного тіла

На основі дослідних і теоретичних досліджень встановлено, що для багатьох матеріалів у границях пружності існує лінійна залежність між дотичними напругами і відносним зсувом. Цю залежність називають **законом Гука для зсуву**, її записують у такому вигляді:

$$\tau = G \cdot \gamma$$

G – модуль пружності за зсуву (модуль зсуву).

Орієнтовні значення модуля зсуву:

- для сталі – $8 \cdot 10^4$ МПа;
- для чавуну – $4,5 \cdot 10^4$ МПа.

Отже, дотичні напруги за зсуву прямо і порційні куту зсуву:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}.$$

Ця формула виражає теоретичну залежність між модулем пружності за зсуву та модулем пружності за розтягу через коефіцієнт Пуассона.

3. Зріз. Основні припущення та розрахункові формули

Деталі, які служать для з'єднання окремих елементів машин чи будівельних конструкцій (штифти, заклепки, болти, шпонки (рис. 2а,б,в,г), у багатьох випадках сприймають навантаження, перпендикулярні до їх поздовжньої осі.

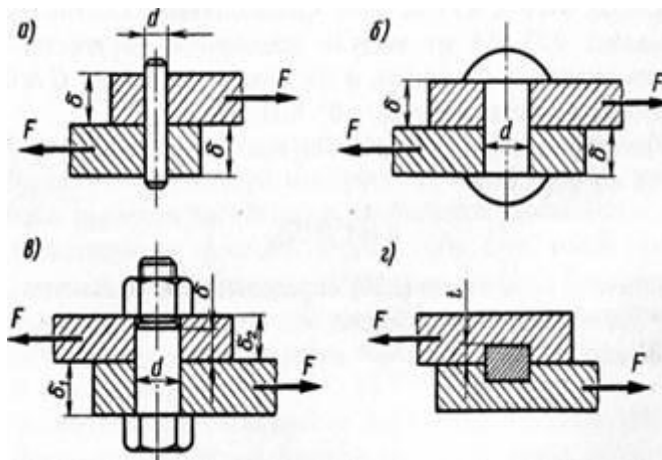


Рис. 2

Практичні розрахунки таких деталей базуються на таких **припущеннях**:

- 1) в поперечному перерізі виникає тільки один внутрішній силовий фактор – поперечна сила Q ;
- 2) дотичні напруги, які виникають у поперечному перерізі розподіляються на його площі рівномірно;
- 3) у випадку, якщо з'єднання виконане декількома однаковими деталями, вважаємо, що всі вони навантажені однаково.



Рис. 3

Руйнування з'єднувальних деталей (у випадку недостатньої міцності) відбувається як результат перерізання вздовж площини, яка співпадає з поверхнею дотикання з'єднуваних деталей (рис. 3). Тому говорять, що ці елементи працюють на зріз.

Умова міцності на зріз:

$$\tau_{зр} = \frac{Q}{A_{зр}} \leq [\tau_{зр}]$$

де: $\tau_{зр}$ – розрахункова напруга зрізу;
 Q – поперечна сила;
 $A_{зр}$ – площа зрізу однієї деталі;
 $[\tau_{зр}]$ – допустима напруга зрізу.

У машинобудуванні під час розрахунків штифтів, болтів, шпонок тощо приймають

$$[\tau_{зр}] = (0,25 \div 0,35) \cdot \sigma_m = (0,6 \div 0,8) \cdot [\sigma_p],$$

де $\sigma_m, [\sigma_p]$ – границя текучості та допустима напруга розтягу відповідно для матеріалу деталі.

Розрахунок на зріз забезпечує міцність з'єднання елементів але не гарантує надійність конструкції взагалі.

4. Зминання, умовності розрахунку, розрахункові формули

Коли деталі конструкцій, які передають значне стискальне навантаження, мають невелику площу контакту, то поверхні цих деталей можуть **з м и н а т и с я**. Щоб не сталося зминання, під гайки і головки болтів, наприклад, підкладають шайби. Для спрощення розрахунків вважають, що за площинного контакту виникають нормальні напруги зминання, що рівномірно розподілені на площі контакту. **Розрахункове рівняння на зминання** має вигляд:

$$\sigma_{зм} = \frac{F}{i \cdot A_{зм}} \leq [\sigma_{зм}]$$

де: F – стискальна сила;
 $[\sigma_{зм}]$ – допустима напруга на зминання;
 $A_{зм}$ – площа зминання;
 i – кількість деталей у з'єднанні.

Якщо дотичні деталі виготовлені з різних матеріалів, то на зминання перевіряють м'якший матеріал.

Для двох деталей, які контактують циліндричними поверхнями (наприклад, заклепочне з'єднання), закон розподілу напруг зминання на поверхні контакту складний, рис. 4.

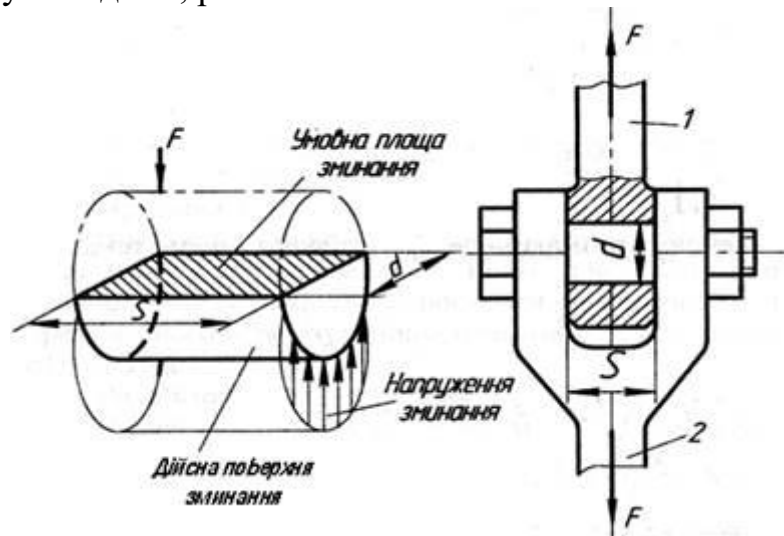


Рис. 4

Тому в розрахункову формулу зминання циліндричних отворів підставляють не площу бокової поверхні півциліндра, за якою контактують деталі, а значно меншу площу діаметрального перерізу отвору (умовна площа зминання); тоді $A_{зм} = d \cdot s$,

де: d – діаметр отвору;

s – товщина з'єднуваної деталі (висота циліндра).

Якщо з'єднані деталі мають різну товщину, то в розрахункову формулу підставляють меншу.

У машинобудуванні допустимі напруги на зминання для болтових, штифтових і шпонкових з'єднань з маловуглецевої сталі беруть у межах $[\sigma_{зм}] = 100 \dots 120$ МПа, для заклепочних з'єднань $[\sigma_{зм}] = 240 \dots 320$ МПа, для деревини (сосна, дуб) – $[\sigma_{зм}] = 2,4 \dots 11$ МПа залежно від сорту деревини і напрямку стискальної сили відносно напрямку волокон.

Умови міцності на зріз і зминання використовують для перевірки міцності з'єднання. Залежно від ставлення завдання вони можуть бути перетворені для визначення допустимого навантаження або необхідної площі перерізу (проектний розрахунок).

Запитання для самоконтролю

1. Яку деформацію називають зсувом?
2. Сформулюйте закон Гука для зсуву.

Тема 2.4. Геометричні характеристики плоских перерізів

План

1. Осьові, відцентровий та полярний моменти інерції перерізу
2. Зв'язок між осьовими та полярним моментами інерції перерізу
3. Моменти інерції простих перерізів: прямокутника, круга, кільця

1. Осьові, відцентровий та полярний моменти інерції перерізу

У деяких деформаціях міцність деталей залежить не тільки від величини площі поперечного перерізу, а й від його форми. Досі вивчалися деформації, у яких напруги залежали тільки від площі поперечного перерізу. Але для вивчення деформацій кручення і згину потрібно знати й деякі інші геометричні характеристики плоских фігур.

Статичним моментом площі плоскої фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, називають взятую по всій площі суму добутків площ елементарних площадок на відстані їх від цієї осі (рис. 1).

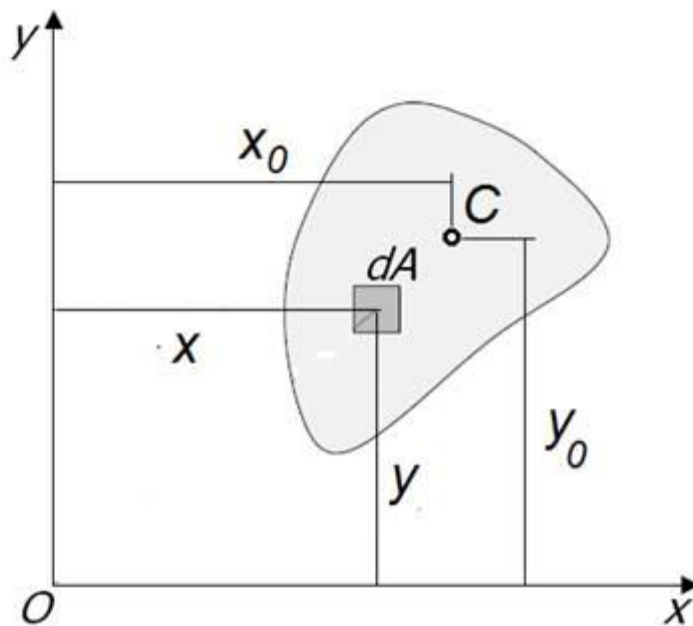


Рис. 1

Статичний момент площі позначимо S з індексом відповідної осі:

$$S_x = \int_A y \cdot dA; \quad S_y = \int_A x \cdot dA.$$

У випадку коли відомі координати центра ваги площі фігури статичний момент визначається із виразу:

$$S_x = A \cdot y_c; \quad S_y = A \cdot x_c.$$

Статичний момент площі фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, дорівнює добутку площі фігури на відстань її центра ваги від цієї осі.

Одиниця статичного моменту площі м^3 .

Статичний момент площі фігури може бути величиною додатною, від'ємною і дорівнювати нулю. Очевидно, що статичний момент площі відносно осі, яка проходить через **центр ваги** площі фігури (центральної осі), у тому числі відносно осі симетрії фігури, **дорівнює нулю**.

Полярним моментом інерції плоскої фігури відносно полюса, який лежить у тій самій площині, називають взятую по всій площі суму добутків площ елементарних площадок на квадрати їх відстаней від полюса (рис. 2).

Полярний момент інерції позначатимемо J_p :

$$J_p = \int_A \rho^2 \cdot dA.$$

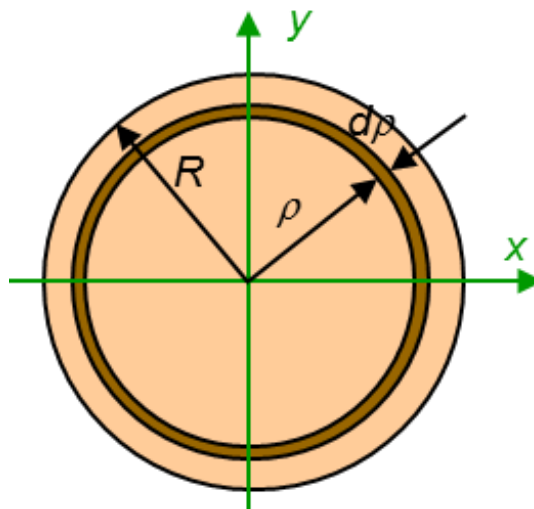


Рис. 2

Полярний момент інерції – величина завжди додатна і не дорівнює нулю.

Осьовим моментом інерції плоскої фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, називають взятую по всій площі суму добутків площ елементарних площадок на квадрат їх відстаней від цієї осі (рис. 1).

$$J_x = \int_F y^2 \cdot dA, \quad J_y = \int_F x^2 \cdot dA.$$

Очевидно, що осьовий і полярний моменти інерції виражають в однакових одиницях: м^4 .

2. Зв'язок між осьовими та полярним моментами інерції перерізу

Осьовий момент інерції – величина завжди додатна і не дорівнює нулю. Додамо моменти інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей x і y (рис. 1):

$$J_x + J_y = \int_F y^2 \cdot dA + \int_F x^2 \cdot dA = \int_F (x^2 + y^2) dA = \int_F \rho^2 \cdot dA = J_\rho,$$
$$J_x + J_y = J_\rho.$$

Сума осьових моментів інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей дорівнює полярному моменту інерції відносно початку координат.

Через те, що інтеграл суми дорівнює сумі інтегралів, то момент інерції складної фігури можна обчислити як суму моментів інерції простих фігур, на які розбивають складну фігуру. Поняття про осьові моменти інерції потрібне буде для вивчення теорії згину.

Осі, які проходять через центр ваги фігури, називають *центральними*. Момент інерції відносно центральної осі називають *центральним моментом інерції*.

Теорема. Момент інерції відносно якої-небудь осі дорівнює центральному моменту інерції відносно осі, паралельної цій, плюс добуток площі фігури на квадрат відстані між осями.

$$J_{xI} = J_x + a^2 \cdot A$$

Уявимо плоску фігуру, моменти інерції якої відносно осей координат J_x і J_y , а полярний момент інерції відносно початку координат J_ρ . Як вже було встановлено, $J_x + J_y = J_\rho$.

Якщо осі координат повертати у своїй площині навколо початку координат, то полярний момент інерції залишиться незмінним, а осьові моменти інерції змінюватимуться, до того ж

$$J_x + J_y = \text{const.}$$

Якщо сума двох змінних величин залишається сталою, то одна з них *зменшується*, а друга *збільшується*. Отже, за якогось положення осей один із осьових моментів досягає *максимального*, а другий – *мінімального* значень. Осі, відносно яких моменти інерції максимальне і мінімальне значення, називають *головними осями інерції*. Момент інерції відносно головної осі називають *головним моментом інерції*.

Якщо головна вісь проходить через центр ваги фігури, то вона називається *головною центральною віссю*, а момент інерції відносно цієї осі –

головним центральним моментом інерції. Якщо фігура має вісь симетрії, то ця вісь завжди буде однією з головних центральних осей.

3. Моменти інерції простих перерізів: прямокутника, круга, кільця

1) Проведемо осі, які збігаються з осями симетрії **прямокутника** $b \times h$ (рис. 3). Визначимо момент інерції відносно осі x .

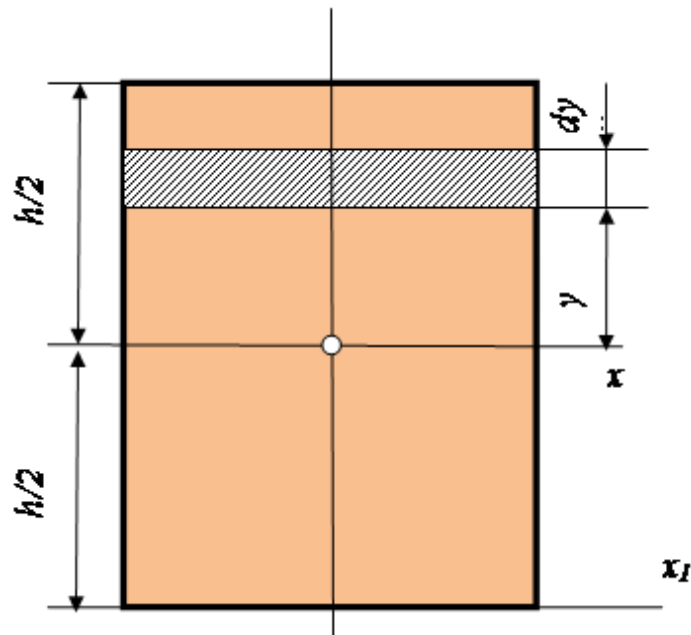


Рис. 3

Нескінченно малу площадку dA виділимо у вигляді смужки, що має ширину b і висоту dy , тоді $dA = b \cdot dy$:

$$J_x = \int_F y^2 \cdot dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 \cdot b \cdot dy = b \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 \cdot dy = \frac{b \cdot h^3}{12}.$$

Отже, осьові моменти інерції дорівнюватимуть:

$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{12}; \quad J_y = \frac{b^3 \cdot h}{12}.$$

$$J_x = J_y = \frac{a^3}{12}.$$

Для квадрата із стороною a

2) Обчислимо момент інерції **трикутника** відносно осі x_1 , яка проходить через вершину і паралельна основі (рис. 4).

Для цього на відстані y від осі x_1 виділимо елементарну смужку шириною b_x і висотою dy , паралельну основі.

З подібності трикутників дістанемо:

$$b_x = \frac{b}{h} y.$$

Площа елементарної смужки дорівнює:

$$dF = \frac{b}{h} y dy$$

Тоді момент інерції буде:

$$J_{x1} = \int_0^h y^2 \frac{b}{h} y dy = \frac{bh^3}{4}$$

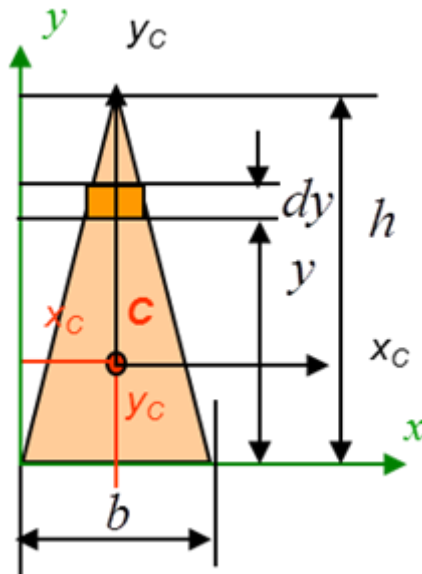


Рис. 4

Момент інерції відносно центральної осі, паралельної основі, дорівнює:

$$J_x = J_{x1} - \left(\frac{2h}{3}\right)^2 \cdot A = \frac{bh^2}{4} - \frac{4}{9} h^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36}$$

3) **Круг** діаметром \$d\$ (рис. 5).

Нескінченно малу площадку \$dA\$ виділимо у вигляді кільця шириною \$d\rho\$, що знаходиться на змінній відстані \$\rho\$ від полюса; тоді \$dA = 2\pi \cdot \rho \cdot d\rho\$.

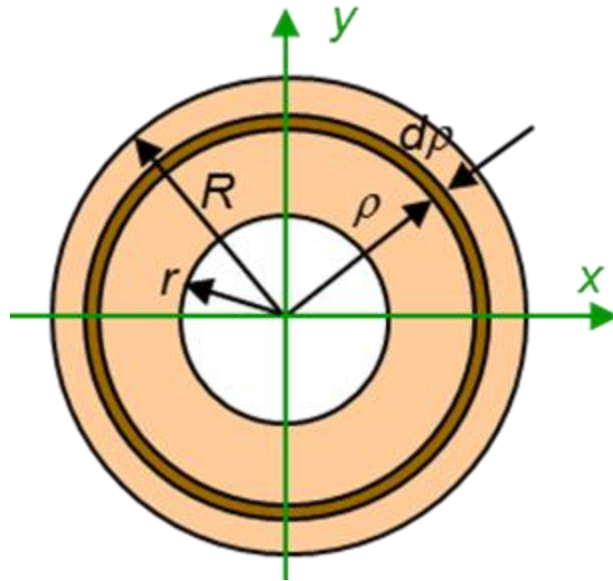


Рис. 5

Обчислимо полярний момент інерції:

$$J_p = \int_A \rho^2 \cdot dA = \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^2 \cdot 2\pi \cdot \rho \cdot d\rho = 2\pi \cdot \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^3 \cdot d\rho = \frac{\pi \cdot d^4}{32}, \quad J_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \approx 0,1 \cdot d^4.$$

Внаслідок симетрії для круга осьові моменти інерції рівні $J_x = J_y$.

Оскільки $J_x + J_y = J_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}, \quad J_x = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \approx 0,05d^4.$

4) **Кільце**, що має розміри $D \times d$.

$$J_p = \int_A \rho^2 \cdot dA = \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \rho^2 \cdot 2\pi \cdot \rho \cdot d\rho = 2\pi \cdot \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \rho^3 \cdot d\rho = \frac{\pi}{32} \cdot (D^4 - d^4)$$

$$; \quad J_p = \frac{\pi}{32} \cdot (D^4 - d^4) \approx 0,1 \cdot (D^4 - d^4)$$

Полярний момент інерції **кільцевого перерізу** можна обчислити як різницю полярних моментів інерції великого і малого кругів.

Осьовий момент інерції:

$$J_x = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4) \approx 0,05(D^4 - d^4).$$

Моменти інерції складних фігур визначають у такій послідовності:

- 1) складний переріз ділять на окремі прості фігури (прямокутники, трикутники, кола та ін.);
- 2) знаходять центр ваги складного перерізу;

3) обчислюють моменти інерції окремих простих фігур відносно власних центральних осей і потім відносно центральних осей всього перерізу;

4) підсумовують обчислені моменти інерції окремих простих фігур.

Моменти інерції прокатних профілів беруть із сортаменту. Користування сортаментом значно полегшує підрахунок моменту інерції складних перерізів.

Запитання для самоконтролю

1. Що називають статичним моментом площі?
2. За якими формулами визначають статичні моменти площі?
3. Що називають полярним моментом інерції?
4. За якою формулою визначають полярний моменти інерції?
5. Що називають осьовим моментом інерції?
6. За якими формулами визначають осьові моменти інерції?
7. Чому дорівнює сума осьових моментів інерції?
8. Сформулюйте теорему про момент інерції відносно паралельної осі.
9. Які осі називають головними осями інерції?
10. Яку вісь називають головною центральною віссю інерції?
11. За якими формулами визначають осьові моменти інерції прямокутника?
12. За якими формулами визначають осьові моменти інерції круга і кільця?
13. За якими формулами визначають полярні моменти інерції круга і кільця?
14. Укажіть послідовність визначення моменту інерції складних фігур.

Тема 2.5. Кручення

План

1. Крутий момент. Побудова епюр крутих моментів
2. Кручення прямого бруса круглого поперечного перерізу. Напруження в поперечному перерізі бруса
3. Кут закручування. Полярні моменти опору для круга і кільця
4. Розрахунки на міцність і жорсткість під час кручення
5. Розрахунок циліндричних гвинтових пружин розтягу і стиску з малим кроком витка

1. Крутий момент. Побудова епюр крутих моментів

Крученням називають такий вид деформації, за якого в будь-якому поперечному перерізі бруса виникає тільки крутий момент. Деформації

кручення виникають, якщо до прямого бруса в площинах, перпендикулярних до осі, прикладено пару сил. Моменти цих пар називають **обертальними** (якщо брус обертається) і **скручувальними** (якщо брус не обертається). Згідно зі стандартом, обертальний момент позначають T .

Оскільки на кручення працюють вали, що звичайно мають круглий, або кільцевий переріз, то розглянемо кручення круглого циліндра рис. 1.

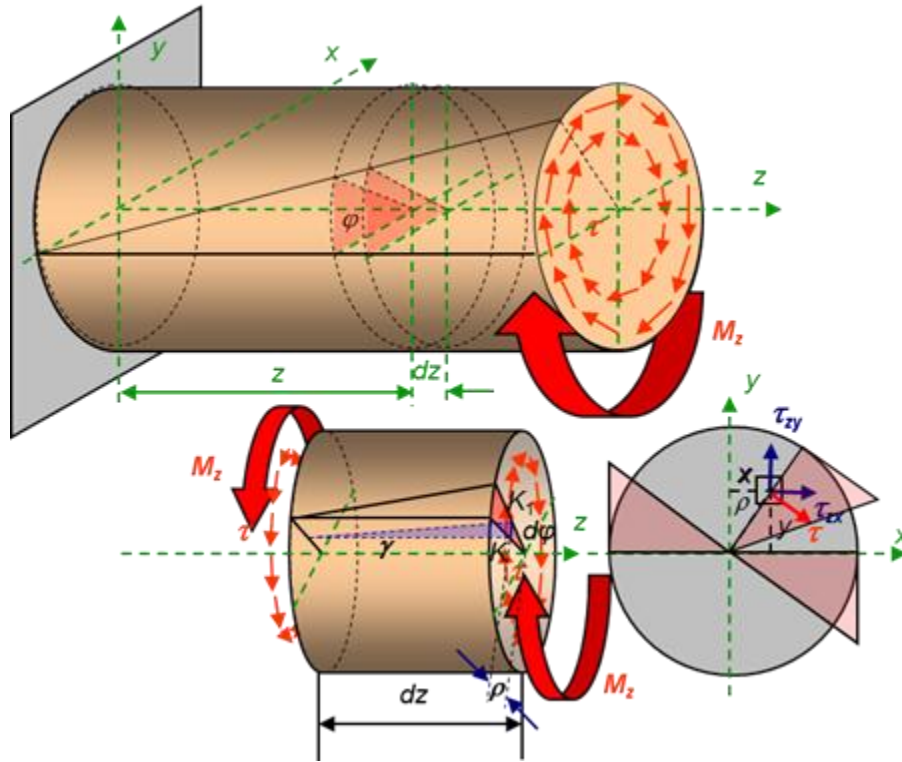


Рис. 1

Під час випробування гумового прямого кругового циліндричного бруса видно, що:

- 1) вісь циліндра, яку називають віссю кручення, залишиться прямолінійною;
- 2) діаметри кіл, під час деформації залишаться такими самими і відстань між колами не зміниться;
- 3) усі твірні циліндра повертаються на той самий кут;
- 4) кожний поперечний переріз повертається відносно один одного на деякий кут, який називають кутом закручування.

З цього можна зробити висновок, що для кручення круглого циліндра справедлива гіпотеза плоских перерізів, а також припустити, що радіуси кіл залишаються прямими під час деформації.

Кут φ повороту кінцевого перерізу називають **повним кутом закручування**.

Відносним кутом закручування називають відношення кута

закручування до відстані цього перерізу від закріплення $\varphi_0 = \frac{\varphi}{l}$.

Під час кручення виникає деформація зсуву, але не за рахунок поступального, а як результат обертального руху одного поперечного перерізу відносно іншого. Отже, під час кручення у поперечних перерізах виникають тільки дотичні внутрішні сили, які утворюють крутний момент. **Крутний момент** є результуючим моментом відносно осі бруса внутрішніх дотичних сил, які діють у поперечному перерізі.

Для наочного зображення розподілу крутних моментів уздовж осі бруса будують **епюри крутних моментів**. Крутний момент у перерізах бруса визначають за допомогою методу перерізів.

Крутний момент у будь-якому поперечному перерізі чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх моментів прикладених до бруса справа або зліва від перерізу.

Епюри крутних моментів дають змогу визначити небезпечні перерізи.

2. Кручення прямого бруса круглого поперечного перерізу. Напруження в поперечному перерізі бруса

Знаючи, що під час кручення відбувається **деформація зсуву**, природно вважати, що в точках поперечного перерізу бруса виникають тільки **дотичні напруги**.

На рис. 1 видно, що **абсолютний зсув** характеризується **кутом зсуву** γ .

Через незначні деформації $\gamma = \tan \gamma$, $aa_1 = l \cdot \gamma_{\max}$, $bb_1 = l \cdot \gamma$.

Оскільки радіуси поперечних перерізів під час деформації залишаються прямими, виразимо довжини дуг $aa_1 = \varphi \cdot r$, $bb_1 = \varphi \cdot \rho$.

де: φ – повний кут закручування, рад;

r – радіус циліндра;

ρ – відстань волокна b від осі кручення.

Розділимо $\frac{bb_1}{aa_1} = \frac{l \cdot \gamma}{l \cdot \gamma_{\max}} = \frac{\varphi \cdot \rho}{\varphi \cdot r}$; звідси $\gamma = \gamma_{\max} \cdot \frac{\rho}{r}$ кут зсуву прямо пропорційний відстані ρ до осі обертання.

Застосовуємо формулу **закону Гука** для зсуву $\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \frac{\rho}{r} \cdot \gamma_{\max}$, за $\rho = r$;

$\tau_{\max} = G \cdot \gamma_{\max}$; тоді $\tau = G \cdot \gamma_{\max} \cdot \frac{\rho}{r} = \tau_{\max} \cdot \frac{\rho}{r}$; дотичні напруги в поперечному перерізі змінюються за довжиною радіуса за **лінійним законом**.

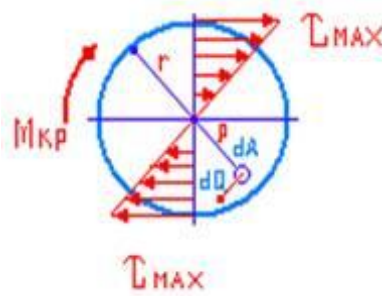


Рис. 2

Отже, дотичні напруги у кожній точці поперечного перерізу вала прямо пропорційні відстані ρ цієї точки від центра перерізу.

Графічно **закон зміни дотичних напруг** зображують прямою лінією. Епюру дотичних напруг показано на рис. 2. Як бачимо, найбільше значення дотичні напруги мають біля поверхні вала, в центрі вони дорівнюватимуть нулю.

Величину дотичної напруги після того, як знайдено закон розподілу, можна визначити з рівняння, яке виражає умову рівноваги відсіченої частини вала.

Сумарний момент усіх внутрішніх дотичних сил відносно осі вала дорівнює:

$$M_B = M_K = \int_A \tau \cdot dA \cdot \rho = \frac{\tau_{\max}}{r} \int_A dA \cdot \rho^2;$$

де: dA – площа елементарної площадки на відстані ρ від осі кручення;

$$I_p = \int_A dA \cdot \rho^2 \quad \text{– полярний момент інерції перерізу.}$$

$$M_K = \frac{\tau_{\max}}{r} \cdot I_p = \frac{\tau \cdot r}{r \cdot \rho} \cdot I_p;$$

$$\tau = \frac{M_K}{I_p} \cdot \rho \quad \text{– формула для визначення дотичних напруг під час кручення бруса круглого поперечного перерізу.}$$

Коли $\rho = r$, то напруги матимуть максимальні значення.

$$W_p = \frac{I_p}{r} \quad \text{– полярний момент опору крученню (відношення полярного моменту інерції до радіуса перерізу).}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_p} \quad \text{– формула для визначення найбільших дотичних напруг.}$$

3. Кут закручування. Полярні моменти опору для круга і кільця

$\varphi_0 = \frac{M_K}{G \cdot I_P}$ – формула для визначення відносного кута закручування, рад.

$\varphi = \frac{M_K \cdot l}{G \cdot I_P}$ – формула для визначення повного кута закручування, рад/м.

$G \cdot I_P$ – жорсткість перерізу під час кручення.

У формулах кут закручування виражено в радіанах. Переведення у градуси виконується за такою формулою:

$$\varphi_0 = \varphi \cdot \frac{180}{\pi}.$$

Повний кут закручування круглого циліндра прямо пропорційний крутному моменту, довжині циліндра і обернено пропорційний жорсткості перерізу під час кручення.

Оскільки для виведення формули застосовано закон Гука, то вона дійсна в межах, коли навантаження і деформація прямо пропорційні.

Для циліндричного бруса, який має кілька ділянок, які різняться матеріалом, розмірами поперечного перерізу, величиною крутного моменту, повний кут закручування дорівнює алгебраїчній сумі кутів закручування окремих ділянок.

Полярні моменти інерції і моменти опору перерізу вала.

Для суцільного круглого вала:

$$I_P = \frac{\pi \cdot d^4}{32}; \quad W_P = \frac{\pi \cdot d^3}{16}.$$

Для порожнистого вала:

$$I_P = \frac{\pi \cdot d^4}{32} (1 - \alpha^4); \quad W_P = \frac{\pi \cdot d^3}{16} (1 - \alpha^4); \quad \text{де } \alpha = \frac{d}{d_0}.$$

4. Розрахунки на міцність і жорсткість під час кручення

Умова міцності бруса для кручення полягає у тому, що найбільша дотична напруга, яка виникає у ньому, не має перевищувати допустиму. Розрахункова формула на міцність для кручення має вигляд:

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_P} \leq [\tau_K].$$

Допустиму напругу кручення вибирають залежно від допустимої напруги розтягу, а саме:

- для сталей $[\tau_K] = (0.55 \div 0.60) \cdot [\sigma_P];$
- для чавунів $[\tau_K] = (1 \div 1.2) \cdot [\sigma_P].$

Крім міцності до валів ставлять вимогу жорсткості, яка полягає у тому, що кут закручування l м довжини вала не має перевищувати певної величини, щоб не сталося, наприклад, пружинення валів або втрат точності ходових гвинтів токарно-гвинторізних верстатів. Не можна допускати великих кутів закручування в зубчастих передачах за великих кутів закручування вали зубчастих коліс перекосяться. Це призводить до кришення поверхні зубів і поломки передачі.

Допустимий кут закручування l м довжини вала задають у градусах і позначають $[\varphi_0^0]$; розрахункова формула на жорсткість для кручення має вигляд:

$$\varphi_0^0 = \frac{180 \cdot M_K}{\pi \cdot G \cdot I_p} \leq [\varphi_0^0]$$

Величини допустимих кутів закручування залежать від призначення вала, їх зазвичай беруть у таких межах: $[\varphi_0^0] = 0,25 \div 1$ (град/м).

За допомогою виведених формул виконують три види розрахунків конструкцій на міцність і жорсткість для кручення – проектний розрахунок, перевірний розрахунок і визначення допустимого навантаження.

5. Розрахунок циліндричних гвинтових пружин розтягу і стиску з малим кроком витка

Розглянемо приклад інженерного розрахунку **гвинтових циліндричних пружин**, які поширені у техніці (ресорах вагонів, клапанах, інших механізмах сучасних транспортних засобів).

Розглянемо пружину (рис. 2а), виготовлену зі сталюого круглого прутка; $f = h_0 - h_1$ – осідання пружини під дією сили F . Розрахункові параметри:

d – діаметр прутка; D – середній діаметр витків; n – кількість витків.

Згідно з методом перерізів, розглядаючи рівновагу верхньої частини пружини (рис. 2б), визначаємо внутрішні силові фактори: поперечну силу $Q = F$ та крутний момент $T = F \cdot D/2$. Звідки випливає, що у поперечному перерізі витка діють тільки **дотичні напруження зсуву та кручення**.

Насправді, при цьому ми нехтували малими за величиною подовжньою силою та згинальним моментом. Помилка за такого розрахунку буде більшою, що більше кут піднімання витка α .

Максимальні сумарні напруження діють у крайній точці перерізу витка на внутрішньому радіусі пружини:

$$\tau_{\max} = \tau_{zc} + \tau_{xp} = \frac{F}{A} + \frac{T}{W_p} = \frac{F}{\pi d^2/4} + \frac{F \cdot D/2}{\pi d^3/16} = \frac{4F}{\pi d^2} (1 + 2c),$$

де $c = D/d$ – індекс пружини.

Аналіз свідчить, що напруження зсуву $\tau_{\text{зс}}$ становлять лише 5–10 % від напружень кручення $\tau_{\text{кр}}$ і можуть за грубих розрахунків не враховуватися.

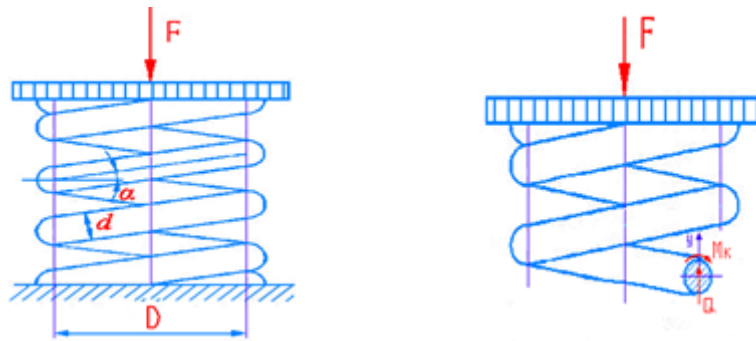


Рис. 3

Більш точний результат дає формула, яка враховує кривизну витків за допомогою спеціального поправкового коефіцієнта $k = (4c + 2)/(4c - 3)$; тоді формулу для розрахунку пружини на міцність можна записати у вигляді:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{8 \cdot F \cdot c \cdot k}{\pi \cdot d^3} \leq [\tau]$$

Під час визначення осідання f пружини будемо враховувати тільки кручення витого прутка, бо інші види деформування вносять дуже малий вклад. Скористаємось *енергетичним підходом*, згідно з яким робота зовнішньої сили F на осіданні f переходить у потенційну енергію U деформованої пружини, яка дорівнює роботі крутного моменту T_x на куті φ закручення прутка (рис. 3).

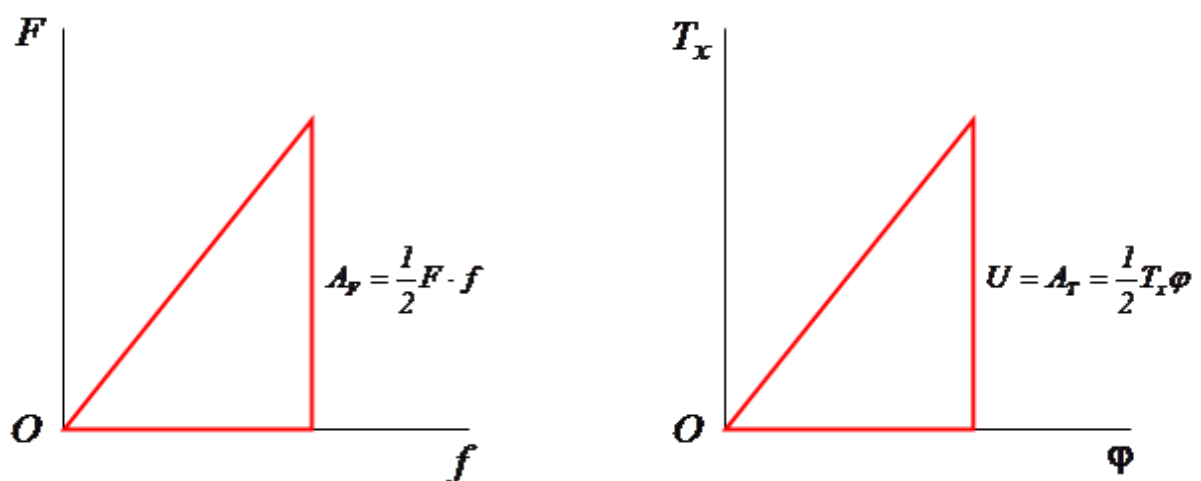


Рис. 4

Запишемо потенційну енергію U з урахуванням формули для φ , величини крутного моменту $T = F \cdot D / 2$, довжини прутка $l = \pi D \cdot n$ та формули для I_p :

$$A_F = U$$

$$U = \frac{1}{2} T_x \frac{T_x \cdot l}{G \cdot I_p} = \frac{1}{2} \frac{(FD / 2)^2 \pi D \cdot n}{G \cdot \pi d^4 / 32}$$

Після підставлення виразів для A_F і U та деяких скорочень отримаємо остаточну розрахункову формулу для осідання пружини:

$$f = \frac{F^2 D^2 \pi D n 32}{4 G \pi d^4 F} = \frac{8 F D^3 n}{G d^4} = \frac{8 F c^3 n}{G d}$$

Можна підібрати такі параметри пружини, щоб отримати для заданого навантаження бажане осідання пружини.

Запитання для самоконтролю

1. Який вид деформації називають крученням?
2. Які моменти називають обертальними, а які скручувальними?
3. Що називають повним кутом закручування?
4. Що називають відносним кутом закручування?
5. Чому дорівнює крутний момент у будь-якому поперечному перерізі під час кручення?
6. Для чого будують епюри крутних моментів?
7. Чим характеризують абсолютний зсув під час кручення?
8. За яким законом змінюють дотичні напруги у поперечних перерізах?
9. За якою формулою визначають найбільші дотичні напруги?
10. За якою формулою визначають повний кут закручування?
11. За якою формулою визначають полярні моменти опору для суцільного та порожнистого валів?
12. Сформулюйте умову міцності під час кручення.
13. Сформулюйте умову жорсткості під час кручення.
14. Які три види розрахунків можна виконувати на міцність і жорсткість?
15. За якою формулою визначають осідання пружини?

Тема 2.6. Згин

План

1. Основні поняття та визначення. Класифікація видів згину. Внутрішні силові фактори за прямого згину

2. Диференціальні залежності між згинальним моментом, поперечною силою та інтенсивністю розподіленого навантаження
3. Побудова епюр поперечних сил та згинальних моментів
4. Нормальні напруження в поперечних перерізах за згину. Осьові моменти опору
5. Розрахунки на міцність за згину. Раціональні форми поперечних перерізів балок за згину
6. Поняття про дотичні напруження за прямого поперечного згину
7. Лінійні та кутові переміщення за прямого згину. Розрахунки на жорсткість за згину

1. Основні поняття та визначення. Класифікація видів згину. Внутрішні силові фактори за прямого згину

Згин – це один з простих видів навантаження (деформації) бруса, за якого у його поперечному перерізі діє *внутрішній згинальний момент* ($M_{zz} \neq 0$), внаслідок чого вісь бруса викривляється.

Брус, що працює на згин, називають **балкою**.

Згин може виникати під дією зовнішніх поперечних сил (зосереджених або розподілених уздовж бруса) та моментів пар сил.

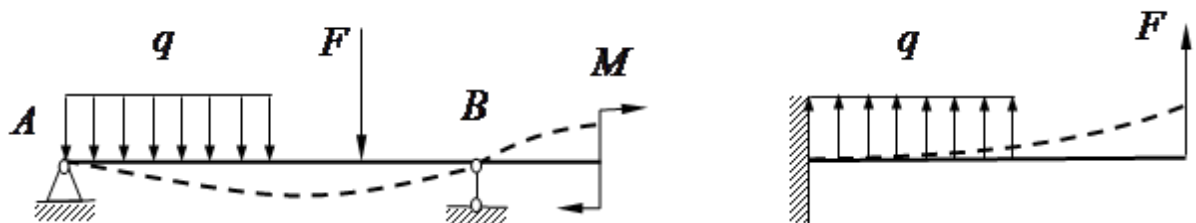


Рис. 1

Під час деформації згину у поперечних перерізах балки виникають такі внутрішні силові фактори, як поперечна сила Q_x і згинальний момент M_{zz} .

Розрізняють такі види згину:

- *чистий згин* ($M_{zz} = \text{const} \neq 0$, $Q_x = 0$);
- *поперечний згин* ($M_{zz} \neq 0$, $Q_x \neq 0$).

Якщо площина дії згинального моменту (**силова площина**) проходить через одну з *головних центральних осей* поперечного перерізу бруса, згин називають **плоским прямим**. При цьому викривлена вісь бруса буде плоскою кривою, яка розташована в силівій площині.

Якщо навантаження не лежать в одній силівій площині, то і викривлена вісь бруса буде просторовою кривою. У такому разі маємо *складний просторовий згин*. Таку схему навантаження можна

розглядати як суперпозицію двох плоских прямих згинів, для чого усі навантаження треба розкласти на складові на головних осях інерції перерізу.

Поперечна сила в перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі всіх зовнішніх сил, які діють справа або зліва від перерізу.

Правило знаків. Зовнішні сили, які намагаються повернути відрізану частину балки, відносно перерізу, за ходом часової стрілки визивають додатну поперечну силу, і навпаки проти ходу часової стрілки від'ємну (рис. 2).

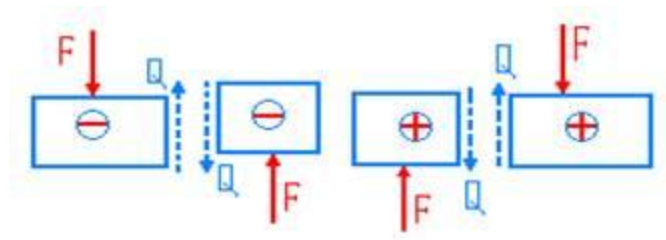


Рис. 2

Згинальний момент у перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів відносно центра ваги перерізу всіх зовнішніх сил, які діють справа або зліва від перерізу.

Правило знаків. Якщо зовнішнє навантаження намагається зігнути балку опуклістю донизу, то згинальний момент у перерізі вважають додатним, і навпаки (рис. 3).



Рис. 3

2. Диференціальні залежності між згинальним моментом, поперечною силою та інтенсивністю розподіленого навантаження

Між згинальним моментом, поперечною силою і інтенсивністю розподіленого навантаження існують **диференціальні залежності**, в основі яких лежить **теорема Журавського**, названа так за ім'ям визначного російського інженера-мостобудівника Д.І. Журавського (1821–1891). Цю теорему формулюють так: **поперечна сила дорівнює першій похідній від згинального моменту за абсцисою перерізу балки:**

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx}.$$

Якщо рівняння згинальних моментів (для ділянок з рівномірно розподіленим навантаженням) продиференціювати вдруге, то матимемо

$$\frac{dM_x^2}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = q$$

Друга похідна від згинального моменту або перша похідна від поперечної сили за абсцисою перерізу балки дорівнює інтенсивності розподіленого навантаження.

3. Побудова епюр поперечних сил та згинальних моментів

Під час побудови епюр поперечних сил і згинальних моментів рекомендується дотримуватися такої **послідовності**:

- 1) Визначити реакції опор (для консолі їх можна не знаходити).
- 2) Розбити брус на ділянки, границями яких є перетини, в яких прикладені зосереджені сили і пари або розпочинається чи закінчується розподільне навантаження. Такі перетини називають характерними.
- 3) Користуючись методом перетинів, будуємо епюру поперечних сил. Якщо поперечна сила, змінюючись безперервно, проходить через нульове значення, то необхідно визначити абсцису перерізу, де Q стає нульовим.
- 4) Визначити в характерних перетинах значення згинальних моментів і за знайденими ординатами побудувати епюру M_x .

Взаємозв'язок між видами епюр і навантаженням

Для епюри поперечних сил

- 1) На ділянках, де прикладено рівномірно розподільне навантаження, епюра – похила пряма, нахил прямої до осі балки залежить від інтенсивності навантаження.
- 2) На ділянках, вільних від рівномірно розподільного навантаження, епюра – пряма паралельна осі балки.
- 3) У перетинах, де прикладено зосереджену силу, значення поперечної сили змінюється стрибкоподібно, до того ж стрибок дорівнює модулю цієї сили.
- 4) У перетинах, де прикладено пару сил, значення поперечної сили не змінюється.
- 5) У кінцевих перетинах балки поперечна сила чисельно дорівнює зосередженим силам, які прикладені у цьому перерізі. Якщо в кінцевому перерізі не прикладені зосереджені сили, поперечна сила в них рівна нулю.

Для епюри згинальних моментів

- 1) На ділянках, де прикладено рівномірно розподільне навантаження, епюра моментів є параболою. Опуклість параболи спрямовано в бік протилежний дії навантаження (на зустріч навантаженню).

2) На ділянках, вільних від рівномірно розподільного навантаження, епюра моментів похила пряма. Під зосередженими силами на епюрі утворюються згини, тобто для декількох ділянок епюра – ломана лінія.

3) У перерізі, де прикладено пару сил, значення згинального моменту змінюється стрибкоподібно, до того ж стрибок дорівнює моменту пари.

4) На кінці балки згинальний момент дорівнює нулю, якщо там не прикладено пари сил. Якщо в кінцевому перерізі прикладено зовнішню пару сил, то згинальний момент дорівнює моменту пари.

5) На ділянках, де $Q = 0$, балка відчуває чистий згин і епюра згинальних моментів – пряма паралельна осі балки.

6) Згинальний момент має екстремальне значення (*max* або *min*) в перетинах, де змінено знак поперечної сили.

4. Нормальні напруження в поперечних перерізах за згину. Осьові моменти опору

У поперечному перерізі балки за чистого згину виникають тільки **нормальні напрути** розтягу і стиску.

Для доказу розрахункових формул вводять такі **припущення**, які зроблені на основі досліджень:

1) плоский поперечний переріз балки за чистого згину залишається плоским до і після деформації (гіпотеза плоских перетинів);

2) поздовжні волокна не тиснуть одне на одне, тобто під дією нормальних напружень вони перебувають у лінійному напруженому стані.

Навантажуючи гумову модель двома протилежними парами сил, можна зробити такий висновок (рис. 4.): **за чистого згину поперечні перетини повертаються, повздовжні волокна на опуклому боці видовжуються, а на вгнутому – стискаються.**

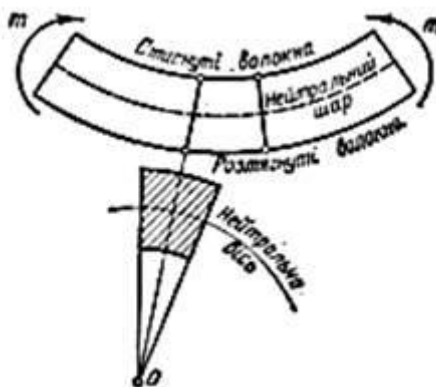


Рис. 4

На межі між ними лежить **нейтральний шар** волокон, які тільки викривляються, не змінюючи своєї довжини.

Приймаючи гіпотезу про ненатискання волокон, можна стверджувати, що за чистого згину в поперечних перетинах бруса виникають тільки нормальні напруги розтягу і стиску, які нерівномірно розподілені за висотою перерізу і залишаються сталими за шириною.

Викривлення волокон і осі бруса відбувається внаслідок нерівномірного розподілу нормальних напружень на поперечному перерізі. Лінія перетину нейтрального шару з площиною поперечного перерізу називають **нейтральною віссю**. На нейтральній осі напруги дорівнюють нулю.

Як було встановлено раніше, в поперечних перетинах балки у випадку чистого згину виникають тільки нормальні напруги розтягу і стиску. Щоб визначити розподіл цих напруг на поперечному перерізі, треба розглянути деформації волокон балки.

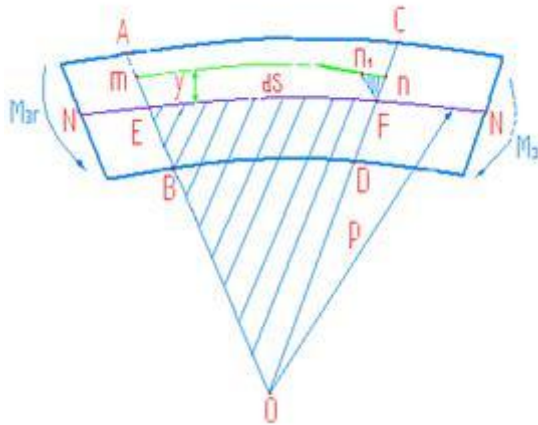


Рис. 5

Розглянемо ділянку балки, яка зазнає деформації чистого згину. Двома поперечними перетинами AB і CD виділимо елемент балки нескінченно малої довжини ds (рис. 5). Радіус кривизни **нейтрального шару** позначимо ρ . Розглянемо шар волокон, який знаходиться на відстані y від нейтрального шару NN . Це волокно як результат деформації згину видовжилось на величину nn_1 . Зважаючи на малість відстані ds , заштриховані трикутники вважаємо прямолінійними; ці трикутники подібні.

$$(n_1F \parallel mE): \quad \Delta OEF \approx \Delta Fnn_1$$

З подібності трикутників маємо $\frac{nn_1}{ds} = \frac{y}{\rho}$. Через те, що ліва частина цієї рівності є відносним видовженням, тобто $\frac{nn_1}{ds} = \varepsilon$, то $\frac{y}{\rho} = \varepsilon$.

Застосувавши закон Гука для розтягу і стиску $\sigma = E \cdot \varepsilon$, матимемо:

$$\sigma = E \cdot \frac{y}{\rho}.$$

З цієї формули видно, що нормальні напруги деформації згину розподілені за висотою перерізу **нерівномірно**: максимальні напруги виникають у волокнах, найбільше віддалених від нейтральної осі. За шириною перерізу нормальні напруги не змінюються. **Закон розподілу нормальних напруг** зображено на рис. 6.

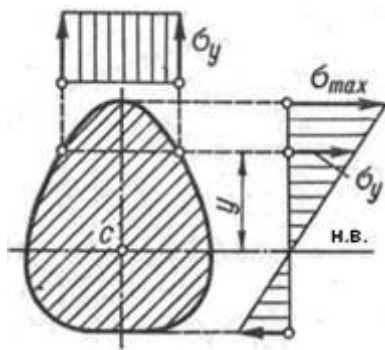


Рис. 6

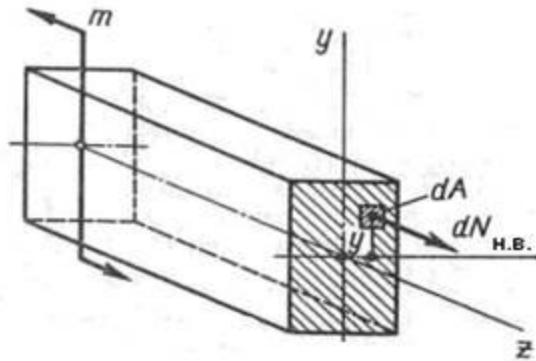


Рис. 7

Ця формула для обчислення нормальних напруг незручна, бо до неї входить радіус кривизни нейтрального шару. Щоб знайти формулу, яка зв'язує нормальні напруги і згинальний момент, застосуємо **метод перетинів** і розглянемо рівновагу частини балки, зображеної на рис. 7.

У площині поперечного перетину виділимо нескінченно малу площадку dA , у межах якої вважатимемо нормальні напруги σ сталими; тоді нормальна сила dN , що діє на площадку dA , дорівнюватиме $dN = \sigma \cdot dA$. Складемо два рівняння рівноваги:

$$1) \sum F_z = 0; \quad \int_A dN = 0; \quad \int_A \sigma \cdot dA = \int_A \frac{E \cdot y}{\rho} \cdot dA = \frac{E}{\rho} \int_A y \cdot dA = 0$$

(ρ для цього перерізу величина стала, тому її винесено за знак інтеграла).

$$\text{Оскільки } E \text{ і } \rho \text{ не дорівнюють нулю, то } \int_A y \cdot dA = 0.$$

Цей інтеграл є **статичним моментом площі** перерізу відносно осі x , тобто нейтральної осі. Те, що статичний момент дорівнює нулю, означає, що під час згину нейтральна вісь проходить через **центр ваги** площі поперечного перетину.

$$2) \sum M_x = 0; \quad -m + \int_A y \cdot dN = 0;$$

оскільки за чистого згину згинальний момент дорівнює зовнішньому моменту $M_{xz} = m$, то:

$$M_{xz} = \int_A y \cdot dN = \int_A y \cdot \sigma \cdot dA = \int_A y \cdot \frac{E \cdot y}{\rho} \cdot dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 \cdot dA,$$

$$\text{звідки } M_{xz} = \frac{E \cdot I}{\rho},$$

де: $I = \int_A y^2 \cdot dA$ – момент інерції перерізу відносно нейтральної осі,
 EI – жорсткість перерізу за згину.

Оскільки у випадку чистого згину балки сталого перерізу:

$$M_{zz} = \text{const} \quad \text{і} \quad I = \text{const, то} \quad \rho = \frac{E \cdot I}{M_{zz}} = \text{const.}$$

Отже, зігнута вісь такої балки є **дугою кола**.

Значення радіуса кривизни підставимо у формулу для обчислення нормальних напруг, тоді:

$$\sigma = \frac{E \cdot y}{\rho} = \frac{E \cdot y}{E \cdot I / M_{zz}} = \frac{M_{zz} \cdot y}{I}.$$

Максимальні значення нормальних напруг будуть там, де волокна **найбільш віддалені** від нейтральної осі:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{zz} \cdot y_{\max}}{I} = \frac{M_{zz}}{I / y_{\max}} = \frac{M_{zz}}{W},$$

$$W = \frac{I}{y_{\max}}$$

де $y_{\max}$ – момент опору згину.

Момент опору згину є відношення осьового моменту інерції поперечного перетину відносно нейтральної осі до відстані від цієї осі до найбільш віддаленого волокна.

Значення моментів опору деформації згину найбільш поширених перерізів.

$$\begin{aligned} 1) \text{ Прямокутник } b \times h: \quad W_x &= \frac{b \cdot h^2}{6}; \quad W_y = \frac{b^2 \cdot h}{6}. \\ 2) \text{ Круг діаметром } d: \quad W &= \frac{\pi \cdot d^3}{32} \approx 0,1 \cdot d^3. \end{aligned}$$

5. Розрахунки на міцність за згину. Рациональні форми поперечних перерізів балок за згину

Умова міцності балки для випадку згину полягає в тому, що максимальна нормальна напруга в небезпечному перерізі не має перевищувати допустиму.

Вважаючи, що гіпотеза про ненависання волокон дійсна не тільки для чистого, а й для поперечного згину, нормальні напруги в поперечному перерізі у випадку поперечного згину можна обчислювати за тією самою формулою, що й у випадку чистого згину. Розрахункова формула на міцність у випадку згину має вигляд:

$$\sigma = \frac{M_{zz\max}}{W} \leq [\sigma]$$

її читають так: нормальна напруга в небезпечному перерізі, не має перевищувати допустиму. **Допустиму нормальну напругу** для випадку згину **беруть такою самою, як для розтягу і стиску**.

Максимальний згинальний момент визначають з епюр згинальних моментів або розраховують.

Оскільки момент опору деформації згину W у розрахунковій формулі стоїть у знаменнику, то що більше W , то менші розрахункові напруги.

Для балок, матеріал яких неоднаково працює на розтяг і стиск (наприклад чавун), доцільно використовувати профілі, **несиметричні відносно нейтральної осі**, наприклад таврові або П-подібні. Оскільки у несиметричному профілю під час згину виникають неоднакові напруги розтягу і стиску, то переріз, наприклад, чавунної балки вигідно розміщувати таким чином, щоб менші напруги були у зоні розтягнутих, а більші – в зоні стиснених волокон.

Для розрахунків балок із **крихкого** матеріалу використовують дві умови міцності:

$$\begin{aligned} & \text{- для розтягнутої зони} \quad \sigma_{\text{роз.мах}} = \frac{|M|_{\text{мах}} \cdot y_{\text{роз.}}}{I_x} \leq [\sigma_p]; \\ & \text{- для стисненої зони} \quad \sigma_{\text{ст.мах}} = \frac{|M|_{\text{мах}} \cdot y_{\text{ст.}}}{I_x} \leq [\sigma_{\text{ст}}]. \end{aligned}$$

Використання матеріалу буде найкращим, за умови що

$\sigma_{\text{роз.мах}} = [\sigma_p]; \quad \sigma_{\text{ст.мах}} = [\sigma_{\text{ст}}]$, для цього має виконуватися умова $\frac{y_{\text{роз.}}}{y_{\text{ст.}}} = \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_{\text{ст}}]}$ тобто відстань нейтральної осі від найбільш віддалених точок у розтягнутій і стисненій зонах переріза мають бути **пропорційні** відповідній допустимій нарузі.

6. Поняття про дотичні напруження за прямого поперечного згину

У поперечних перерізах балки під час деформації поперечного згину виникають не тільки нормальні, а й **дотичні напруги**, які спричиняють деформацію **зсуву**. Відповідно до закону парності такі самі дотичні напруги виникатимуть і в поздовжніх перерізах, паралельних нейтральному шару. Наявність дотичних напруг у поздовжніх перерізах можна проілюструвати на такому прикладі.

Якщо брус прямокутного перерізу висотою $2h$ навантажити силою, оскільки показано на рис. 8а. Якщо з такого самого матеріалу виготовити два бруси висотою h кожний, то за навантаження силою F і відсутності тертя між ними вони зігнуться кожен сам по собі рис. 8б, звідси видно, що за згину цілого бруса висотою $2h$ між частинами бруса, розділеними поздовжніми волокнами, виникає взаємодія, як результат якої і виникають дотичні

напруги. Наявність дотичних напруг у поздовжніх перерізах підтверджується появою в дерев'яних балках за поперечного згину поздовжніх тріщин.

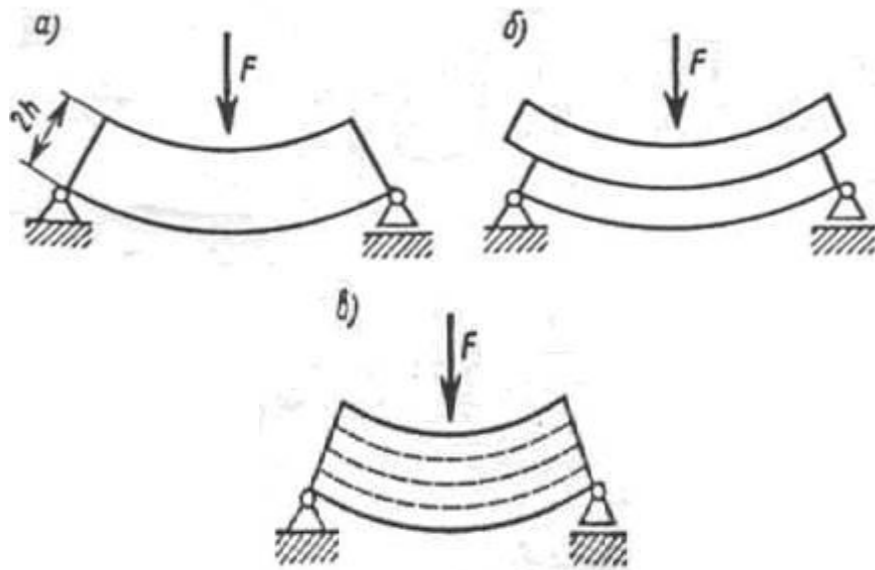


Рис. 8

Формулу для обчислення дотичних напруг поперечного згину балок прямокутного перерізу вивів у 1855 р. російський інженер-мостобудівник **Д.І. Журавський**. Така формула була потрібна в зв'язку з тим, що в минулому столітті для будівництва мостів широко використовували дерев'яні конструкції, а балки з деревини зазвичай мають прямокутний переріз і погано працюють на сколювання вздовж волокон:

$$\tau = \frac{Q \cdot S}{I \cdot b},$$

де: Q – поперечна сила в перерізі;

S – статичний момент відносно нейтральної осі частини перерізу, яка лежить вище від розглянутого шару волокон ;

I – момент інерції перерізу відносно нейтральної осі;

b – ширина розглядуваного шару волокон.

Цю рівність називають **формулою Журавського**, за нею визначають дотичні напруги в балках симетричного перерізу.

Формулу Журавського читають так: *дотичні напруги в поперечному перерізі балки дорівнюють добутку поперечної сили Q на статичний момент S відносно нейтральної осі частини перерізу, яка лежить вище від розглядуваного шару волокон, поділеному на момент інерції I всього перерізу відносно нейтральної осі і на ширину b розглядуваного шару волокон.*

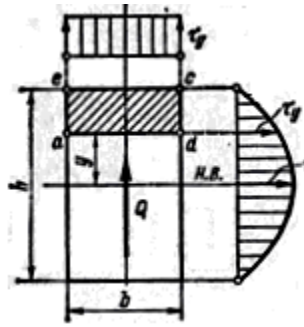


Рис. 9

Визначимо **закон розподілу дотичних напруг** для балки прямокутного перерізу рис. 9 для шару волокон *ad*.

$$S_{adice} = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot \left(\frac{\frac{h}{2} - y}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) ;$$

$$\tau = \frac{Q \cdot S}{I \cdot b} = \frac{Q \cdot \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{b \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}} = \frac{6 \cdot Q \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{b \cdot h^3} ;$$

коли $y = \pm \frac{h}{2}$, то $\tau = 0$;

коли $y = 0$, то $\tau = \tau_{\max} = \frac{3Q}{2bh} = \frac{3Q}{2A} = \frac{3\tau_c}{2}$.

Таким чином, у верхньому і нижньому шарах волокон дотичні напруги дорівнюють **нулю**, а в волокнах нейтрального шару вони досягають **максимального значення**. Закони розподілу дотичних напруг за шириною і висотою прямокутного перерізу показано рис. 9.

Дотичні напруги в балках відповідають деформації зсуву, як результат плоскі поперечні перерізи за поперечного згину не залишаються плоскими, як за чистого згину, а **викривляються**.

Більшість балок розраховують тільки за нормальними напругами; три види балок треба перевірити за дотичними напругами, а саме:

- 1) дерев'яні балки, бо деревина погано працює на сколювання;
- 2) вузькі балки (наприклад, двотаврові), бо максимальні дотичні напруги обернено пропорційні ширині нейтрального шару;
- 3) короткі балки, бо за відносно невеликого згинального моменту й нормальних напругах у таких балках можуть виникати значні поперечні сили і дотичні напруги.

7. Лінійні та кутові переміщення за прямого згину. Розрахунки на жорсткість за згину

У більшості випадків практичного розрахунку деталей, що працюють на згин, необхідно також робити **розрахунок на жорсткість**. Під **розрахунком на жорсткість** розуміється оцінювання пружної піддатливості балки під дією прикладених навантажень і підбір таких розмірів поперечного перерізу, за яких переміщення не будуть перевищувати встановлених нормами меж. Для виконання такого розрахунку необхідно навчитися обчислювати переміщення точок балки під дією будь-якого зовнішнього навантаження, що необхідно також для розрахунку статично невизначених балок.

Розглянемо деформацію балки за плоского згину. Вісь балки (рис. 10) під дією навантаження, розташованого в одній з головних площин інерції (у площині xoy), викривляється в тій самій площині, а поперечні перерізи повертаються й одночасно одержують поступальні переміщення.

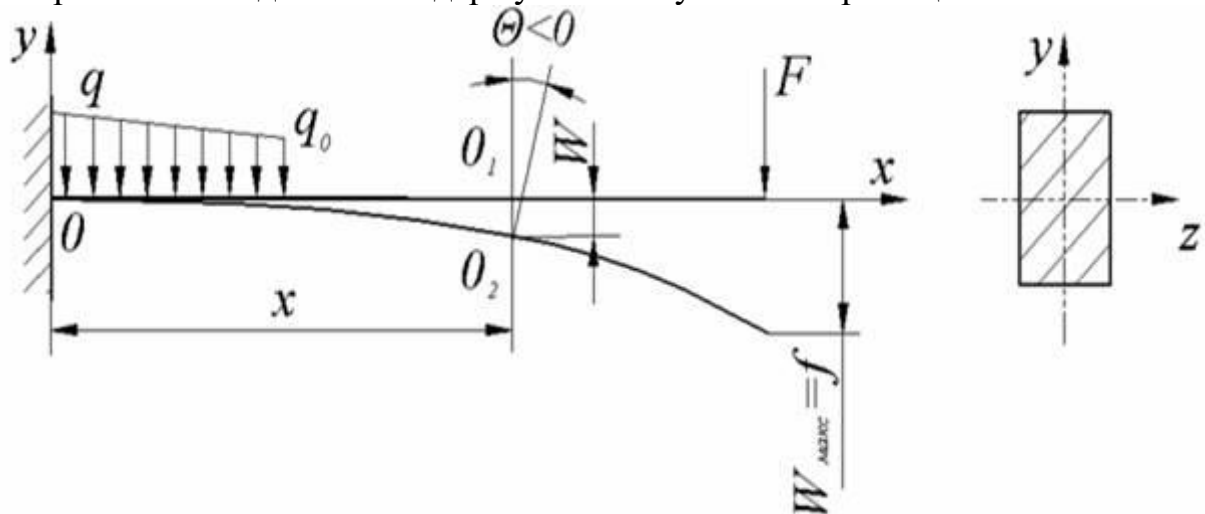


Рис. 10. Прогин за плоского згину

Скривлена вісь балки називається **вигнутою віссю**, або **пружною лінією**. На рис. 10 і 11 пружну лінію зображено тонкою кривою лінією.

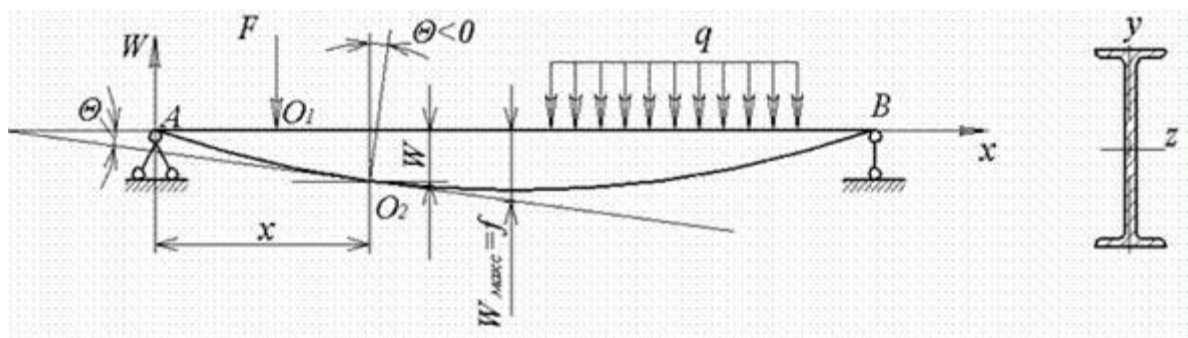


Рис. 11. Кут повороту за згину

Переміщення центра ваги перерізу за напрямком, перпендикулярним до осі балки, називають **прогином** балки в цьому перерізі й позначають літерою w . На рис. 10 і 11 центр ваги довільного перерізу, взятого на відстані x від початку координат, перемістився за вертикаллю із точки O_1 у точку O_2 на відстань O_1O_2 . Це переміщення і є прогином балки $w(x)$ у перерізі

з абсцисою x . Найбільший прогин називається **стрілою прогину** й позначається літерою f .

Кут θ , на який кожний переріз повертається стосовно свого первісного положення, називають **кутом повороту** перерізу. Кут повороту також може бути визначений як кут між дотичною до пружної лінії й віссю x (рис. 11).

Довжина вигнутої осі, що належить нейтральному шару, за скривлення бруса не змінюється, отже, при цьому відбувається зсув її точок також і в напрямку осі x (переміщення O_1O_3 на рис. 12). Однак у більшості випадків зсуви настільки малі, що ними можна знехтувати.

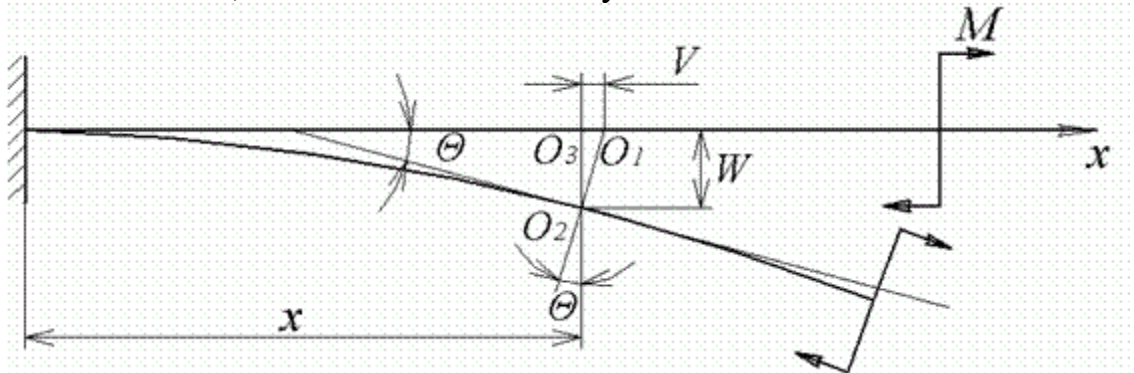


Рис. 12. Горизонтальне переміщення за згину

Умовимося осі координат завжди розміщати таким чином: початок координат поміщати на лівому кінці балки, вісь x спрямовувати вздовж осі балки вправо, а вісь w – вгору.

Прогин w будемо вважати **позитивним**, якщо переміщення відповідної точки відбувається **вгору**, тобто в напрямку осі w . **Кут повороту θ** будемо вважати **позитивним** за повороту перерізу **проти годинникової стрілки**.

У зв'язку з малістю деформацій балок можна вважати $\tan \theta \approx \theta$ тому, що тангенс кута повороту є похідна від ординати прогину:

$$\tan \theta = \frac{dw}{dx}.$$

То з достатнім ступенем точності можна вважати кут повороту θ в цьому перерізі рівним похідної прогину $w(x)$ по абсцисі перерізу:

$$\theta \approx \frac{dw}{dx}.$$

Таким чином, для визначення деформації балки в її довільному перерізі необхідно, насамперед, одержати рівняння пружної лінії:

$$w = F(x).$$

Виходячи з фізичної природи вигнутої осі бруса, можемо затверджувати, що пружна лінія має бути безперервною й гладкою (не має зломів) кривою, отже, впродовж всієї осі бруса мають бути неперервні функція w і її перша похідна. Прогини й кути повороту і є переміщеннями перерізів балок за вигину. Деформація тої або іншої ділянки балки визначається скривленням його вигнутої осі, тобто кривизною. Тому що вплив поперечної сили на кривизну малий, то в загальному випадку поперечного вигину рівняння можна записати у вигляді:

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI(x)}.$$

З курсу вищої математики відомо наступне рівняння кривизни плоскої кривої:

$$\frac{1}{\rho(x)} = \pm \frac{\frac{d^2 w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Тепер для одержання диференціального рівняння вигнутої осі залишається прирівняти праві частини цих виразів, з'ясувавши попередньо питання про знак.

Якщо згинальний момент позитивний, то пружна лінія своєю ввігнутою стороною звернена нагору (рис. 13а), отже, за прийнятого напрямку координатних осей кривизна $k=1/\rho$ – вважається позитивною. За негативного згинального моменту кривизна також буде негативною (рис. 13б). Якби вісь w була спрямована донизу, то за позитивного згинального моменту кривизна була б негативною (рис. 13в), а за негативного моменту – позитивною (рис. 13г).

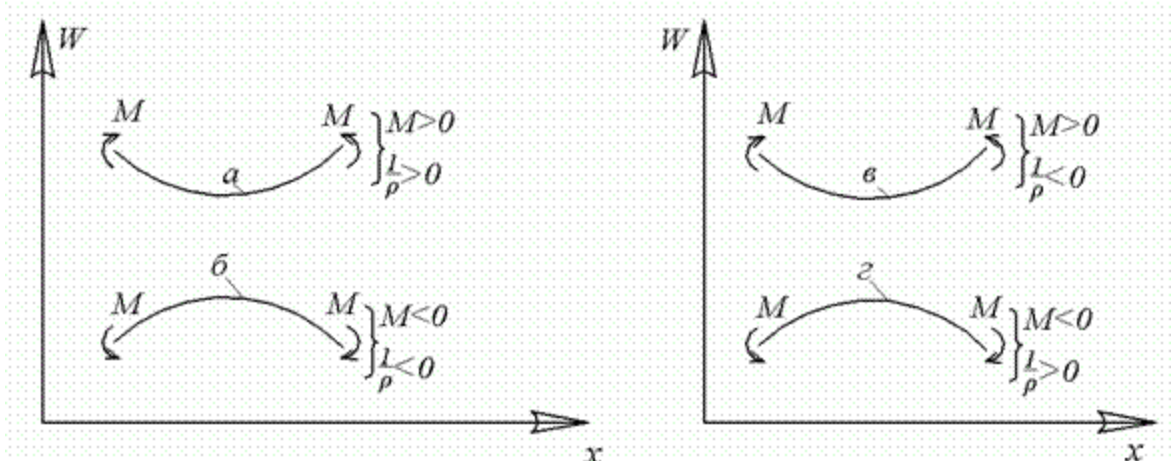


Рис. 13. Правило знаків

Зберігаючи прийнятий напрямок осі w вгору, маємо відповідність між знаком моменту й знаком кривизни, тому можна прирівняти праві частини:

$$\frac{\frac{d^2 w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M(x)}{EI(x)}.$$

Якби вісь w була спрямована донизу, то в правій частині варто було б поставити знак мінус.

Отримане рівняння називають **точним рівнянням вигнутої осі бруса**. Воно є нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку,

інтегрування якого, як відомо, має значні труднощі. У зв'язку з цим і тому що в переважній більшості розглянутих на практиці завдань прогини малі, точне рівняння заміняють наближеним рівнянням – рівнянням для малих переміщень.

У знаменнику рівняння стоїть сума двох доданків:

$$1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 = 1 + tg^2 \theta.$$

За малих деформацій величина другого доданка в багато разів менше першого. Дійсно, за розрахунку звичайних машинобудівних або будівельних елементів норми допустимого прогину становлять 1/100–1/1000 прольоту залежно від умов роботи балки, а кути повороту, що виходять при цьому, не перевищують 10.

Навіть, прийнявши більшу межу для прогину ($f=1/100$), найбільшу величину тангенса θ одержимо наступного порядку:

$$tg \theta \approx tg 1^\circ \approx 0,02.$$

Таким чином, значення $tg^2 \theta$ не перевершує 0,0004, тобто досить мало порівняно з одиницею. Цими величинами й можна зневажити без відчутної для практичних цілей помилки. Тоді одержимо таке спрощене диференціальне рівняння пружної лінії:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI(x)},$$

у якому величина згинального моменту обчислюється для недеформованої балки. Надалі це рівняння будемо називати **основним диференціальним рівнянням пружної лінії** (для малих деформацій). З його допомогою можна обчислювати переміщення в балках за будь-яких умов навантаження.

Вирішуючи завдання аналітичним методом, кути повороту $\theta(x)$ й прогини $w(x)$ обчислюють послідовним інтегруванням основного диференціального рівняння. Проінтегрувавши рівняння перший раз, одержимо вираз для кута повороту $\theta(x)$:

$$\theta(x) = \frac{dw}{dx} = \int \frac{M(x)}{EI(x)} dx + C,$$

утримуюче одну довільну постійну C .

Інтегруючи другий раз, знаходимо вираз для прогину $w(x)$:

$$w(x) = \int dx \int \frac{M(x)}{EI(x)} dx + Cx + D,$$

який має довільні постійні C і D .

Значення постійних C і D визначають із умов закріплення балки в такий спосіб:

а) якщо балка має на кінці закладення (рис. 14), то прогин і кут повороту в ній дорівнюють нулю:

$$w_B = 0; \quad \theta_B = 0;$$

б) для балки на двох шарнірних опорах (рис. 11) прогини на цих опорах дорівнюють нулю:

$$w_A = 0; \quad w_B = 0.$$

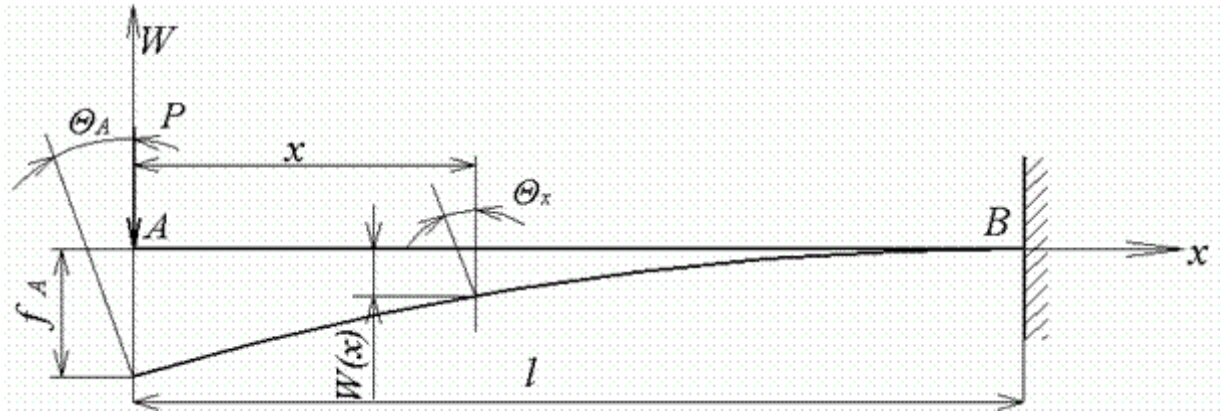


Рис. 14. Консольна балка

Зауважимо, що рівняння пружної лінії іноді зручно записати в іншій формі, вважаючи заданим не момент $M(x)$, а навантаження $q(x)$.

Згадавши, що $d^2M/dx^2 = q(x)$, і продиференціювавши рівняння два рази, одержимо:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] = q(x).$$

Рівняння пружної лінії у формі застосовують за розрахунку балок на пружній основі й розгляду коливань балок.

Запитання для самоконтролю

1. Яку деформацію називають згином?
2. Що називають балкою?
3. Який згин називають чистим, а який поперечним?
4. Які внутрішні силові фактори виникають у поперечних перерізах за згину?
5. Чому дорівнює поперечна сила і згинальний момент у перерізі балки?
6. Сформулюйте правило знаків для поперечних сил і згинальних моментів.
7. Яка диференційна залежність існує між згинальним моментом, поперечною силою і інтенсивністю розподіленого навантаження?
8. Укажіть послідовність побудови еюр поперечних сил і згинальних моментів.
9. Який взаємозв'язок існує між видами еюр і навантаженням?
10. Які напруги виникають у поперечному перерізі балки за чистого згину?
11. Які припущення вводять під час доказу розрахункових формул?
12. Які волокна розтягуються за згину, а які стискаються?
13. Що називають нейтральним шаром і нейтральною віссю?
14. За якою формулою визначають максимальні нормальні напруги?

15. Що називають моментом опору за згину?
16. За якими формулами визначають моменти опору для прямокутника і круга?
17. Чи однаковий вираз має умова міцності для пластичного і крихкого матеріалу за згину?
18. Яку деформацію спричиняють дотичні напруження за згину?
19. Як читають формулу Журавського?
20. Як розподіляють дотичні напруження на перерізі балки?
21. Що розуміють під розрахунком балок на жорсткість за згину?
22. Що називають прогином балки та стрілою прогину?
23. Що називають кутом повороту перерізу?
24. За якими формулами визначають кут повороту і прогин балки?

Тема 2.7. Теорії міцності

План

1. Складне навантаження бруса. Еквівалентні напружені стани та еквівалентні напруження
2. Теорії міцності
3. Розрахунок бруса круглого поперечного перерізу на згин з крученням

1. Складне навантаження бруса. Еквівалентні напружені стани та еквівалентні напруження

На практиці можливі випадки, коли під дією зовнішніх сил матеріал зазнає розтягу або стиску у двох і трьох напрямках, тобто матеріал перебуває в умовах **складного (плоского або об'ємного) напруженого стану**.

У напруженому тілі у двох взаємно перпендикулярних площадках діють **найбільші** та **найменші** напруги, яких називають **головними**. У цих площадках немає дотичних на пруг, тому їх називають головними.

У напруженому тілі можна виділити елементарний кубик, уздовж граней якого діятимуть лише головні нормальні напруги: найбільша за алгебраїчною величиною σ_1 , проміжна σ_2 і найменша σ_3 .

За розрахунку конструктивних елементів на міцність розрізняють **три види напруженого стану**:

- **об'ємний**, коли всі три головні напруги не дорівнюють нулю;
- **плоский**, коли одна головна напруга дорівнює нулю;
- **лінійний**, коли дві головні напруги дорівнюють нулю.

Досі розглядали випадки поєднання основних деформацій, коли в поперечних перетинах бруса виникають тільки нормальні напруги, які в кожній точці можна було додавати алгебраїчно.

Проте часто трапляються і мають велике практичне значення випадки поєднання основних деформацій, коли в поперечних перетинах виникають

нормальні і дотичні напруги, розподілені нерівномірно і за різними законами. У таких випадках дослідно визначити величини, що характеризують міцність, неможливо, тому для оцінювання міцності деталі доводиться враховувати механічні характеристики цього матеріалу, добуті з діаграми розтягу.

Як відомо, міцність пластичних матеріалів на розтяг характеризують границею текучості, а крихких – границею міцності; ці напруги вважають граничними і залежно від них обчислюють допустимі напруги. Тому граничний напружений стан у пластичних матеріалів настає за появи залишкових деформацій, а крихких на початку руйнування.

Основне завдання теорії граничних напруг складається в розробці припущень, які дозволяють порівняти різнотипні напружені стани з точки зору близькості їх до граничного стану. Порівняння різнотипних напружених станів виконують за допомогою *еквівалентного напруженого стану*, а за еквівалентний береться найбільш вивчений напружений стан за простого розтягу.

Еквівалентною напругою називають таку умовну напругу одновісного розтягу, яка рівнонебезпечна заданому випадку поєднання основних деформацій.

2. Теорії міцності

Перехід до еквівалентного напруженого стану виконують за допомогою гіпотез міцності.

Гіпотези міцності – це наукові припущення про основні причини настання у матеріалі граничного напруження стану за поєднання основних деформацій.

Напружені стани під час поєднання основних деформацій і одновісного розтягу називатимемо рівнонебезпечними або еквівалентними, якщо їх головні напруги відрізняються від граничної для цього матеріалу в однакову кількість разів, інакше кажучи, коефіцієнти запасу міцності для еквівалентних напружених станів однакові.

Оцінювання міцності за теорією граничних напруг відбувається за такою схемою: перехід від складного напруженого стану до еквівалентного за допомогою гіпотез міцності, а потім еквівалентний напружений стан зіставляють з допустимою напругою на розтяг.

Таким чином, умова міцності для випадку поєднання основних деформацій, коли в поперечних перетинах діють нормальні і дотичні напруги, матиме вигляд $\sigma_{екв} \leq [\sigma_p]$.

Сформулюємо і охарактеризуємо гіпотези міцності і наведемо відповідні формули для обчислення еквівалентних напруг.

1. Гіпотеза найбільших нормальних напруг (перша теорія міцності), була висунута Галілеєм у XVII столітті.

Причиною руйнування за цією гіпотезою є найбільші нормальні напруги розтягу σ_p і стиску σ_c , без врахування двох інших головних напруг.

Ця теорія дає досить задовільні результати тільки за розрахунку конструктивних елементів з крихких матеріалів.

Істотним протиріччям першої теорії міцності є те, що кубик за всебічному стиску, як показали досліди, витримує набагато більші напруги, ніж за простого стиску.

2. Гіпотеза найбільших відносних деформацій (друга теорія міцності) висунута в 1682 році Е. Маріоттом.

За цією теорією міцність матеріалу досягне критичного стану за максимального значення лінійної деформації ε . Цю теорію міцності для пластичних матеріалів не підтверджують досліди, але для крихких матеріалів її результативно узгоджено експериментом.

3. Гіпотеза найбільших дотичних напруг (третья теорія міцності).

Згідно з цією гіпотезою, яку запропонував у 1773 році Ш. Кулон, небезпечний стан матеріалу настає тоді, коли найбільші дотичні напруги досягають граничної величини, за якої можлива втрата міцності шляхом зсуву і ковзання однієї частини матеріалу по другій.

Гіпотеза найбільших дотичних напруг добре підтверджують досліди, особливо для пластичних матеріалів.

За цією гіпотезою для триосного напруженого стану $\sigma_{\text{екв.}} = \sigma_1 - \sigma_3$;

Для двоосного напруженого стану: $\sigma_{\text{екв.}} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$.

Тотожна з третьою теорією міцності **гіпотеза Мора**, яку запропоновано на початку ХХ ст. Згідно з цією гіпотезою небезпечний стан матеріалу настає тоді, коли на деякій площадці трапляється найбільш несприятлива комбінація нормальної і дотичної напруг.

4. Енергетична гіпотеза (четверта, або енергетична, теорія міцності).

Під час деформації елементарної частинки тіла в загальному випадку змінюються його форму і об'єм. Таким чином, повна потенціальна енергія деформації складається з двох частин: енергії зміни форми і енергії зміни об'єму. Енергетична гіпотеза міцності за критерій переходу матеріалу до граничного стану приймає тільки енергію зміни форми.

Згідно з цією гіпотезою, яку запропоновано на початку ХХ ст., небезпечний стан матеріалу в цій точці настає тоді, коли питома потенціальна енергія зміни форми для цієї точки досягає граничної величини.

Формула для обчислення еквівалентних напруг для двоосного напруженого стану: $\sigma_{\text{екв.}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2}$.

Розрахунки за гіпотезами міцності в багатьох випадках позбавляють проектувальників і конструкторів необхідності випробовувань конструкції на міцність.

3. Розрахунок бруса круглого поперечного перерізу на згин з крученням

Одночасних деформацій згину і кручення зазнає більшість валів, які зазвичай є прямими брусами круглого або кільцевого перерізу. Для розрахунку валів братимемо до уваги тільки **крутний і згинальний моменти**, які діють у небезпечному поперечному перерізі, і не братимемо до уваги поперечні сили, оскільки відповідні їм дотичні напруги відносно невеликі.

Максимальні нормальні і дотичні напруги для круглих валів обчислюють за формулами: $\sigma = \frac{M_{zz}}{W_x}$, $\tau = \frac{M_K}{W_p}$, причому для круглих валів $W_p = 2W_x$.

У випадку одночасного згину і кручення небезпечними будуть точки небезпечного поперечного перерізу вала, які найбільше віддалені від нейтральної осі.

Застосувавши третю теорію міцності, дістанемо:

$$\sigma_{екв.} = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{zz}}{W_x}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{M_K}{W_p}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{zz}}{W_x}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{M_K}{2 \cdot W_x}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_{zz}^2 + M_K^2}}{W_x}.$$

Вираз, що стоїть в чисельнику, назвемо **еквівалентним моментом**:

$$M_{екв.} = \sqrt{M_{zz}^2 + M_K^2},$$

тоді розрахункова формула для круглих валів матиме вигляд:

$$\sigma_{екв.} = \frac{M_{екв.}}{W_x} \leq [\sigma].$$

За цією формулою круглі вали розраховують, як на згин, але не за згинальним, а за еквівалентним моментом.

За енергетичною теорією міцності $M_{екв.} = \sqrt{M_{zz}^2 + 0,75 \cdot M_K^2}$.

Приклад розв'язку задачі

Для сталевого вала постійного поперечного перерізу рис. 1, який передає потужність $P = 8$ кВт, за кутової швидкості $\omega = 23$ с⁻¹ необхідно: побудувати епюру крутних моментів; побудувати епюри згинальних моментів у вертикальній і горизонтальній площинах; визначити необхідний діаметр вала.

Розрахунок виконати за гіпотезою найбільших дотичних напружень. Прийняти $Fr = 0,37 \cdot F$, $[\sigma] = 55$ МПа.

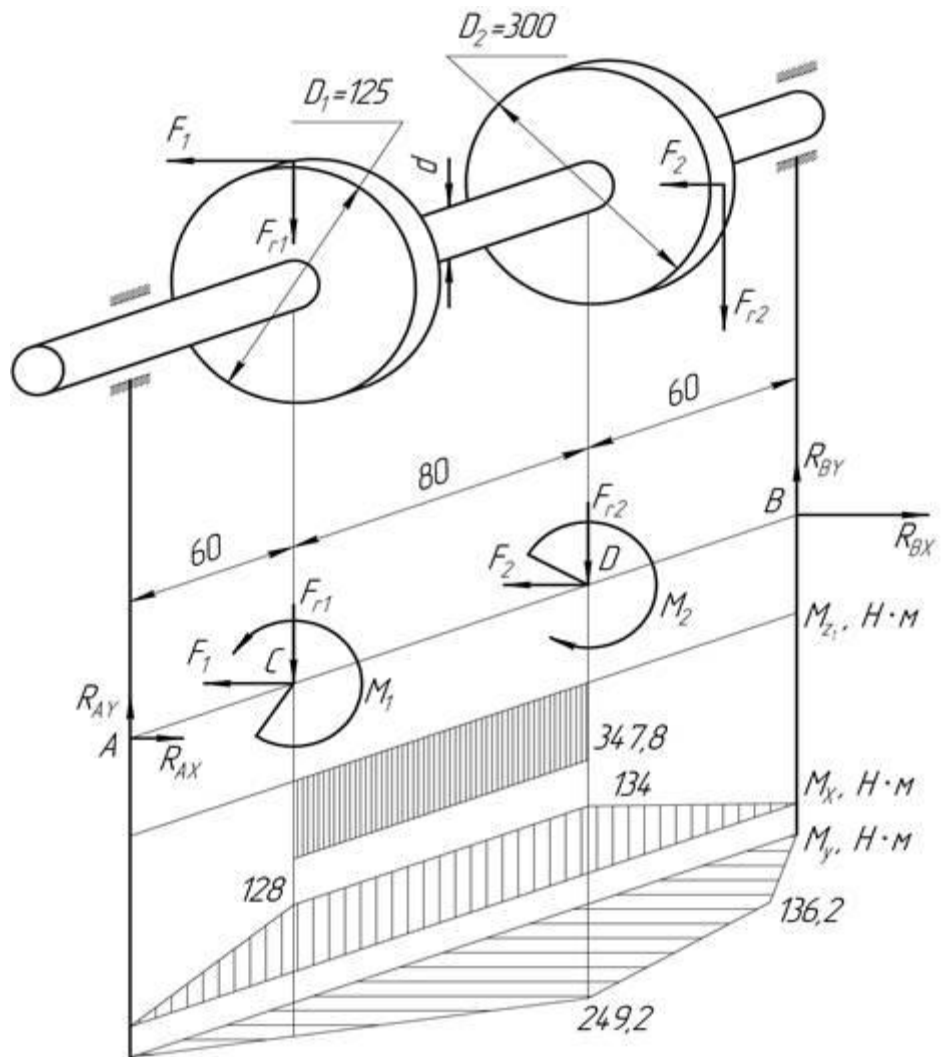


Рис. 1

Розв'язок

1) Визначаємо обертальний момент, що передає вал:

$$M_1 = M_2 = \frac{P}{\omega} = \frac{8 \cdot 10^3}{23} = 347,8 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

2) Визначаємо колові сили, що діють на зубчасті колеса:

$$F_1 = \frac{2 \cdot M_1}{d_1} = \frac{2 \cdot 347,8}{0,125} = 5565 \text{ Н}; \quad F_2 = \frac{2 \cdot M_2}{d_2} = \frac{2 \cdot 347,8}{0,3} = 2319 \text{ Н}$$

3) Визначаємо радіальні зусилля:

$$F_{r1} = 0,37 \cdot F_1 = 0,37 \cdot 5565 = 2059 \text{ Н}; \quad F_{r2} = 0,37 \cdot F_2 = 0,37 \cdot 2319 = 858 \text{ Н}$$

Складаємо розрахункову схему вала (рис. 1).

4) Визначаємо реакції опор у вертикальній площині:

$$\begin{aligned} \sum M_A &= -F_{r1} \cdot AC - F_2 \cdot AD + R_{BY} \cdot AB = 0; \\ \sum M_B &= F_{r1} \cdot CB + F_2 \cdot DB - R_{AY} \cdot AB = 0 \end{aligned}$$

$$R_{BY} = \frac{F_{r1} \cdot AC + F_2 \cdot AD}{AB} = \frac{2059 \cdot 0,06 + 2319 \cdot 0,14}{0,2} = 2241 \text{ H};$$

$$R_{AY} = \frac{F_{r1} \cdot CB + F_2 \cdot DB}{AB} = \frac{2059 \cdot 0,14 + 2319 \cdot 0,06}{0,2} = 2137 \text{ H}.$$

Перевірка: $\sum F_Y = R_{AY} - F_{r1} - F_2 + R_{BY} = 2137 - 2059 - 2319 + 2241 = 0.$

Рівність $\sum F_Y = 0$, отже R_{AY} і R_{BY} визначені правильно.

5) Визначаємо реакції опор у горизонтальній площині:

$$\sum M_A = F_1 \cdot AC + F_{r2} \cdot AD - R_{BX} \cdot AB = 0;$$

$$\sum M_B = -F_1 \cdot CB - F_{r2} \cdot DB + R_{AX} \cdot AB = 0.$$

$$R_{BX} = \frac{F_1 \cdot AC + F_{r2} \cdot AD}{AB} = \frac{5565 \cdot 0,06 + 858 \cdot 0,14}{0,2} = 2270 \text{ H};$$

$$R_{AX} = \frac{F_1 \cdot CB + F_{r2} \cdot DB}{AB} = \frac{5565 \cdot 0,14 + 858 \cdot 0,06}{0,2} = 4153 \text{ H}.$$

Перевірка: $\sum F_X = -R_{AX} + F_1 + F_{r2} - R_{BX} = -4153 + 5565 + 858 - 2270 = 0.$

Рівність $\sum F_X = 0$, отже R_{AX} і R_{BX} визначені правильно.

6) Будуємо епюру крутних моментів MZ .

7) Визначаємо значення згинальних моментів MX у характерних перерізах у вертикальній площині і будуємо їх епюру:

$$M_{AX} = 0; \quad M_{CX} = R_{AY} \cdot AC = 2137 \cdot 0,06 = 128,22 \text{ H} \cdot \text{м};$$

$$; \quad M_{DX} = R_{AY} \cdot AD - F_{r1} \cdot CD = 2137 \cdot 0,14 - 2059 \cdot 0,08 = 134 \text{ H} \cdot \text{м}; \quad M_{BX} = 0.$$

8) Визначаємо значення згинальних моментів MU у характерних перерізах у горизонтальній площині і будуємо їх епюру:

$$M_{AY} = 0; \quad M_{CV} = -R_{AX} \cdot AC = -4153 \cdot 0,06 = -249,2 \text{ H} \cdot \text{м};$$

$$; \quad M_{DV} = -R_{AX} \cdot AD + F_1 \cdot CD = -4153 \cdot 0,14 + 5565 \cdot 0,08 = -136,2 \text{ H} \cdot \text{м}; \quad M_{BY} = 0.$$

9) Визначаємо сумарні згинальні моменти в характерних перерізах вала:

$$M_{\Sigma C} = \sqrt{M_{CX}^2 + M_{CV}^2} = \sqrt{128,22^2 + (-249,2)^2} = 280 \text{ H} \cdot \text{м};$$

$$M_{\Sigma D} = \sqrt{M_{DX}^2 + M_{DV}^2} = \sqrt{134^2 + (-136,2)^2} = 191 \text{ H} \cdot \text{м}.$$

10) Оскільки значення сумарного згинального моменту в перерізі C більше ніж у перерізі D , то переріз C є більш небезпечним. Тому еквівалентний момент визначаємо у перерізі C :

$$M_{\Sigma\Sigma C}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\Sigma C}^2 + M_Z^2} = \sqrt{280^2 + 347,8^2} = 446,5 \text{ H} \cdot \text{м}.$$

11) Визначаємо необхідний діаметр вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_{\text{екв.С}}}{0,1 \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{446,5 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 55}} = 43,2 \text{ мм}$$

Приймаємо діаметр вала $d = 45 \text{ мм}$.

Запитання для самоконтролю:

1. Які існують три види напруженого стану за розрахунку на міцність?
2. Що називають об'ємним напруженим станом?
3. Що називають плоским напруженим станом?
4. Що називають лінійним напруженим станом?
5. Що називають еквівалентною напругою?
6. Які існують гіпотези міцності?
7. Сформулюйте гіпотезу найбільших нормальних напруг (I теорія).
8. Сформулюйте гіпотезу найбільших відносних деформацій (II теорія).
9. Сформулюйте гіпотезу найбільших дотичних напруг (III теорія).
10. Сформулюйте енергетичну гіпотезу (IV теорія).
11. Що таке еквівалентний момент?
12. Назвіть умову міцності для розрахунку бруса круглого поперечного перерізу на згин з крученням.

Тема 2.8. Стійкість стиснених стрижнів

План

1. Критична сила. Формула Ейлера для різних випадків закріплення опор
2. Критичне напруження. Емпіричні формули для визначення критичних напружень. Залежність критичних напружень від гнучкості стрижня
3. Розрахунки на стійкість за формулою Ейлера. Раціональні форми поперечних перерізів стиснених стрижнів

1. Критична сила. Формула Ейлера для різних випадків закріплення опор

Не завжди достатня міцність і жорсткість стрижня забезпечують його повну надійність. З історії техніки можна навести багато прикладів, коли причиною аварій інженерних конструкцій була втрата стійкості її стиснених елементів.

Навантаження, за яких втрачається стійкість, називають **критичними**, а відповідні стани – **критичними станами**. Небезпека втрати стійкості особливо велика для легких, тонкостінних конструкцій типу гнучких стрижнів, пластинок і оболонок.

Критичною силою називають найбільше значення стискальної сили, прикладеної центрально, до якої прямолінійна форма рівноваги стрижня є стійкою.

Згин, пов'язаний з втратою стійкості прямолінійної форми стрижня, називають **поздовжнім згином**.

Якщо стискальні сили хоч трохи перевищують критичне значення, то додаткові напруги згину досягають досить значних величин і безпосередньо загрожують міцності конструкції.

Щоб забезпечити стійкість, необхідно, щоб стискальна сила F , яка діє на стрижень, була меншою за критичну.

Позначимо допустиму стискальну силу $[F]$, тоді:

$$[F] = \frac{F_{кр}}{[n_{ст}]},$$

де $[n_{ст}]$ – допустимий коефіцієнт запасу стійкості.

Значення коефіцієнта запасу міцності залежить від призначення стрижня і його матеріалу.

$$[n_{ст}] = 1,8 \div 3 \text{ – для сталей;}$$

$$[n_{ст}] = 5 \div 5,5 \text{ – для чавунів;}$$

$$[n_{ст}] = 2,8 \div 3,2 \text{ – для дерева.}$$

Леонард Ейлер вивів формулу для визначення величини критичної сили:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{(\mu \cdot l)^2},$$

де E – модуль пружності першого роду;

$J_{\min}$ – найменший з осевих моментів інерції перерізу, оскільки стрижень викривляється в площині найменшої жорсткості, в чому легко впевнитися, стискаючи поздовжньою силою лінійку;

l – довжина стрижня;

μ – коефіцієнт зведення довжини, який залежить від способу кріплення кінців стрижня.

На рис. 1 зображено **способи кріплення кінців стрижня**, які найчастіше застосовують, і наведено значення μ :

- 1) обидва кінці стрижня закріплені шарнірно і можуть зближуватися (a);
- 2) нижній кінець жорстко закріплений, верхній вільний (b);
- 3) один кінець закріплений шарнірно, другий має «плаваюче» кріплення (θ);
- 4) нижній кінець закріплений жорстко, верхній має «плаваюче» кріплення (z);
- 5) обидва кінці жорстко закріплені, але можуть зближуватися (∂);
- 6) нижній кінець закріплений жорстко, верхній – шарнірно (z);

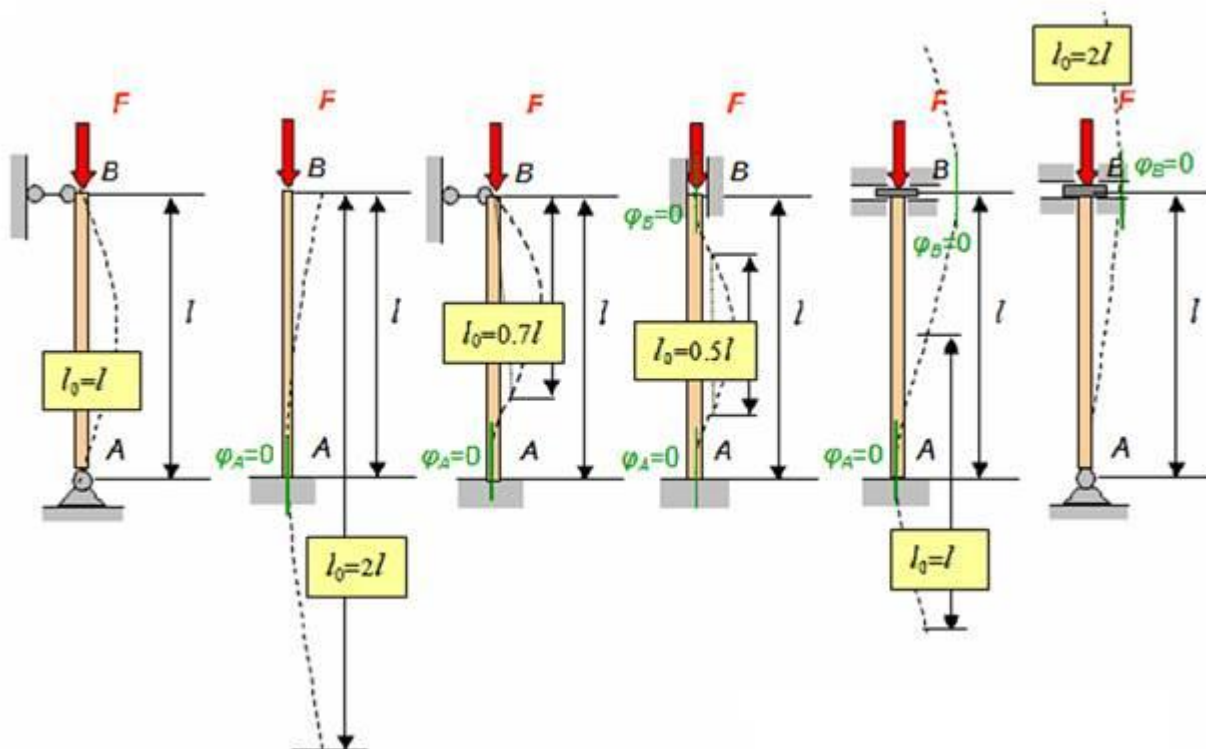


Рис. 1

Зазначимо, що менше μ , то більша критична сила, а отже, і допустиме стискальне навантаження. Наприклад, стискальне навантаження стрижня, жорстко закріпленого обома кінцями ($\mu = 0,5$), може бути в 16 разів більше від навантаження стрижня, закріпленого одним кінцем ($\mu = 2$). Тому там, де це можливо, треба жорстко кріпити обидва кінці стрижня.

2. Критичне напруження. Емпіричні формули для визначення критичних напружень. Залежність критичних напружень від гнучкості стрижня

Виведення формули Ейлера ґрунтується на **законі Гука**, який дійсний доти, поки напруга не перевищує границі пропорційності. Тому формулою Ейлера можна користуватися незавжди. Для визначення границь застосовності формули Ейлера знайдемо критичну напругу $\sigma_{кр}$, тобто напругу, яка виникає у поперечному перерізі А стрижня під дією критичної сили:

$$\sigma_{\varphi} = \frac{F_{\varphi}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{(\mu \cdot l)^2 \cdot A},$$

$\sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = i_{\min}$ – найменший радіус інерції поперечного перерізу стрижня.

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{\mu \cdot l}{i_{\min}}\right)^2},$$

Перепишемо формулу для $\sigma_{\text{кр}}$ так:

$$\frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \lambda$$

вираз $i_{\min}$ – гнучкість стрижня, це безрозмірна величина, яка характеризує вплив розмірів стрижня і способу закріплення його кінців.

Формула критичної напруги:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}.$$

Формулою Ейлера можна користуватися тільки тоді, коли виконується умова:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \leq [\sigma_{\text{мц}}],$$

де: $[\sigma_{\text{мц}}]$ – границя пропорційності матеріалу стрижня.

$$\lambda_{\text{зр}} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{\text{мц}}}} \text{ – гранична гнучкість.}$$

Гранична гнучкість залежить лише від фізико-механічних властивостей матеріалу стрижня і стала для цього матеріалу.

За допомогою поняття граничної гнучкості умову застосовності формули Ейлера можна записати у вигляді $\lambda \geq \lambda_{\text{зр}}$, тобто формула Ейлера застосовна тільки тоді, коли гнучкість стрижня більша або дорівнює граничній гнучкості для матеріалу, з якого його виготовлено.

Обчислимо, як приклад, значення $\lambda_{\text{зр}}$ для маловуглецевої сталі Ст.3. Для сталі Ст.3 $[\sigma_{\text{мц}}] = 200 \text{ МПа}$, а $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, тоді:

$$\lambda_{\text{зр}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6}{200 \cdot 10^6}} = 100.$$

Для стрижнів з маловуглецевої сталі формулу Ейлера застосовують, якщо їх гнучкість $\lambda_{\text{кр}} = 100$. Аналогічно можна обчислити значення граничної гнучкості для інших матеріалів. Зокрема, для чавуну $\lambda_{\text{кр}} = 80$; для дерева (сосна) $\lambda_{\text{кр}} = 110$.

Якщо гнучкість стрижнів менша від наведених величин, то формулу Ейлера вже не застосовують і в розрахунках користуються формулою Ясинського:

$$\sigma_{кр} = a - \epsilon \cdot \lambda$$

де a і ϵ – коефіцієнти, які залежать від матеріалу; їх беруть з довідкових таблиць. Якщо гнучкість $\lambda_{кр} < 40$, стрижні можна розраховувати на міцність під час простого стискання, не враховуючи небезпеку поздовжнього згину,

тобто за формулою: $\sigma = \frac{F}{A}$.

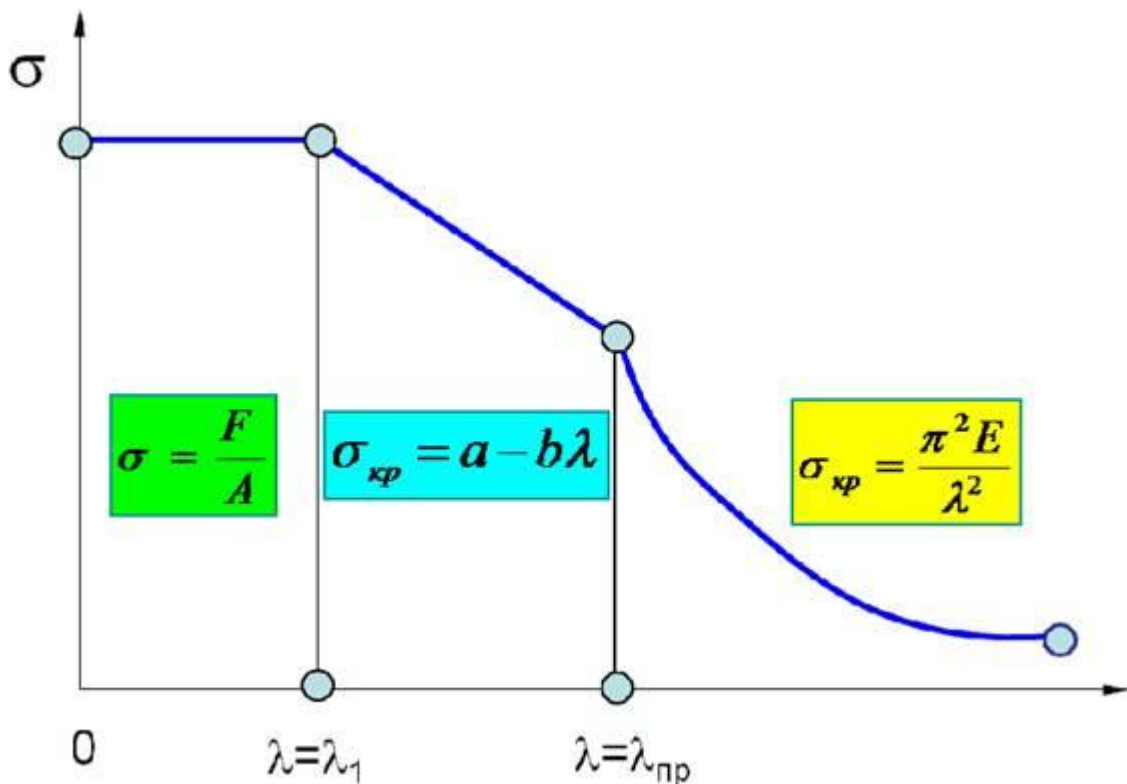


Рис. 2

Отже, за малих значень $\lambda_{кр}$ ($\lambda_{кр} < 40$) стрижні з маловуглецевої сталі розраховують на просте стискання; за середніх значень ($40 \leq \lambda_{кр} < 100$) розраховують за формулою Ясинського, а за великих ($\lambda_{кр} \geq 100$) – за формулою Ейлера.

Графік залежності критичної напруги від гнучкості для стрижнів з маловуглецевої сталі зображено на рис. 2. Зазначимо, що:

1) за малих значень $\lambda_{кр}$ критична напруга $\sigma_{кр}$ дорівнює границі текучості σ_T ;

2) за середніх значень $\lambda_{кр}$ критична напруга менше від границі текучості σ_T , але більше, ніж границя пропорційності ($\sigma_{пл} < \sigma_{кр} < \sigma_T$);

3) за великих значень $\lambda_{кр}$ критична напруга менша від границі пропорційності.

3. Розрахунки на стійкість за формулою Ейлера. Раціональні форми поперечних перерізів стиснених стрижнів

Розрізняють три види розрахунків на стійкість:

1) **Перевірний розрахунок**, коли визначають коефіцієнт запасу стійкості $n_{см}$ і порівнюють знайдене значення з допустимим

$$[n_{см}]: n_{см} = \frac{F_{кр}}{F} \geq [n_{см}];$$

2) **Визначення допустимого навантаження**: $[F] = \frac{F_{кр}}{[n_{см}]};$

3) **Проектний розрахунок**, коли визначають потрібне значення мінімального моменту інерції поперечного перерізу стрижня:

$$J_{\min} \geq \frac{F \cdot [n_{см}] \cdot (\mu \cdot \lambda)^2}{\pi^2 \cdot E},$$

після чого знаходять гнучкість і порівнюють з граничною.

Розрахунки показують, що найвигіднішими під час роботи стрижнів на стиск є кільцеві і коробочні тонкостінні перерізи. Доведено, що заміна стиснених стрижнів у вигляді кутників і двотаврів трубчастими стрижнями дає економію матеріалу до 20... 40 %.

Запитання для самоконтролю

1. Що називають критичним станом?
2. Що називають критичною силою?
3. Що називають поздовжнім згином?
4. Якою має бути стискальна сила, щоб забезпечити стійкість стрижня?
5. Який вигляд має формула Ейлера для визначення критичної сили?
6. Від чого залежить значення коефіцієнта запасу міцності?
7. Які існують способи кріплення кінців стрижня?
8. За якою формулою знаходять гнучкість стрижня?
9. Який вигляд має формула Ейлера для визначення критичної напруги?
10. Який вигляд має формула Ясинського для визначення критичної напруги?
11. Укажіть межі застосування формули Ейлера.
12. Які існують види розрахунку стрижнів на стійкість?

ЛІТЕРАТУРА

1. Шваб'юк В.І. Опір матеріалів: Підручник. – К.: Знання, 2016. — 400 с.
2. Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Е.С. Опір матеріалів. – К.: Вища школа. 2004. – 655с.
3. Дяченко С.С. Фізичні основи міцності та пластичності металів: Навч. посібник – Харків: Видавництво ХНАДУ, 2003. – 226 с.
4. Павловський М. А. Теоретична механіка: Підручник. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
5. Дистанційний курс . Електронний курс лекцій: Статика. Кінематика / для студентів технічних напрямків підготовки / Уклад. Н. І. Штефан, . О. С. Апостолук, Н. В. Гнатейко , В. Г. Савін - Доступ: <http://moodle.udc.ntu-kpi.kiev.ua/moodle/course/view.php?id=345>.
6. Дистанційний курс . Електронний курс лекцій: Динаміка та аналітична механіка/ для студентів технічних напрямків підготовки / Уклад. Н. І. Штефан, . О. С. Апостолук, Н. В. Гнатейко , В. Г. Савін - Доступ: <http://moodle.udc.ntukpi.kiev.ua/moodle/course/view.php?id=591>.
7. Опір матеріалів. Розрахункові роботи. Ковтун В.В., Павлов В.С., Дорофєєв О.А. //Навчальний посібник. – Львів: «Афіша». 2002. – 280 с.

Основи теоретичної механіки та опору матеріалів [Текст]: конспект лекцій для здобувачів освіти освітньо-професійного ступеня «фаховий молодший бакалавр» з спеціальності 192 Будівництво та цивільна інженерія, ОПП «Опорядження будівель і споруд та будівельний дизайн» денної форми навчання / уклад. Т.П. Герасимик-Чернова, Я.В. Оласюк – Любешів: ВСП «Любешівський ТФК ЛНТУ», 2023. – 140 с.

Комп'ютерний набір і верстка:

Т.П. Герасимик-Чернова,

Я.В. Оласюк

Редактор:

Т.П. Герасимик-Чернова,

Я.В. Оласюк

Підп. до друку _____ 2023 р. Формат А4.

Папір офіс. Гарн. Таймс. Умов. друк. арк. _____

Обл. вид. арк. _____ Тираж 15 прим.