МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ВІДОКРЕМЛЕНИЙ СТРУКТУРНИЙ ПІДРОЗДІЛ «ЛЮБЕШІВСЬКИЙ ТЕХНІЧНИЙ ФАХОВИЙ КОЛЕДЖ ЛУЦЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ»

Циклова комісія викладачів математичних та природничо-наукових дисциплін

Вища математика

Конспект лекцій

для здобувачів освіти освітньо-професійного ступеня фаховий молодший бакалавр

галузь знань 27 Транспорт

спеціальності 274 Автомобільний транспорт

денної форми навчання

Любешів 2023

УДК 51 (07)

К 88

До друку
Голова методичної ради ВСП «Любешівський ТФК ЛНТУ»
_____________________ Герасимик-Чернова Т.П.

(підпис)

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозитарій коледжу
Бібліотекар _____________ М.М. Демих
(підпис)

Рекомендовано до видання методичною радою ВСП «Любешівський ТФК ЛНТУ»
протокол №___ від _________________ 2023 року

Розглянуто і схвалено на засіданні циклової методичної комісії викладачів математичних та природничо-наукових дисциплін ВСП «Любешівський ТФК ЛНТУ»,
протокол №___ від _________________ 2023 року

Голова циклової методичної комісії _______________Остимчук А.В.
(підпис)

Укладачі: ____________ Кулик В.С.,
____________ Баховська М.В.,
___________ Кузьмич Т.П.
(підпис)

Вища математика [Текст]: конспект лекцій для здобувачів освіти освітньо-професійного ступеня фаховий молодший бакалавр галузь знань 27 Транспорт спеціальності 274 Автомобільний транспорт денної форми навчання / уклад. В.С.Кулик., Т.П. Кузьмич, М.В. Баховська – Любешів: ВСП «Любешівський ТФК ЛНТУ, 2023 –64 с.

Методична робота містить курс лекцій з вищої математики Дане видання розроблене на допомогу у підготовці до здачі екзамену з основ вищої математики студентам вищих навчальних закладів I-II рівнів акредитації.

Розділ 1

Елементи лінійної алгебри

§-1. Перестановки n-го порядку. Поняття матриці.

Означення детермінанта n-го порядку

Розглянемо множину $M_n = \{1,2,3,4,...,n-1,n\}$ перших n натуральних чисел. Запис усіх елементів цієї множини у будь-якому порядку називається *перестановкою n-го порядку.* Обчислимо, скільки таких перестановок n-го порядку можна утворити.

На перше місце елемент можна обрати n способами, на друге – n-1 способом, на третє – n-2 способами і т.д., на n-не місце елемент можна буде обрати єдиним способом. Тому кількість усіх перестановок з n елементів буде рівна $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot 3\cdot 2\cdot 1$.

Добуток перших n натуральних чисел позначають $n!$ (читається n-факторіал), тобто

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot...\cdot(n-1)\cdot n. \tag{1.1}$$

Отже, перестановок n-го порядку є $n!$.

Наприклад, перестановок другого порядку є $2! = 1\cdot 2 = 2$, третього – $3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$, четвертого – $4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$, і т.д.

<u>*Означення.*</u> Кажуть, що два елементи перестановки *i* та *j утворюють інверсію*, якщо число *i*<j, але воно записане пізніше за *j*. Якщо кількість інверсій у перестановці парне число, то така перестановка називається *парною*, якщо кількість інверсій у перестановці непарне число, то перестановка називається *непарною*.

<u>Приклад1.</u> Визначити кількість інверсій у перестановці 5-го порядку: (4,2,3,1,5)

Оскільки 1 утворює інверсію з 4,2,3;

2 – з 4;

3 – з 4;

4 і 5 не утворюють інверсій, то всього інверсій: 3+1+1+0+0=5.

Введемо поняття матриці:

<u>*Означення.*</u> *Матрицею порядку* $m\times k$ називається прямокутна таблиця, що складається з m рядків, k стовбців і $m\times k$ чисел, що стоять у ній.

Матриці записують у вигляді:

$$A_{m\times k} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3k} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ... & a_{mk} \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Розглянемо квадратну матрицю n-го порядку:

$$A_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

<u>*Означення.*</u> *Детермінантом* (*визначником*)матриці A n-го порядку називається алгебраїчна сума $n!$доданків, кожен з яких є добутком n елементів цієї матриці, взятих по одному і тільки по одному з кожного рядка і кожного стовбця цієї матриці. Знак кожного такого добутку рівний $(-1)^l$, де l – кількість інверсій у перестановці других індексів, при умові, що перші індекси впорядковані:

$$\det A=\sum_{n!}(-1)^l a_{1\alpha_1}\cdot a_{2\alpha_2}\cdot a_{3\alpha_3} a_{(n-1)\alpha_{n-1}} a_{n\alpha_n}\ , \tag{1.4}$$

де

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.5}$$

Знайдемо формулу для визначення визначника 2-го порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

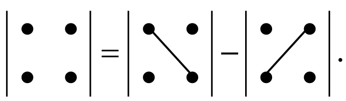
Для цього складемо таблицю:

Добуток	Перестановка других індексів	Кількість інверсій	Знак добутку
$a_{11}\cdot a_{22}$	(1,2)	0	$(-1)^0=+1$
$a_{12}\cdot a_{21}$	(2,1)	1	$(-1)^1=-1$

За означенням детермінанта отримаємо:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21} \tag{1.6}$$

Отже, визначник 2-го порядку можна обчислювати за схемою:



<u>Приклад.</u> Обчислити:

$$\begin{vmatrix} 11 & -4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}=11\cdot 5-6\cdot(-4)=55+24=79.$$

Знайдемо формулу для визначення визначника 3-го порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

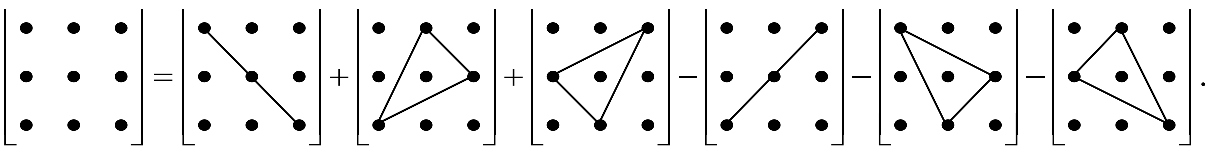
Складемо таблицю:

Добуток	Перестановка других індексів	Кількість інверсій	Знак добутку
$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$	(1,2,3)	0	$(-1)^0 = +1$
$a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$	(1,3,2)	1	$(-1)^1 = -1$
$a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$	(2,1,3)	1	$(-1)^1 = -1$
$a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$	(2,3,1)	2	$(-1)^2 = +1$
$a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$	(3,2,1)	3	$(-1)^3 = -1$
$a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$	(3,1,2)	2	$(-1)^2 = +1$

За означенням детермінанта отримаємо:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}. \quad (1.7)$$

Отже, визначник 3-го порядку можна обчислювати за схемою:



Приклад. Обчислити:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 7 + (-1) \cdot 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 \cdot 5 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot 5 - (-1) \cdot 0 \cdot 7 = 45.$$

§-2. Метод Гаусса і метод Гаусса-Жордана розв'язування систем лінійних рівнянь

Означення. Системою k лінійних рівнянь з n невідомими називається система виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3, \\ ...., \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + ... + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases} \quad (1.8)$$

де $a_{ij}, b_i \in R (i = \overline{1,k}, j = \overline{1,n})$ – задані дійсні числа, $x_j (j = \overline{1,n})$– змінні. *Розв'язком системи* називається n-вимірний вектор $\overrightarrow{x_0} = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, ..., x_n^0)$ такий, що при підстановці його координат замість відповідних змінних, кожне рівняння системи (1.8) перетворюється на правильну рівність.

Означення. Система, яка має розв'язок, називається *сумісною*, а система, яка не має розв'язку – несумісною.

Означення. Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, *невизначеною* – коли система має безліч розв'язків.

Метод Гаусса полягає у послідовному виключенні невідомих з рівнянь:

x_1 виключаємо з усіх рівнянь, крім першого;

x_2 – з усіх рівнянь, крім першого і другого;

x_3 – з усіх рівнянь, крім першого, другого і третього і т.д.

Для сумісних систем лінійних рівнянь можливі два випадки:

1. В останньому рівнянні залишиться одне невідоме. Тоді система матиме єдиний розв'язок, який шукається «знизу-вгору».

2. В останньому рівнянні залишиться більш, ніж одне невідоме. Тоді лишаємо у лівій частині цього рівняння лише одну змінну, а інші переносимо у праву частину рівняння і називатимемо їх *вільними змінними*. Вільним змінним можна надавати довільних значень і шукати відповідні значення інших невідомих. В цьому випадку система матиме безліч розв'язків, тобто буде невизначеною.

Приклад. Розв'язати систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 49. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему за допомогою матриць:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 49 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ |-3|| \\ |-3||| \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & -7 & 4 & -20 \\ 0 & -10 & -2 & -152 \end{array}\right) 7\,|||\,-10\,|| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & -7 & 4 & -20 \\ 0 & 0 & -54 & -864 \end{array}\right) \div(-54) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & -7 & 4 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 16 \end{array}\right).$$

З останньої матриці отримаємо систему:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -5, \\ -7x_2 + 4x_3 = -20, \\ x_3 = 16; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = -21, \\ -7x_2 = -84, \\ x_3 = 16; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 9, \\ x_2 = 12, \\ x_3 = 16. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(9;12;16)\}$.

Метод Гаусса можна модифікувати, якщо робити послідовне виключення змінних з усіх рівнянь, крім одного. Це можна зробити за допомогою правила прямокутника. При цьому потрібно обирати ведучий елемент (найкраще на кожному кроці вибирати «одиницю»), який має міститися по головній діагоналі матриці, що відповідає даній системі рівнянь. Удосконалений таким способом метод Гаусса називається *методом Гаусса - Жордана.*

Приклад2. Розв'язати систему методом Гаусса - Жордана:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -5, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = -4. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & 3 & -4 \end{array}\right) \| -I \sim \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & -2 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & 3 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -5 & 7 \\ 0 & 7 & -5 & 12 \end{array}\right) \| III - 3 \| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & (1) & 10 & -9 \\ 0 & 7 & -5 & 12 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 22 & -22 \\ 0 & 1 & 10 & -9 \\ 0 & 0 & -75 & 75 \end{array}\right) \div (-75) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 22 & -22 \\ 0 & 1 & 10 & -9 \\ 0 & 0 & (1) & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

З останньої матриці отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = -1. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(0;1;-1)\}$.

§-3. Метод Крамера розв'язування систем лінійних рівнянь

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3, \\ ...., \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1.9}$$

Введемо позначення: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta \neq 0$, то розв'язок системи (1.9) шукають за *формулами Крамера:*

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}. \end{cases} \tag{1.10}$$

<u>Приклад.</u> Розв'язати систему методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 12,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 12,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 12,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Скориставшись формулами Крамера, отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{12}{12} = 1, \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{12}{12} = 1, \\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{0}{12} = 0. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(1;1;0)\}$.

§-4. Дії над матрицями

<u>Означення.</u> Сумою двох матриць $A_{m\times k} = (a_{ij})$ і $B_{m\times k} = (b_{ij})$, де $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,k}$, називається матриця $C_{m\times k} = (c_{ij})$, де $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для $\forall\ i = \overline{1,m}, j = \overline{1,k}$.

<u>Означення.</u> Добутком матриці $A_{m\times k} = (a_{ij})$ *на число* λ називається матриця $\lambda A_{m\times k} = (\lambda a_{ij})$, *де* $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,k}$.

<u>Означення.</u> Добутком двох матриць $A_{m\times k}=(a_{ir})$ і $B_{k\times p}=(b_{rj})$, де $i=\overline{1,m}, r=\overline{1,k}, j=\overline{1,p}$, називається матриця $C_{m\times p}=(c_{ij})$, де

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+a_{i3}\cdot b_{3j}+...+a_{ik}\cdot b_{kj}=\sum_{r=1}^{k}a_{ir}\cdot b_{rj} \qquad (1.11)$$

для $\forall\ i=\overline{1,m}, j=\overline{1,p}$.

<u>Приклад.</u> Нехай $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & -2 & 5\\ 0 & 4 & 1 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -3 & 1 & -1\\ 2 & -3 & 2 & 4\end{pmatrix}$. Знайти $A+B$, $3A$.

$A+B=\begin{pmatrix}8 & -4 & -1 & 4\\ 2 & 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$, $3A=\begin{pmatrix}9 & -3 & -6 & 15\\ 0 & 12 & 3 & -12\end{pmatrix}$.

<u>Приклад.</u> Нехай $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & -2 & 5\\ 0 & 4 & 1 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}$. Знайти $A\times B$.

$A\times B=\begin{pmatrix}10 & 8 & -17\\ -12 & 5 & 18\end{pmatrix}$.

Властивості дій над матрицями:

1. $\forall A,B: A+B=B+A$;
2. $\forall A,B,C: (A+B)+C=A+(B+C)$;
3. $\forall A,B,\forall\lambda: \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$;
4. $\forall A,\forall\lambda,\mu: (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$;
5. $A\times B\neq B\times A$ (в загальному випадку);
6. $\forall A,B,C: (A\times B)\times C=A\times(B\times C)$;
7. $\forall A,B,C: (A+B)\times C=A\times C+B\times C$.

§-5. Одинична матриця. Обернена матриця та її обчислення за допомогою елементарних перетворень

<u>Означення.</u> Одиничною матрицею n-го порядку називається така квадратна матриця, в якій по головній діагоналі розміщені «одиниці», а інші елементи – нулі.

Наприклад, одинична матриця 4-го порядку має вигляд:

$$E_{4\times 4}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Одинична матриця E має ту властивість, що при множенні її чи зліва, чи справа на довільну матрицю одержуємо ту ж матрицю. Тобто, для будь-якої матриці A виконуються рівності:

$$A \times E = E \times A = A. \quad (1.12)$$

Означення. Матриця B називається *оберненою до матриці A*, якщо виконуються рівності:

$$A \times B = B \times A = E. \quad (1.13)$$

Обернену матрицю до матриці A позначають A^{-1}.

З означення слідує, що якщо матриця B обернена до матриці A, то і A – обернена до B, тобто має місце рівність:

$$(A^{-1})^{-1} = A. \quad (1.14)$$

Обернені матриці існують тільки для квадратних матриць A, причому таких, що $\det A \neq 0$.

Для знаходження оберненої матриці до матриці A складають матрицю виду: $(A \mid E)$, де E – одинична матриця того ж порядку, що й A. Утворену матрицю за допомогою елементарних перетворень зводять до вигляду: $(E \mid B)$. Тоді покладають: $A^{-1} = B$.

Приклад. Знайти обернену матрицю до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Складаємо матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) | - || \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} (1) & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \times(-1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \times(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & (1) & -7 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -4 & 5 & 1 \end{array}\right) \div 12 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -\frac{1}{12} & \frac{2}{12} & 0 \\ 0 & 1 & -7 & \frac{2}{12} & -\frac{3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & (1) & -\frac{4}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{5}{12} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{7}{12} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \end{array}\right).$$

Звідси отримаємо: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{4}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{7}{12} \\ -\frac{4}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -4 & -1 & 7 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$

§-6. Обчислення оберненої матриці за допомогою алгебраїчних доповнень

Нехай маємо квадратну матрицю n-го порядку:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1.15)$$

Розглянемо детермінант n-го порядку, що відповідає цій матриці:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.16)$$

<u>*Означення.*</u> *Мінором елемента* a_{ij} детермінанта n-го порядку називається детермінант (n-*1*)-го порядку, який одержується з даного детермінанта викресленням i-того рядка та j-того стовбця.

Мінор елемента a_{ij} позначається: M_{ij}.

<u>*Означення.*</u> *Алгебраїчним доповненням елемента* a_{ij} називається число:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \qquad (1.17)$$

<u>Теорема</u>

Нехай задано матрицю A рівністю (1.15). *Тоді, якщо* $\det A = \Delta \neq 0$, *то обернену матрицю до матриці A можна обчислити за допомогою рівності:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \dots & A_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1.18)$$

<u>Приклад.</u> Знайти обернену матрицю до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ за допомогою алгебраїчних доповнень.

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \text{ де } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 37,$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=3,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=1,\ A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}5 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-8,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & -4\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2,\ A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -4\\ 3 & 1\end{vmatrix}=13,\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=7,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & -4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=8,\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -4\\ 5 & 2\end{vmatrix}=-22,\ A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-9.$$

Звідси: $A^{-1}=\dfrac{1}{37}\begin{pmatrix}3 & 2 & 8\\ 1 & 13 & -22\\ -8 & 7 & -9\end{pmatrix}$.

§-7. Матрична форма запису системи лінійних рівнянь

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+...+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+...+a_{2n}x_n=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+...+a_{3n}x_n=b_3,\\ \text{..},\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+a_{n3}x_3+...+a_{nn}x_n=b_n.\end{cases} \tag{1.19}$$

Введемо до розгляду такі матриці:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n}\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn}\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ ...\\ x_n\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\\ ...\\ b_n\end{pmatrix}.$$

Тоді систему (1.19) можна записати у вигляді матричного рівняння:

$$A\times X=B \tag{1.20}$$

Нехай $\Delta=\det A\neq 0$. Тоді матриця A має обернену A^{-1}. Помножимо зліва обидві частини рівності (1.20) на A^{-1}:

$$A^{-1}\times(A\times X)=A^{-1}\times B,$$

$$(A^{-1}\times A)\times X=A^{-1}\times B,$$

$$E\times X=A^{-1}\times B,$$

$$X=A^{-1}\times B. \tag{1.21}$$

Матриця X є розв'язком матричного рівняння (1.20), а значить і початкової системи (1.19).

Приклад. Розв'язати систему матричним методом:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -3, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

Позначимо:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Матриця A^{-1} для даної матриці була знайдена в прикладі у §-6:

$$A^{-1} = \frac{1}{37}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 1 & 13 & -22 \\ -8 & 7 & -9 \end{pmatrix}$$

Скориставшись формулою (1.21), отримаємо:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{37}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 1 & 13 & -22 \\ -8 & 7 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{37}\begin{pmatrix} 37 \\ -74 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси: $\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -2, \\ x_3 = 0. \end{cases}$

Відповідь: $\{(1;-2;0)\}$.

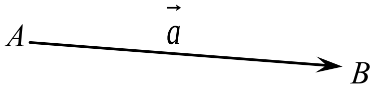
Розділ 2

Метод координат

§-1. Поняття вектора. Колінеарні і компланарні вектори

Під *вектором* будемо розуміти напрямлений відрізок.

Для векторів застосовують позначення: $\vec{a}, \overrightarrow{AB}$. В останньому випадку точку *A* називають *початком вектора*, точку *B* – *кінцем вектора* $\overrightarrow{AB}$ (мал.1).



мал. 1

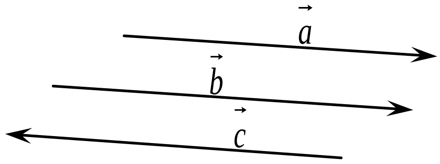
<u>*Означення.*</u> Вектор, у якого початок співпадає з кінцем, називається *нульовим*.

Нульовий вектор позначається: $\vec{0}$. Напрям нульового вектора невизначений.

<u>*Означення.*</u> Вектори називаються *колінеарними*, якщо вони паралельні до однієї прямої або лежать на одній прямій.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – колінеарні, то це позначають так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

<u>Означення.</u> Паралельні вектори називаються *співнапрямленими,* якщо вони лежать в одній півплощині відносно прямої, що проходять через початки цих векторів; *протилежно напрямленими* – якщо вони лежать в різних півплощинах відносно цієї прямої.



мал. 2

На мал.2 вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – співнапрямлені: $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – протилежно напрямлені: $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{c}$.

Вектор $\overrightarrow{BA}$ називається *протилежним до вектора* $\overrightarrow{AB}$, тобто: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

<u>Означення.</u> Три вектори називаються *компланарними*, якщо вони паралельні до однієї площини або лежать в одній площині.

Довжина вектора $\vec{a}$ позначається $|\vec{a}|$.

<u>Означення.</u> Вектори називаються *рівними*, якщо вони співнапрямлені і мають однакову довжину, тобто:

$\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow$ 1. $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, 2. $|\vec{a}|=|\vec{b}|$.

<u>Теорема</u>

З будь-якої точки простору можна побудувати вектор, рівний даному, і при тому тільки один.

§-2. Лінійні операції над векторами

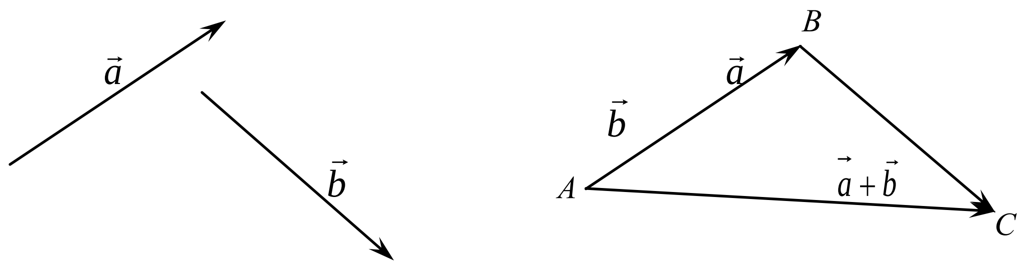
I. Додавання векторів.

<u>Означення.</u> Сумою двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{a}+\vec{b}$, який будується за таким правилом:

1) з довільної точки *A* будуємо вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$;

2) з його кінця – точки *B* будуємо вектор $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$;

3) сполучаємо початок вектора $\vec{a}$ – точку *A* з кінцем вектора $\vec{b}$ – точкою *C*.



мал. 3

Таке правило побудови суми двох векторів називається *правилом трикутника*.

Як бачимо з мал.3, для суми векторів справедлива рівність:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}\ . \tag{2.1}$$

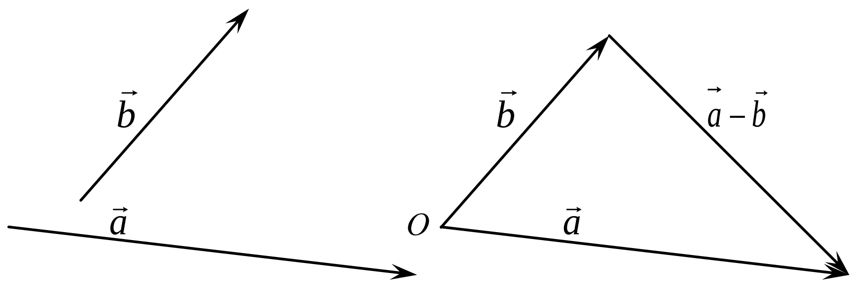
***Властивості суми векторів*:**

1. $\forall\vec{a},\vec{b}:\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ $-$ *комутативність*;
2. $\forall\vec{a},\vec{b},\vec{c}:(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ $-$ *асоціативність*;
3. $\forall\vec{a}:\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$;
4. $\forall\vec{a}:\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$.

II. Віднімання векторів.

<u>*Означення.*</u> *Різницею двох векторів* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{c}$, який в сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$.

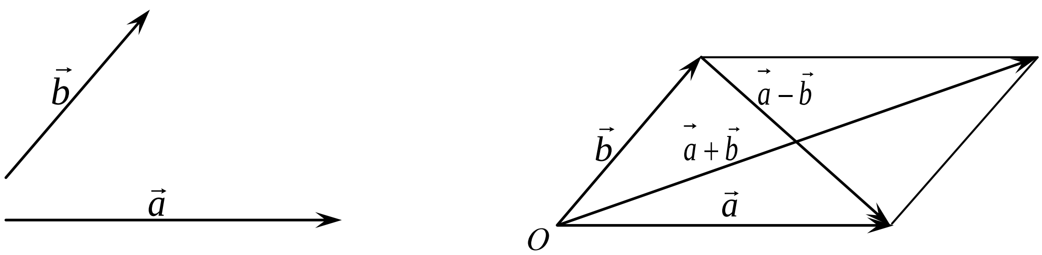
Щоб знайти різницю двох векторів, досить віднести ці вектори до спільного початку, з'єднати їхні кінці і поставити стрілку біля того вектора, від якого віднімаємо (мал.4).



мал. 4

Для знаходження суми і різниці двох векторів також користуються *правилом паралелограма*:

З довільної точки будуємо обидва вектори, на цих векторах добудовуємо паралелограм. Сумою цих векторів є діагональ паралелограма, яка виходить із спільного початку, їх різницею є інша діагональ (мал. 5).



мал.5

III. Множення вектора на число.

<u>*Означення.*</u> *Добутком вектора* $\vec{a}$ *на число* λ називається вектор $\lambda\vec{a}$, довжина якого дорівнює добутку довжини цього вектора на модуль числа. Цей вектор співнапрямлений з даним вектором, якщо число додатне; протилежно напрямлений, якщо число від'ємне і дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли або число дорівнює нулю, або вектор дорівнює нулю.

Тобто, вектор $\lambda\vec{a}$ задовольняє наступні умови:

1) $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$,

2) $\lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, якщо $\lambda > 0$,

3) $\lambda\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, якщо $\lambda < 0$,

4) $\lambda\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ або $\vec{a} = \vec{0}$.

***Властивості добутку вектора на число*:**

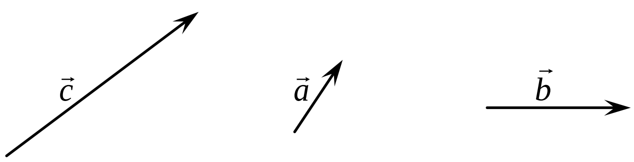
1. $\forall\vec{a} : 1\cdot\vec{a} = \vec{a}$;
2. $\forall\vec{a}\forall\alpha,\beta : \alpha(\beta\cdot\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$ – *асоціативність множення*;
3. $\forall\vec{a}\forall\alpha,\beta : (\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$;
4. $\forall\vec{a},\vec{b}\forall\alpha : \alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$;

дві останні формули називаються *дистрибутивними законами множення відносно додавання*.

§-3. Розклад вектора за даними напрямами

<u>*Означення.*</u> Розкласти вектор $\vec{c}$ за двома не колінеарними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (на площині) означає знайти такий паралелограм, для якого $\vec{c}$ буде діагоналлю, а сторонами паралелограма будуть вектори, колінеарні до $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

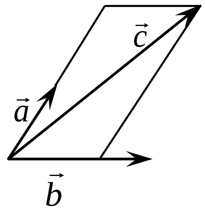
<u>Приклад.</u> Розкласти вектор $\vec{c}$ за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо вектори розміщені так, як показано на мал.6.



мал. 6

Віднесемо вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ до спільного початку та добудовуємо на основі їх паралелограм так, щоб вектор $\vec{c}$ був діагоналлю цього паралелограма.

Як видно з мал. 7, $\vec{c} = 2\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$.



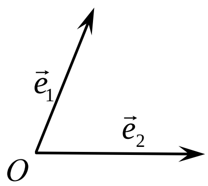
мал. 7

<u>*Означення.*</u> Розкласти вектор $\vec{d}$ за трьома не компланарними векторами $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ (в просторі) означає знайти такий паралелепіпед, для якого $\vec{d}$ буде діагоналлю, а сторонами паралелепіпеда будуть вектори, колінеарні до $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

§-4. Базис простору

<u>*Означення.*</u> *Базисом площини* називається впорядкована пара не колінеарних векторів.

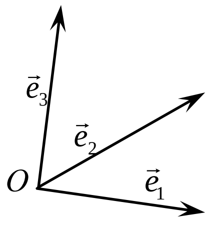
Базис площини позначається: $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, де вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ не колінеарні (мал. 8).



мал. 8

<u>*Означення.*</u> *Базисом простору* називається впорядкована трійка не компланарних векторів.

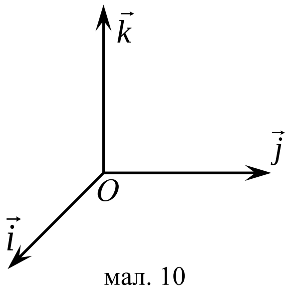
Базис простору позначають: $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, де вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ не компланарні (мал.9).



мал. 9

<u>*Означення.*</u> Базис називається *ортонормованим*, якщо базисні вектори попарно перпендикулярні і довжини базисних векторів рівні одиниці.

Ортонормований базис $B=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, де $\vec{i}\perp\vec{j},\vec{i}\perp\vec{k},\vec{j}\perp\vec{k}$, $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$ (мал. 10).



мал. 10

Теорема (*про розклад вектора за базисними векторами*)

Будь-який вектор простору можна розкласти за базисними векторами, причому єдиним способом.

Тобто, довільний вектор $\vec{a}$ простору можна у базисі $B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ подати у вигляді:

$$\vec{a}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3. \quad (2.2)$$

Означення. Координатами вектора в даному базисі називається впорядкована трійка дійсних чисел, які є коефіцієнтами в лінійному розкладі цього вектора за базисними векторами.

Якщо вектор $\vec{a}$ задається рівністю (2.2), то координатами цього вектора є впорядкована трійка (x,y,z), тобто:

$$\vec{a}\,(x,y,z)\ \Leftrightarrow\ \vec{a}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3. \quad (2.3)$$

Властивості операцій над векторами через координати:

1) Рівні вектори мають рівні відповідні координати в тому самому базисі:

$$\vec{a}(x_1,y_1,z_1)=\vec{b}(x_2,y_2,z_2)\Leftrightarrow x_1=x_2, y_1=y_2, z_1=z_2. \quad (2.4)$$

2) Координати суми двох векторів дорівнюють сумам їх відповідних координат:

$$\vec{a}(x_1,y_1,z_1),\vec{b}(x_2,y_2,z_2)\Rightarrow\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2). \quad (2.5)$$

3) Координати добутку вектора на число дорівнюють добуткам координат цього вектора на дане число:

$$\vec{a}(x,y,z)\Rightarrow\lambda\vec{a}=(\lambda x,\lambda y,\lambda z). \quad (2.6)$$

4) Координати лінійної комбінації кількох векторів дорівнюють тій же лінійній комбінації відповідних координат.

5) Координати вектора $\overrightarrow{AB}$, де $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ обчислюються за формулою:

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1), \quad (2.7)$$

тобто, дорівнюють різницям відповідних координат його кінця і початку.

Приклад. $\vec{a}(2,4,-1),\vec{b}(5,-2,-3)$. Знайти $3\vec{a}-4\vec{b}$.

$3\vec{a}-4\vec{b}=(3\cdot 2-4\cdot 5, 3\cdot 4-4\cdot(-2), 3\cdot(-1)-4\cdot(-3))=(-14,20,9)$.

Умова колінеарності двох векторів через координати

Нехай в базисі $B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають координати: $\vec{a}(x_1,y_1,z_1),\vec{b}(x_2,y_2,z_2)$.

Теорема

Для того, щоб вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ були колінеарними, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}, \tag{2.8}$$

тобто, щоб були пропорційними їх відповідні координати.

Умова компланарності трьох векторів через координати

Нехай в базисі $B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ мають координати: $\vec{a}(x_1,y_1,z_1),\vec{b}(x_2,y_2,z_2),\vec{c}(x_3,y_3,z_3)$.

Теорема

Для того, щоб вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ були компланарними, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0, \tag{2.9}$$

тобто, щоб детермінант 3-го порядку, рядки якого складені із координат цих векторів, дорівнював нулю.

§-5. Скалярний добуток векторів і його властивості

Означення. *Скалярним добутком двох векторів* називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi, \tag{2.10}$$

де $\varphi=(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Результатом скалярного добутку векторів є число (скаляр).

***Властивості скалярного добутку*:**

а) алгебраїчні властивості:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ – *комутативність,*

2) $\alpha\vec{a}\cdot\vec{b}=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b}),\ \vec{a}\cdot\beta\vec{b}=\beta(\vec{a}\cdot\vec{b}),\ \alpha\vec{a}\cdot\beta\vec{b}=\alpha\beta(\vec{a}\cdot\vec{b})$ – *асоціативна властивість відносно числового множника.*

3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ – *дистрибутивні закони множення відносно додавання.*

Приклад. $(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(4\vec{a}-3\vec{b})=12\vec{a}\cdot\vec{a}-9\vec{a}\cdot\vec{b}+8\vec{a}\cdot\vec{b}-6\vec{b}\cdot\vec{b}=12\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+6\vec{b}\cdot\vec{b}.$

б) геометричні властивості:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$ – скалярний добуток дорівнює нулеві тоді і тільки, коли вектори перпендикулярні.

2) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ – скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини.

3) $$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} \tag{2.11}$$

– модуль (довжина) вектора дорівнює кореню квадратному із його скалярного квадрата.

4) $$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \tag{2.12}$$

– косинус кута між двома векторами дорівнює скалярному добутку цих векторів, поділеному на добуток їх довжин.

Вираз скалярного добутку двох векторів через їх координати в ортонормованому базисі

Нехай в ортонормованому базисі $B=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають координати: $\vec{a}(x_1,y_1,z_1),\vec{b}(x_2,y_2,z_2)$. Тоді

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2 \tag{2.13}$$

– скалярний добуток двох векторів в ортонормованому базисі дорівнює сумі попарних добутків їх відповідних координат.

Довжина вектора

Нехай в ортонормованому базисі $B=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ вектор $\vec{a}=(x,y,z)$. За формулою (2.11) отримаємо:

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{2.14}$$

– довжина вектора дорівнює кореню квадратному із суми квадратів його координат.

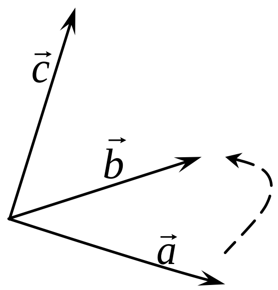
Приклад. Нехай $\vec{a}(2,-2,1),\vec{b}(3,1,5)$. Знайти кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

За формулою (2.12):

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{2\cdot 3 + (-2)\cdot 1 + 1\cdot 5}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2+5^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{35}} = \frac{3}{\sqrt{35}}.$$

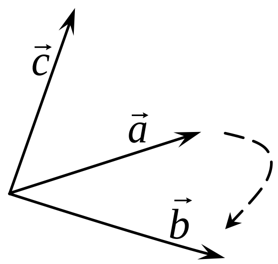
§-6. Векторний добуток векторів і його властивості

Кажуть, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють *праву трійку* (або репер ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$) – *додатно орієнтований*), якщо вони розміщені в просторі проти годинникової стрілки (мал.11).



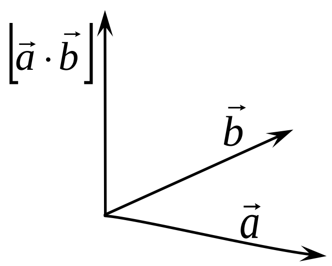
мал. 11

Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють *ліву трійку* (репер ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$) – *від'ємно орієнтований*), якщо вони розміщені в просторі за годинниковою стрілкою (мал.12).



мал. 12

<u>*Означення.*</u> *Векторним добутком двох векторів* називається вектор, довжина якого дорівнює добутку довжин цих векторів на синус кута між ними; цей вектор перпендикулярний до кожного з перемножуваних векторів і утворює з ними праву трійку (мал.13):



мал. 13

$$\left|[\vec{a}\cdot\vec{b}]\right| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha \qquad (2.15)$$

Результатом векторного добутку векторів є вектор.

***Властивості векторного добутку*:**

а) алгебраїчні властивості:

1) $\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]=-\left[\vec{b}\cdot\vec{a}\right]$ – *антикомутативність,*

2) $\left[\alpha\vec{a}\cdot\vec{b}\right]=\alpha\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]$, $\left[\vec{a}\cdot\beta\vec{b}\right]=\beta\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]$, $\left[\alpha\vec{a}\cdot\beta\vec{b}\right]=\alpha\beta\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]$ – *асоціативна властивість відносно числового множника.*

3) $\left[(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}\right]=\left[\vec{a}\cdot\vec{c}\right]+\left[\vec{b}\cdot\vec{c}\right]$, $\left[\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})\right]=\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]+\left[\vec{a}\cdot\vec{c}\right]$ – *дистрибутивні закони множення відносно додавання.*

б) геометричні властивості:

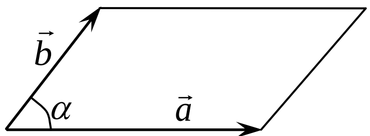
1) $\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]\perp\vec{a}, \left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]\perp\vec{b}$,

2) $\left(\vec{a},\vec{b},\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]\right)$ – права трійка,

3) $\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]=0\Leftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$ – векторний добуток дорівнює нулеві тоді і тільки, коли вектори колінеарні,

4) $$S_{пар\text{-}ма}=\left|\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]\right| \qquad (2.16)$$

– модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах (віднесених до спільного початку – мал. 14).



мал. 14

5) $$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]\right|$$
(2.17)

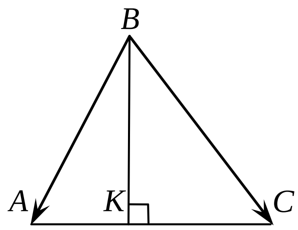
Вираз векторного добутку двох векторів через їх координати в ортонормованому базисі

Нехай в ортонормованому базисі $B=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають координати: $\vec{a}(x_1,y_1,z_1),\vec{b}(x_2,y_2,z_2)$. Тоді

$$\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix} \qquad (2.18)$$

– векторний добуток двох векторів в ортонормованому базисі дорівнює детермінанту третього порядку, в першому рядку якого стоять базисні вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, в другому рядку – координати першого множника, в третьому рядку – координати другого множника.

<u>Приклад.</u> Вершини трикутника ABC мають координати: $A(1,-1,2)$, $B(5,-6,2)$, $C(1,3,-1)$. Обчислити площу трикутника і довжину висоти, опущеної з вершини B на сторону AC (мал. 15).



мал. 15

Площу трикутника обчислюватимемо за формулою: $S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}\right]\right|$. З іншого боку: $S_\Delta = \frac{1}{2} AC \cdot BK$. Звідси: $\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}\right]\right| = \frac{1}{2} AC \cdot BK$. З останньої рівності отримаємо:

$$BK = \frac{\left|\left[\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}\right]\right|}{AC}.$$

$$\overrightarrow{BA} = (1-5,-1+6,2-2) = (-4,5,0), \overrightarrow{BC} = (1-5,3+6,-1-2) = (-4,5,0).$$

$$\left[\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 5 & 0 \\ -4 & 9 & -3 \end{vmatrix} = -15\vec{i} - 12\vec{j} - 16\vec{k} \text{, тобто } \left[\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}\right] = (-15,-12,-16).$$

$$\left|\left[\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}\right]\right| = \sqrt{(-15)^2 + (-12)^2 + (-16)^2} = \sqrt{625} = 25,\ S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 25 = 12{,}5 \text{ (кв. од.)}$$

$$\overrightarrow{AC} = (1-1,3+1,-1-2) = (0,4,-3),\ AC = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{16+9} = 5.$$

$$BK = \frac{25}{5} = 5 \text{ (од.)}$$

§-7. Мішаний добуток трьох векторів і його геометричний зміст

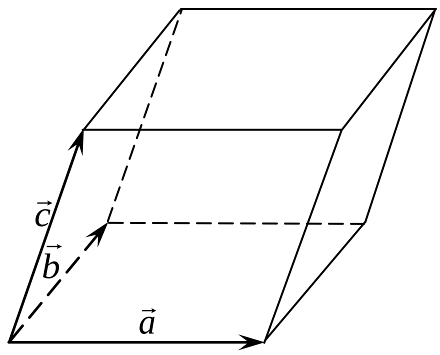
<u>*Означення.*</u> *Мішаним добутком трьох векторів* називається число, яке дорівнює скалярному добутку векторного добутку перших двох векторів на третій:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \left[\vec{a} \cdot \vec{b}\right] \cdot \vec{c}. \qquad (2.19)$$

<u>Теорема</u> (*геометричний зміст мішаного добутку*)

Модуль мішаного добутку трьох векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах (віднесених до спільного початку – мал.16*). Мішаний добуток*

– додатне число, якщо вектори утворюють праву трійку; від'ємне число, якщо вектори утворюють ліву трійку і дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли всі вектори компланарні.



мал. 16

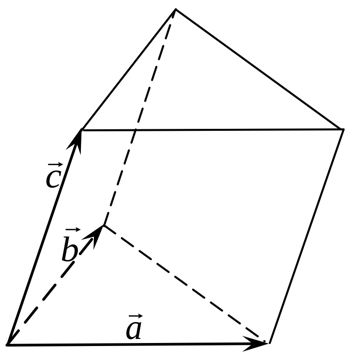
Тобто, мішаний добуток має такі *властивості*:

1) $$V_{пар\text{-}да} = \left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|, \tag{2.20}$$

2) $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} > 0$, коли $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ – права трійка, $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} < 0$, коли $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ – ліва трійка,

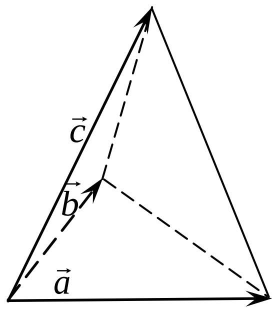
3) $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = 0$ тоді і лише тоді, коли вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарні.

За допомогою мішаного добутку трьох векторів можна також обчислювати об'єм трикутної призми та трикутної піраміди, побудованих на цих векторах (мал. 17, 18).



мал. 17

$$V_{тр.призми} = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right| \tag{2.21}$$



мал. 18

$$V_{тр.пір.} = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right| \tag{2.22}$$

Вираз мішаного добутку трьох векторів через їх координати

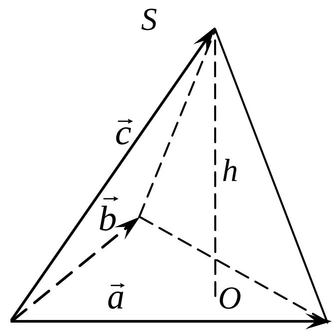
в ортонормованому базисі

Нехай в ортонормованому базисі $B=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ мають координати: $\vec{a}(x_1,y_1,z_1),\vec{b}(x_2,y_2,z_2),\vec{c}(x_3,y_3,z_3)$. Тоді

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \qquad (2.23)$$

– мішаний добуток трьох векторів дорівнює детермінанту третього порядку, в першому рядку якого стоять координати першого вектора, в другому – координати другого вектора, в третьому – координати третього вектора.

<u>Приклад.</u> Обчислити об'єм і висоту трикутної піраміди (мал.19), побудованої на векторах: $\vec{a}(1,-2,3),\vec{b}(2,1,-1),\vec{c}(3,-3,4)$.



мал. 19

Об'єм піраміди обчислюватимемо за формулою: $V_{тр.пір.}=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|$. З іншого боку: $V_{тр.пір.}=\frac{1}{3}S_{осн.}\cdot h$. Звідси: $\frac{1}{6}\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|=\frac{1}{3}S_{осн.}\cdot h$. З останньої рівності отримаємо: $h=\dfrac{\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|}{2\cdot S_{\text{îñí .}}}$.

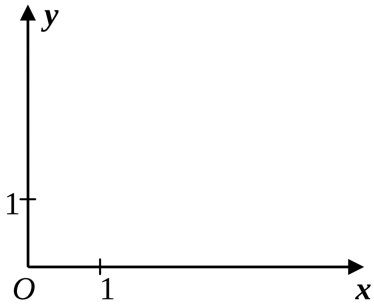
$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix}=4+6-18-9-3+16=-4,\ V_{тр.пір.}=\frac{1}{6}\cdot\left|-4\right|=\frac{2}{3}\ \text{(куб. од.)}$$

$$S_{осн.}=\frac{1}{2}\left|\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]\right|,\ \text{де}\ \left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-1\vec{i}+7\vec{j}+5\vec{k}.\ \text{Тоді}\ \left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]=(-1,7,5),$$

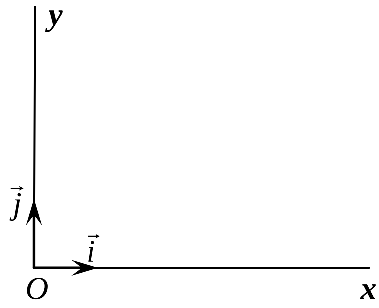
$$S_{осн.}=\frac{1}{2}\sqrt{1+49+25}=\frac{1}{2}\sqrt{75}=\frac{5\sqrt{3}}{2}\ \text{(кв. од.)},\ h=\frac{4}{2\cdot\frac{5\sqrt{3}}{2}}=\frac{4}{5\sqrt{3}}\ \text{(од.)}$$

§-8. Основні задачі в прямокутній декартовій системі координат

<u>Означення.</u> Прямокутною декартовою системою координат називається впорядкована пара взаємно перпендикулярних осей з однаковими масштабами на них (мал. 20, 21).



мал. 20

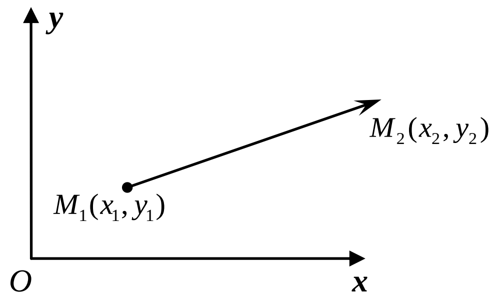


мал. 21

Базис прямокутної системи координат позначається: $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}\}$, де O – початок системи координат.

Віддаль між точками

Нехай в прямокутній системі координат задано дві точки: $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$. Знайти віддаль між цими точками (мал. 22).



мал. 22

Віддаль між точками $\rho(M_1, M_2) = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|$

Вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ має координати: $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. За формулою (2.14) отримаємо:

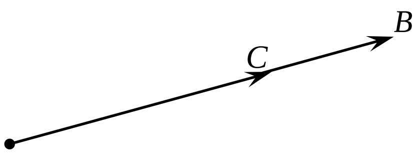
$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{2.24}$$

– віддаль між двома точками дорівнює кореню квадратному із суми квадратів різниць відповідних координат.

Поділ відрізка в даному відношенні

<u>Означення.</u> Точка C ділить відрізок AB у відношенні λ, якщо виконується рівність:

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} \tag{2.25}$$



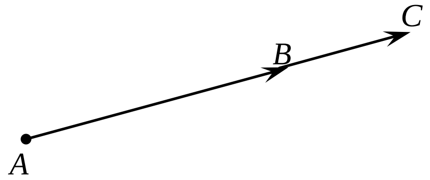
A мал. 23

Користуючись мал. 23, попередню рівність можна записати у вигляді:

$$\lambda = \frac{\textit{від початку до подільчої точки}}{\textit{від подільчої точки до кінця}}. \tag{2.26}$$

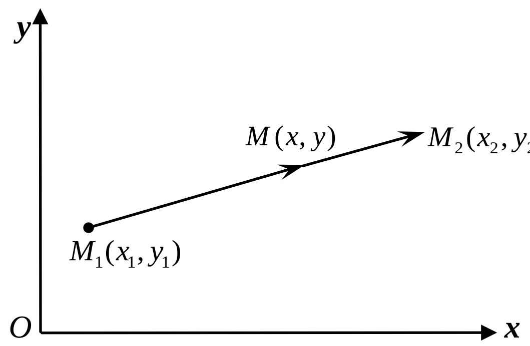
Якщо $\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CB}$ (мал. 23), то $\lambda > 0$ і точка C ділить відрізок AB *внутрішнім способом*.

Якщо $\overrightarrow{AC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CB}$ (мал. 24), то $\lambda < 0$ і точка C ділить відрізок AB *зовнішнім способом*.



мал. 24

Нехай маємо відрізок M_1M_2, де $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$. Знайти координати точки M, яка ділить відрізок M_1M_2 у відношенні λ (мал. 25).



мал. 25

З рівності $\lambda = \frac{\overrightarrow{M_1M}}{\overrightarrow{MM_2}}$ отримаємо: $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$. Оскільки $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1)$,

$\lambda\overrightarrow{MM_2} = (\lambda(x_2 - x), \lambda(y_2 - y))$, то дістанемо систему:

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y). \end{cases} \tag{2.27}$$

Розв'язок системи (2.27) (а отже, й координати точки M) матиме вигляд:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \end{cases} \tag{2.28}$$

Координати середини відрізка

Якщо точка M ділить відрізок M_1M_2 пополам, то $\lambda = 1$. Тоді з системи (2.28) отримаємо:

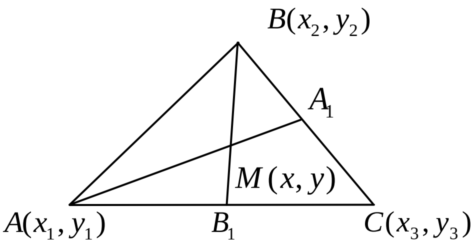
$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases} \tag{2.29}$$

– координати середини відрізка дорівнюють півсумам відповідних координат його початку і кінця.

Центр ваги трикутника

Центром ваги трикутника є, як відомо, точка перетину його медіан.

Нехай дано трикутник з вершинами в точках $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Знайти координати центра маси цього трикутника (мал. 26).



мал. 26

Нехай $M(x, y)$ – центр ваги трикутника. Медіани в точці перетину діляться у відношенні 2:1, починаючи з вершини. Тоді відношення подільності $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MA_1}} = \dfrac{2}{1} = 2$. Оскільки A_1 – середина BC, то за формулою (2.29) ця точка має такі координати: $A_1 = \left(\dfrac{x_2 + x_3}{2}, \dfrac{y_2 + y_3}{2}\right)$.

Отже, користуючись рівністю (2.28), матимемо, що координати точки M мають вигляд:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \\ y = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \end{cases} \tag{2.30}$$

– координати центра ваги трикутника дорівнюють середнім арифметичним відповідних координат його вершин.

Площа трикутника

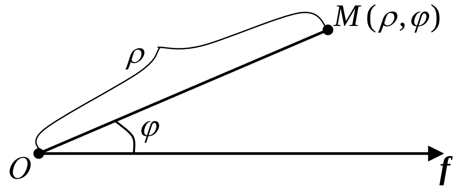
Площа трикутника з вершинами в точках $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ обчислюється за формулою:

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \mathrm{mod} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \tag{2.31}$$

§-9. Полярна система координат

<u>*Означення.*</u> *Полярною системою координат* називається система координат, в якій положення кожної точки на площині визначається двома параметрами: ρ – відстань від даної точки до полюса O (початку системи координат), φ – кут між радіусом цієї точки і

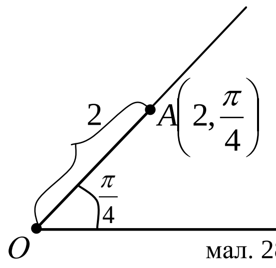
полярною віссю Of (мал. 27). Впорядкована пара чисел (ρ,φ) називається *полярними координатами точки*.



мал. 27

<u>Приклад.</u> Побудувати точку $A\left(2,\dfrac{\pi}{4}\right)$ в полярній системі координат.

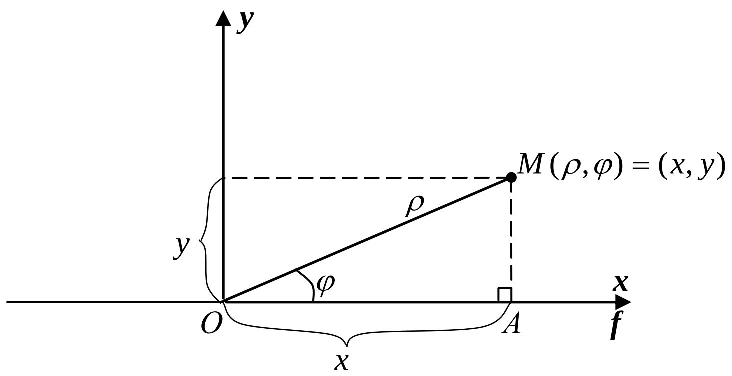
Для побудови цієї точки необхідно побудувати промінь, який утворює з полярною віссю кут $\dfrac{\pi}{4}$, та відкласти від полюса відрізок довжиною 2 (мал. 28).



мал. 28

Зв'язок між полярними і прямокутними координатами

Помістимо початок прямокутної декартової системи координат в полюс. Вісь Ox направимо по полярній осі, причому так, щоб їх напрями співпадали і масштаби на осях були однакові (мал. 29).



мал. 29

Нехай точка M в полярній системі координат має координати (ρ,φ), а в прямокутній – (x,y). Виразити (x,y) через (ρ,φ) і навпаки.

З прямокутного трикутника OAM отримаємо:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases} \tag{2.32}$$

– *перехід від полярних до прямокутних координат*.

Піднесемо обидві частини рівностей системи (2.32) до квадрату і додамо почленно:

$x^2 + y^2 = \rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)$. Звідки: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

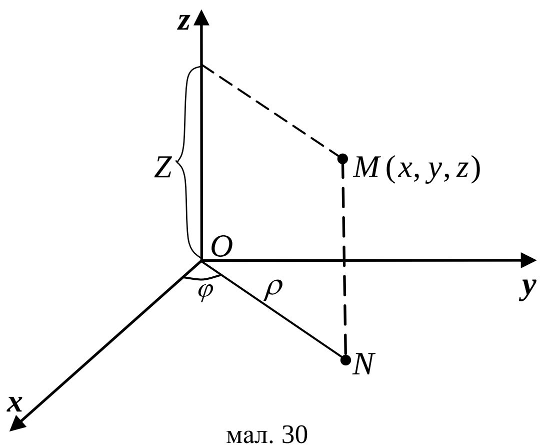
Поділивши друге рівняння системи (2.32) на перше, дістанемо: $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$. Отже, отримаємо систему:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases} \qquad (2.33)$$

– перехід від прямокутних до полярних координат.

§-10. Циліндрична система координат

Кожна точка M в просторі повністю визначається положенням її проекції на площину xOy і третьою координатою *Z*(мал. 30).



мал. 30

Положення проекції N однозначно задається її полярними координатами в площині xOy: $N(\rho, \varphi)$. Як бачимо, для задання точки в просторі досить вказати три параметри: ρ – віддаль від проекції цієї точки на площину xOy до початку координат; φ – кут між віссю *Ox* і радіусом вектором цієї точки; Z – віддаль від цієї точки до площини xOy.

Впорядкована трійка чисел (ρ, φ, Z) називається *циліндричними координатами*.

Циліндричні координати пов'язані з прямокутними координатами рівностями:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = Z. \end{cases} \qquad (2.34)$$

Розділ 3

Пряма на площині

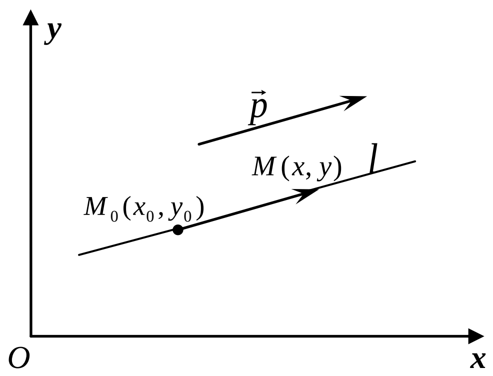
§-1. Різні способи задання прямої

1. Канонічне рівняння прямої.

<u>Означення.</u> *Напрямним вектором прямої* l називається такий ненульовий вектор $\vec{p}$, який паралельний до цієї прямої.

Нехай пряма l задана точкою $M_0(x_0, y_0)$ і напрямним вектором $\vec{p}(l, m)$. Написати рівняння цієї прямої.

Візьмемо довільну точку $M(x, y) \in l$ (мал. 31)



мал. 31

Для будь-якого положення точки M на прямій l: $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p}$, де $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$, $\vec{p}(l, m)$. З умови колінеарності двох векторів (2.8) отримаємо:

$$l: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \tag{3.1}$$

– *канонічне рівняння прямої*.

<u>Приклад.</u> Скласти рівняння прямої l, що проходить через точку $A(5, -3)$ з напрямним вектором $\vec{p}(4,5)$.

Скористаємось рівнянням (3.1)

$$l: \quad \frac{x - 5}{4} = \frac{y + 3}{5}.$$

2. Параметричні рівняння прямої.

Нехай дано такі ж початкові умови, що й у попередньому пункті. Тоді отримаємо рівняння (3.1). Введемо в це рівняння параметр t:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = t.$$

З останніх рівностей отримаємо систему: $\begin{cases} x - x_0 = lt, \\ y - y_0 = mt, \end{cases}$

яку запишемо у вигляді:

$$l: \begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt \end{cases} \qquad (3.2)$$

– *параметричні рівняння прямої*.

Геометричний зміст параметра t

Для будь-якого положення точки M на прямій знайдеться таке дійсне число t, що координати цієї точки виражаються формулами (3.2). І навпаки:

Для довільного дійсного числа t пара чисел, знайдених за формулами (3.2) є координатами точки, яка належить прямій.

Приклад. Скласти параметричні рівняння прямої l, що проходить через точку $A(2,-1)$ з напрямним вектором $\vec{p}(-3,2)$.

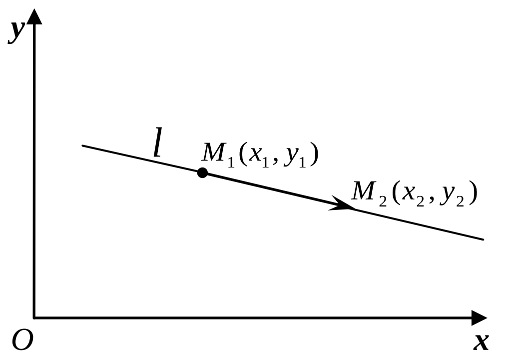
Параметричні рівняння прямої згідно із системою (3.2) матимуть вигляд:

$$\begin{cases} x = -3t + 2, \\ y = 2t - 1. \end{cases}$$

3. Пряма, задана двома точками.

Нехай пряма l задана двома точками: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$. Написати рівняння цієї прямої.

Виберемо за початкову точку M_1, за напрямний вектор візьмемо $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ (мал. 32).



мал. 32

Використавши канонічне рівняння прямої (3.1), отримаємо:

$$l: \ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (3.3)$$

– *рівняння прямої через дві точки*.

Приклад. Написати рівняння прямої l, що проходить через точки $A(-3{,}5)$, $B(2{,}4)$.

З рівняння (3.3) отримаємо:

$$\frac{x+3}{2+3}=\frac{y-5}{4-5}, \qquad \text{або} \qquad l:\ \frac{x+3}{5}=\frac{y-5}{-1}.$$

4. Загальне рівняння прямої.

Канонічне рівняння (3.1) можна записати у вигляді:

$$mx-ly-mx_0+ly_0=0.$$

Бачимо, що пряма задається лінійним рівнянням відносно змінних x, y. Виникає запитання: що задає будь-яке лінійне рівняння на площині?

Теорема

Рівняння
$$Ax+By+C=0, \tag{3.4}$$
де A і B одночасно не рівні нулю, задає пряму з напрямним вектором $\vec{p}(-B, A)$.

Доведення. Рівняння (3.4) на площині задає деяку лінію. Скориставшись коефіцієнтами цього рівняння, виберемо на площині точку $M_0(-\frac{C}{A},0)$ (при умові, що $A\neq 0$).

Напишемо рівняння прямої l, що проходить через точку M_0 з напрямним вектором $\vec{p}(-B, A)$. Використаємо рівняння (3.1):

$$\frac{x+\frac{C}{A}}{-B}=\frac{y-0}{A},$$

з якого отримаємо:

$$l: Ax+By+C=0.$$

Отже, рівняння (3.4) задає пряму.

Теорему доведено

Рівняння (3.4) називається *загальним рівнянням прямої*.

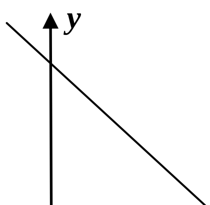
Приклад. Написати загальне рівняння прямої l, що проходить через точки $A(4,-1)$, $B(5,-3)$.

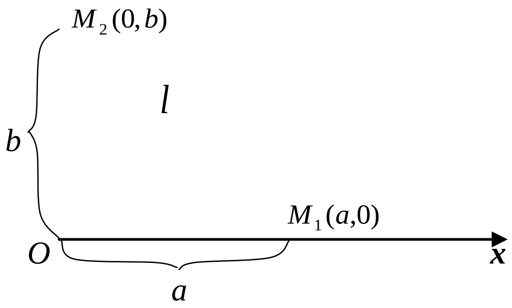
За формулою (3.3) отримаємо:

$$\frac{x-4}{1}=\frac{y+1}{-2}, \qquad \text{або} \qquad l:\quad 2x+y-7=0.$$

5. Пряма у «відрізках» на осях.

Нехай пряма l, яка не проходить через початок координат, відтинає на осі *Ox* відрізок *a*, на осі *Oy* – відрізок *b* (мал. 33). Написати рівняння цієї прямої.





мал. 33

Шукатимемо рівняння прямої l у вигляді (3.4):

$$l: \; Ax + By + C = 0$$

$M_1(a,0) \in l \Rightarrow A \cdot a + B \cdot 0 + C = 0$. Звідси: $A = -\dfrac{C}{a}$.

$M_2(0,b) \in l \Rightarrow A \cdot 0 + B \cdot b + C = 0$. Звідси: $B = -\dfrac{C}{b}$.

Підставимо ці значення *A* і *B* в рівняння (3.4):

$$-\frac{C}{a}x - \frac{C}{b}y + C = 0.$$

Оскільки пряма не проходить через початок координат, то $C \neq 0$. Тому останнє рівняння можна поділити на *C*:

$$-\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + 1 = 0.$$

З цього рівняння отримаємо:

$$l: \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (3.5)$$

– *рівняння прямої у «відрізках» на осях.*

Приклад. Побудувати пряму l, що проходить через точку $A(6,1)$ з напрямним вектором $\vec{p}(-3,5)$.

З канонічного рівняння прямої дістанемо:

$$\frac{x-6}{-3} = \frac{y-1}{5}, \qquad \text{або} \qquad 5x + 3y = 33.$$

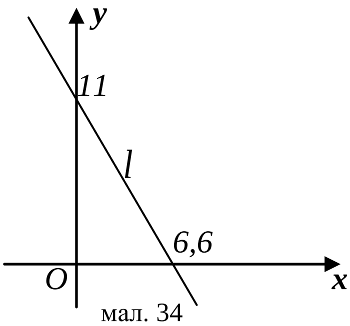
Поділимо обидві частини рівняння на 33:

$$\frac{5x}{33} + \frac{3y}{33} = 1.$$

Остаточно одержимо:

$$l: \; \frac{x}{33/5} + \frac{y}{11} = 1.$$

Останнє рівняння є рівнянням прямої у «відрізках» на осях. Тому шукана пряма відсікає на осі *Ox* відрізок $\frac{33}{5} = 6{,}6$, а на осі *Oy* відрізок 11 (мал. 34).



мал. 34

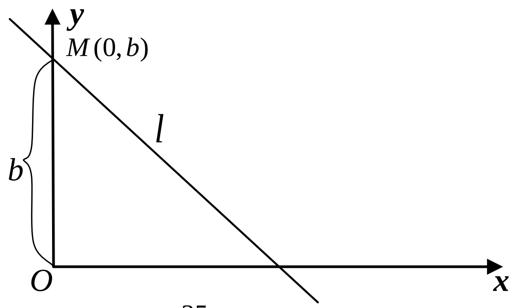
6. Пряма з кутовим коефіцієнтом.

Нехай задано напрямний вектор $\vec{p}(l,m)$ прямої l.

<u>*Означення.*</u> *Кутовим коефіцієнтом прямої* називається відношення ординати до абсциси її напрямного вектора:

$$k = \frac{m}{l}.$$

Написати рівняння прямої l, яка відтинає на осі *Oy* відрізок b і має кутовий коефіцієнт *k* (мал. 35).



мал. 35

Запишемо координати напрямного вектора прямої у вигляді:

$$\vec{p} = (l,m) = l(1,\frac{m}{l}) = l(1,k).$$

Оскільки $l(1,k) \parallel (1,k)$, то напрямним до прямої буде також вектор $\vec{p}_1(1,k)$. Використаємо канонічне рівняння прямої (3.1):

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-b}{k}.$$

Звідки отримаємо:

$$l:\ y = kx + b \tag{3.6}$$

– *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*.

7. Пряма, задана точкою і кутовим коефіцієнтом.

Написати рівняння прямої l, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і має кутовий коефіцієнт *k*.

Шукатимемо рівняння прямої l у вигляді (3.6):

$$y = kx + b,$$

$$M_0(x_0, y_0) \in l \Rightarrow y_0 = kx_0 + b.$$

Віднімемо від рівняння (3.6) попереднє рівняння. Дістанемо:

$$l: \ y - y_0 = k(x - x_0) \qquad (3.7)$$

– *рівняння прямої, заданої точкою і кутовим коефіцієнтом*.

Приклад. Скласти рівняння прямої l, яка має кутовий коефіцієнт $k = 3$ і проходить через точку $A(3,-1)$.

З рівняння (3.7) дістанемо:

$$y + 1 = 3(x - 3), \quad \text{або} \quad l: \ y = 3x - 10.$$

8. Пряма, задана точкою і нормованим вектором.

Означення. Нормованим вектором прямої l називається такий ненульовий вектор $\vec{n}$, який перпендикулярний до цієї прямої.

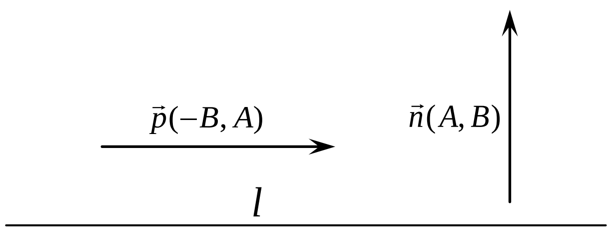
Теорема

Коефіцієнти A і B в загальному рівнянні прямої $l: \ Ax + By + C = 0$ *є координатами нормованого вектора цієї прямої, тобто* $\vec{n} = (A, B)$.

Доведення. Напрямний вектор прямої l має координати: $\vec{p}(-B, A)$. Знайдемо скалярний добуток: $\vec{n} \cdot \vec{p} = A \cdot (-B) + B \cdot A = 0$. Звідси, за властивостями скалярного добутку $\vec{n} \perp \vec{p}$, а тому $\vec{n} \perp l$. Отже, $\vec{n} = (A, B)$ – нормований вектор прямої l.

Теорему доведено

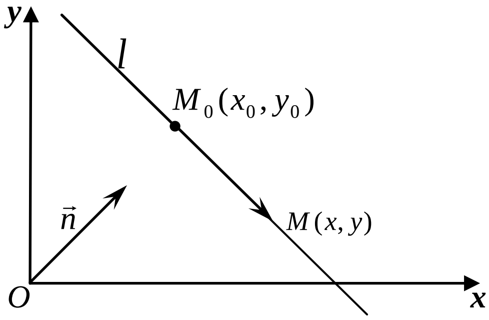
З попередньої теореми отримаємо, що із загального рівняння прямої можна дістати координати її напрямного і нормованого векторів (мал. 36).



мал. 36

Нехай пряма задана точкою $M_0(x_0, y_0)$ і нормованим вектором $\vec{n}(\alpha, \beta)$. Написати рівняння цієї прямої.

Візьмемо довільну точку $M(x, y) \in l$ (мал. 37).



мал. 37

Для будь-якого положення точки M на прямій l: $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$, де $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$, $\vec{n}(\alpha, \beta)$. Тоді $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$. Звідси:

$$l: \ \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0 \tag{3.8}$$

– рівняння прямої, заданої точкою і нормованим вектором.

<u>Приклад.</u> Скласти рівняння прямої l_1, яка проходить через точку $A(4,1)$ перпендикулярно до прямої l: $2x - 5y + 6 = 0$.

Напрямний вектор прямої l має координати: $\vec{p} = (-B, A) = (5,2)$. Але оскільки $l \perp l_1$, то напрямний вектор прямої l є нормальним вектором прямої l_1, тобто: $\vec{p} = \vec{n}_1 = (5,2)$.

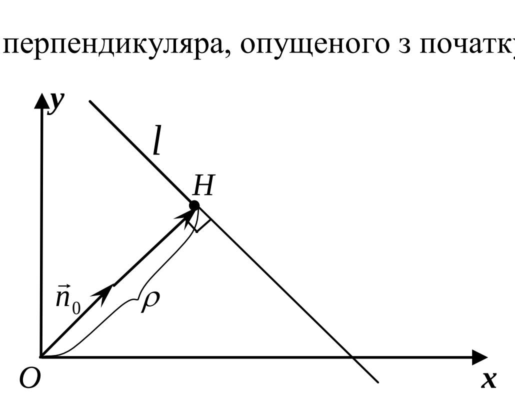
Скориставшись рівнянням (3.8), отримаємо:

$5(x-4) + 2(y-1) = 0$ або l: $5x + 2y - 22 = 0$.

9. Нормальне рівняння прямої.

Написати рівняння прямої l, заданої одиничним нормальним вектором $\vec{n}_0(\cos\varphi, \sin\varphi)$ і віддаллю ρ від початку координат до прямої.

Нехай H – основа перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму(мал. 38).



мал. 38

Оскільки $\vec{n}_0$ – одиничний нормований вектор, то $\overrightarrow{OH} = \rho\vec{n}_0 = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$. $\overrightarrow{OH}$ – радіус-вектор точки *H*. Тому $H(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$. Підставимо координати вектора $\vec{n}_0$ і точки *H* в рівняння (3.8):

$\cos\varphi(x - \rho\cos\varphi) + \sin\varphi(y - \rho\sin\varphi) = 0$, або $x\cos\varphi + y\sin\varphi - \rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 0$.

Оскільки $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, то отримаємо рівняння:

$$l:\ \ x\cos\varphi + y\sin\varphi - \rho = 0 \qquad (3.9)$$

– нормальне рівняння прямої.

§-2. Взаємне розміщення двох прямих на площині

Нехай прямі l_1 і l_2 задані рівняннями:

$$l_1:\ \ A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$l_2:\ \ A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

<u>Теорема</u> (*умова паралельності двох прямих*)

Для того, щоб прямі l_1 і l_2 були паралельними, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \qquad (3.10)$$

тобто, щоб були пропорційними коефіцієнти при однакових змінних.

<u>Доведення.</u> Напрямний вектор прямої l_1 має координати $\vec{p}_1(-B_1, A_1)$, прямої l_2 — $\vec{p}_2(-B_2, A_2)$. Оскільки $l_1 \parallel l_2$, то їх напрямні вектори також паралельні. З умови колінеарності двох векторів (2.8) отримаємо рівність:

$$\frac{-B_1}{-B_2} = \frac{A_1}{A_2},$$

з якої дістанемо умову (3.10).

<u>Теорему доведено</u>

<u>Теорема</u> (*умова співпадання двох прямих*)

Для того, щоб прямі l_1 і l_2 співпадали, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \qquad (3.11)$$

тобто, щоб були пропорційними відповідні коефіцієнти цих прямих.

<u>Теорема</u> (*умова перетину двох прямих*)

Якщо прямі не паралельні і не співпадають, то вони перетинаються в одній точці. Для того, щоб прямі l_1 і l_2 перетинались, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}. \tag{3.12}$$

<u>Приклад.</u> Скласти рівняння прямої l_1, яка проходить через точку $A(-2,5)$ паралельно до прямої l: $4x - y + 3 = 0$.

Шукатимемо рівняння прямої l_1 у вигляді:

$$4x - y + C = 0.$$

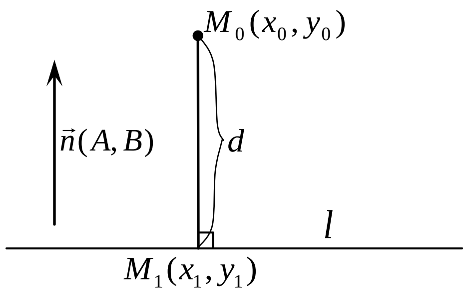
Оскільки $A \in l_1$, то $4\cdot(-2) - 5 + C = 0$. Звідки: $C = 13$. Отже,

$$l_1:\ 4x - y + 13 = 0.$$

§-3. Віддаль відточки до прямої

<u>Означення.</u> Під *віддаллю від точки до прямої* розуміють віддаль від цієї точки до її ортогональної проекції на цю пряму.

Нехай задано пряму l: $Ax + By + C = 0$. Знайти віддаль від точки $M_0(x_0, y_0)$ до цієї прямої (мал. 39): $d = \rho(M_0, l) = M_0M_1$.



мал. 39

Для знаходження числа d використаємо скалярний добуток векторів $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_0M_1}$ за означенням та через координати:

1. *За означенням*:

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M_1} = |\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right|\cdot\cos\varphi = \sqrt{A^2 + B^2}\cdot d\cdot(\pm 1).$$

2. *Через координати*:

Оскільки $\overrightarrow{M_0M_1}(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$, $\vec{n}(A,B)$, то

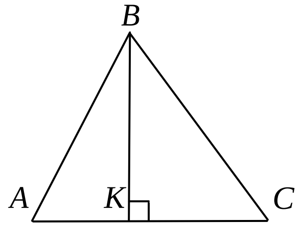
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M_1} = A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) = Ax_1 + By_1 - Ax_0 - By_0 = -C - Ax_0 - By_0 = -(Ax_0 + By_0 + C).$$

Звідки: $\sqrt{A^2 + B^2}\cdot d\cdot(\pm 1) = -(Ax_0 + By_0 + C)$.

Отримаємо формулу:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (3.13)$$

Приклад. Знайти висоту трикутника ABC, опущеної з вершини B на сторону AC, якщо $A(1,3)$, $B(3,9)$, $C(5,7)$ (мал. 40).



мал. 40

$h = BK = \rho(B, AC)$

Складемо рівняння прямої AC: $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-3}{4}$. Або $AC: \quad x - y + 2 = 0$

За формулою (3.13) отримаємо: $BK = \dfrac{|3-9+3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ (од.)

§-4. Кут між прямими на площині

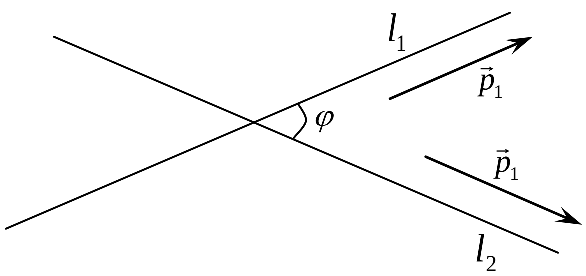
1. Прямі l_1 і l_2 задані загальними рівняннями:

$$l_1: \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$l_2: \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Знайти кут між цими прямими.

Напрямний вектор прямої l_1 має координати $\vec{p}_1(-B_1, A_1)$, прямої l_2 — $\vec{p}_2(-B_2, A_2)$ (мал. 41).



мал. 41

$$\cos\varphi = \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{|\vec{p}_1| \cdot |\vec{p}_2|} = \frac{(-B_1)\cdot(-B_2) + A_1 \cdot A_2}{\sqrt{(-B_1)^2 + A_1^2} \cdot \sqrt{(-B_2)^2 + A_2^2}}.$$

Отже, *кут між прямими* можна обчислити за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (3.14)$$

Якщо $l_1 \perp l_2$, то $\cos\varphi = 0$. Тому справедлива теорема:

<u>Теорема</u> (*умова перпендикулярності двох прямих*)

Для того, щоб прямі l_1 *і* l_2 *були перпендикулярними, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*:

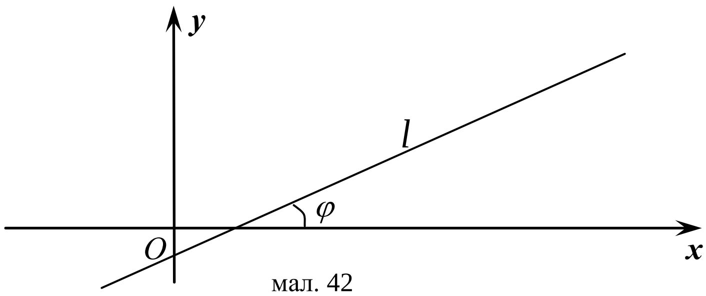
$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0. \qquad (3.15)$$

2. Прямі задані рівнянням з кутовим коефіцієнтом:

$$y = kx + b.$$

В прямокутній декартовій системі координат кутовий коефіцієнт прямої дорівнює тангенсу кута нахилу прямої до додатного напряму осі *Ox* (мал. 42), тобто:

$$k = tg\varphi. \qquad (3.16)$$



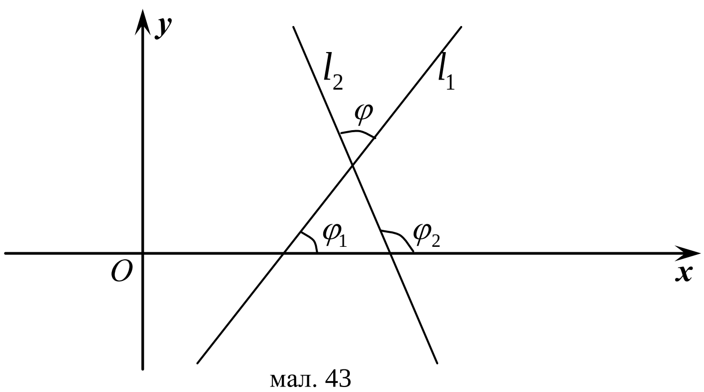
мал. 42

Нехай $l_1: \; y = k_1 x + b_1,$

$l_2: \; y = k_2 x + b_2.$

Знайти кут між прямими.

Для прямих l_1 і l_2 з мал. 43 матимемо: $k_1 = tg\varphi_1,\, k_2 = tg\varphi_2$.



мал. 43

Оскільки $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, то $tg\varphi = tg(\varphi_2 - \varphi_1) = \dfrac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_1 \cdot tg\varphi_2}$.

Отже, *кут між прямими*, обчислюється за формулою:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}. \qquad (3.17)$$

Якщо $l_1 \perp l_2$, то $tg\varphi = \infty$. З останньої рівності слідує, $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$. Отже, справедлива теорема:

<u>Теорема</u> (*умова перпендикулярності прямих через їх кутові коефіцієнти*)

Для того, щоб прямі l_1 і l_2 були перпендикулярними, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}, \tag{3.18}$$

тобто, щоб їх коефіцієнти були оберненими за величиною і протилежними за знаком.

З мал. 42 слідує теорема:

<u>Теорема</u> (*умова паралельності прямих через їх кутові коефіцієнти*)

Для того, щоб прямі l_1 і l_2 були паралельними, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$k_1 = k_2, \tag{3.19}$$

тобто, щоб були рівними їх кутові коефіцієнти.

<u>Приклад.</u> Скласти рівняння прямої l_1, яка проходить через точку $A(-2,4)$ паралельно до прямої $l: 3x - 5y - 1 = 0$.

Запишемо рівняння прямої l у вигляді: $y = \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$. Звідси матимемо, що $k = \frac{3}{5}$.

Оскільки $l \parallel l_1$, то $k_1 = k = \frac{3}{5}$.

Тоді l_1: $y = \frac{3}{5}x + b$. $A \in l_1 \Rightarrow 4 = \frac{3}{5} \cdot (-2) + b$. Тоді $b = \frac{26}{5}$.

Отже, рівняння прямої має вигляд: $y = \frac{3}{5}x + \frac{26}{5}$. Або l_1: $3x - 5y + 26 = 0$.

<u>Приклад.</u> Скласти рівняння прямої l_1, яка проходить через точку $B(3,-1)$ перпендикулярно до прямої $l: 4x + y - 5 = 0$.

$l: y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3} \Rightarrow k = -\frac{4}{3}$. Тоді за формулою (3.18) отримаємо: $k_1 = -\frac{1}{k} = \frac{3}{4}$. Звідси

l_1: $y = \frac{3}{4}x + b$. $B \in l_1 \Rightarrow -1 = \frac{3}{4} \cdot 3 + b$. Звідки: $b = -\frac{13}{4}$.

Отже, рівняння прямої: $y = \frac{3}{4}x - \frac{13}{4}$. Або l_1: $3x - 4y - 13 = 0$.

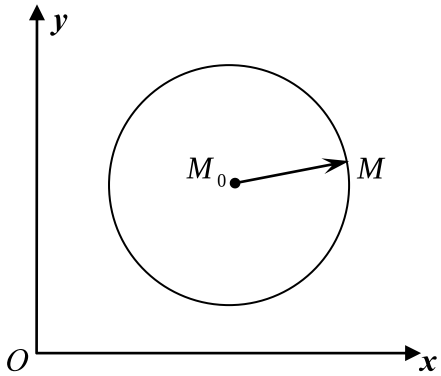
Розділ 4

Лінії другого порядку на площині

§-1. Коло

<u>Означення.</u> *Колом* називається геометричне місце точок площини, віддалі від яких до фіксованої точки, яка називається *центром кола*, є величина стала, рівна R. Число R називається *радіусом кола*.

Нехай дано коло з центром в точці $M_0(x_0, y_0)$ радіусом R (мал. 44). Скласти рівняння цього кола.



мал. 44

Візьмемо довільну точку $M(x, y)$, що належить колу. Тоді $\left|\overrightarrow{M_0M}\right| = R$, де $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0)$. Звідки отримаємо:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R,$$

або
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \tag{4.1}$$

– *рівняння кола*.

Рівняння кола з центром в початку координат має вигляд:

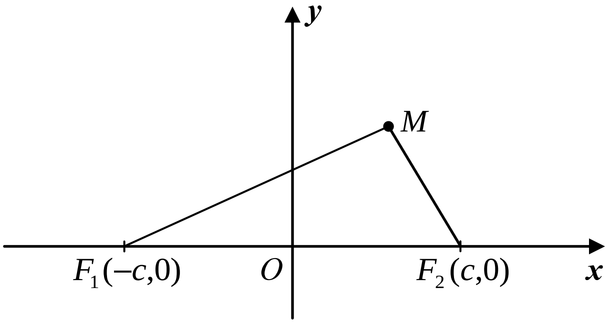
$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{4.2}$$

§-2. Еліпс

<u>Означення.</u> *Еліпсом* називається геометричне місце точок площини, сума віддалей яких до двох фіксованих точок, які називаються *фокусами*, є величина стала, рівна $2a$, де $2a > 2c$, $2c$ – віддаль між фокусами.

Побудуємо систему координат так: вісь *Ox* проведемо через фокуси F_1 і F_2, а вісь *Oy* проведемо через середину відрізка $F_1F_2 = 2c$ перпендикулярно до осі *Ox*.

Візьмемо довільну точку $M(x, y)$, що належить еліпсу (мал. 45).



мал. 45

За умовою, сума віддалей від точки M до фокусів F_1 і F_2 рівна $2a$, тобто: $F_1M + F_2M = 2a$, де $\overrightarrow{F_1M}(x+c,y)$, $\overrightarrow{F_2M}(x-c,y)$.

Тоді $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$. Звідки: $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$.

Піднесемо до квадрату обидві частини рівності та виконаємо необхідні спрощення:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2,$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4cx,$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx.$$

Піднесемо до квадрату:

$$a^2((x-c)^2+y^2)=(a^2-cx)^2,$$

$$a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)=a^4-2a^2cx+c^2x^2,$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2,$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Так як $a>c$ (за умовою), то $a^2-c^2>0$. Тому позначимо:

$$a^2-c^2=b^2. \qquad (4.3)$$

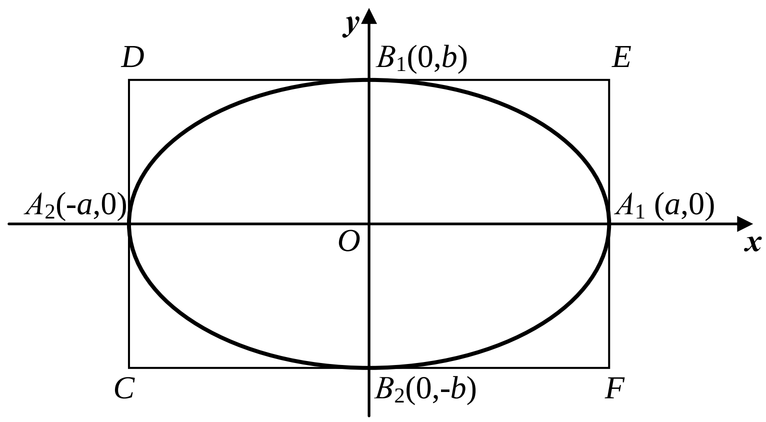
Звідки: $$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Поділимо останню рівність почленно на a^2b^2:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (4.4)$$

– *канонічне рівняння еліпса*.

Графік еліпса зображено на мал. 46.



мал. 46

Властивості еліпса:

1) Оскільки рівняння (4.4) є рівнянням другого степеня, то еліпс – лінія другого порядку.

2) Еліпс симетричний відносно осей *Ox* і *Oy*, а також відносно початку координат.

3) <u>*Означення.*</u> *Вершинами еліпса* називаються його точки перетину з осями координат. Еліпс має чотири вершини: A_1, A_2, B_1, B_2.

4) Еліпс повністю міститься у прямокутнику *CDEF*, тобто для еліпса виконуються нерівності:

$$\begin{cases} -a \le x \le a, \\ -b \le y \le b. \end{cases}$$

<u>*Означення.*</u> Відрізок $2a$ називається *великою віссю еліпса*, відрізок $2b$ – *малою віссю еліпса*.

<u>*Означення.*</u> *Ексцентриситетом еліпса* називається відношення міжфокусної віддалі до великої осі:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \tag{4.5}$$

де $0 \le \varepsilon < 1$.

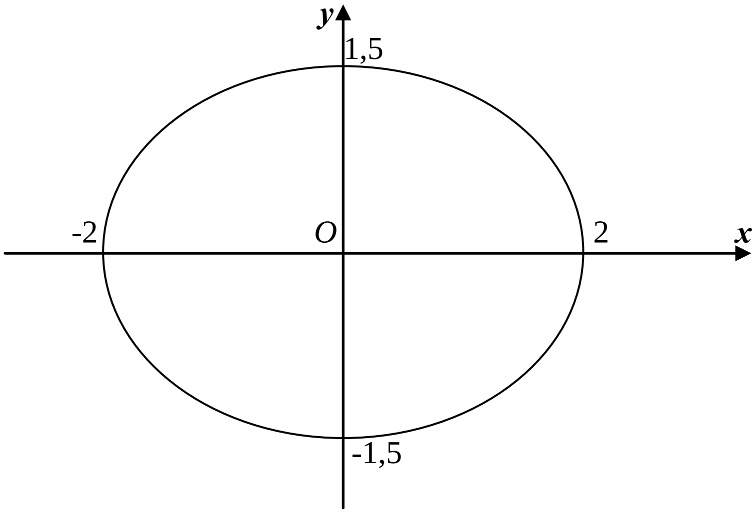
<u>Приклад.</u> Побудувати еліпс: $9x^2 + 16y^2 = 36$ і знайти параметри a, b, c, ε.

Зведемо рівняння еліпса до канонічного вигляду:

$$\frac{9x^2}{36} + \frac{16y^2}{36} = 1,$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9/4}=1.$$

Звідси отримаємо: $a=\sqrt{4}=2,\ b=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}=1{,}5$. Графік еліпса зображено на мал. 47.



мал. 47

З формули (4.3) знайдемо *с*: $c^2=a^2-b^2=4-\frac{9}{4}=\frac{7}{4}$. Тоді $c=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

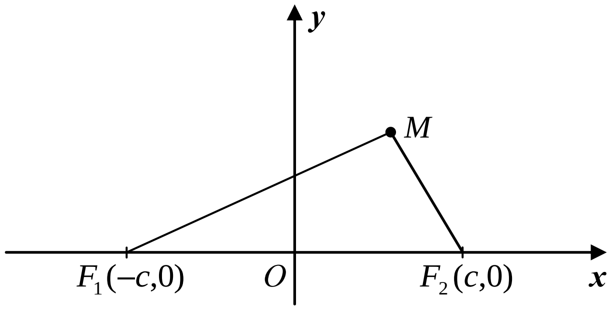
Знайдемо ε за формулою (4.5): $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

§-3. Гіпербола

<u>Означення.</u> Гіперболою називається геометричне місце точок площини, різниця віддалей яких до двох фіксованих точок, які називаються *фокусами,* є величина стала, рівна $2a$, де $2a<2c$, $2c$ – віддаль між фокусами.

Побудуємо систему координат так: вісь *Ox* проведемо через фокуси F_1 і F_2, а вісь *Oy* проведемо через середину відрізка $F_1F_2=2c$ перпендикулярно до осі *Ox*.

Візьмемо довільну точку $M(x,y)$, що належить гіперболі (мал. 48).



мал. 48

За умовою, різниця віддалей від точки M до фокусів F_1 і F_2 рівна $2a$, тобто: $F_1M - F_2M = 2a$, де $\overrightarrow{F_1M}(x+c,y)$, $\overrightarrow{F_2M}(x-c,y)$.

Тоді $\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$. Звідки: $\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$.

Піднесемо до квадрату обидві частини рівності та виконаємо необхідні спрощення:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4cx - 4a^2, \quad a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = cx - a^2.$$

Піднесемо до квадрату:

$$a^2((x-c)^2 + y^2) = (cx - a^2)^2,$$

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = c^2x^2 - 2a^2cx + a^4,$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4,$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Так як $a < c$ (за умовою), то $c^2 - a^2 > 0$. Тому позначимо:

$$c^2 - a^2 = b^2. \tag{4.6}$$

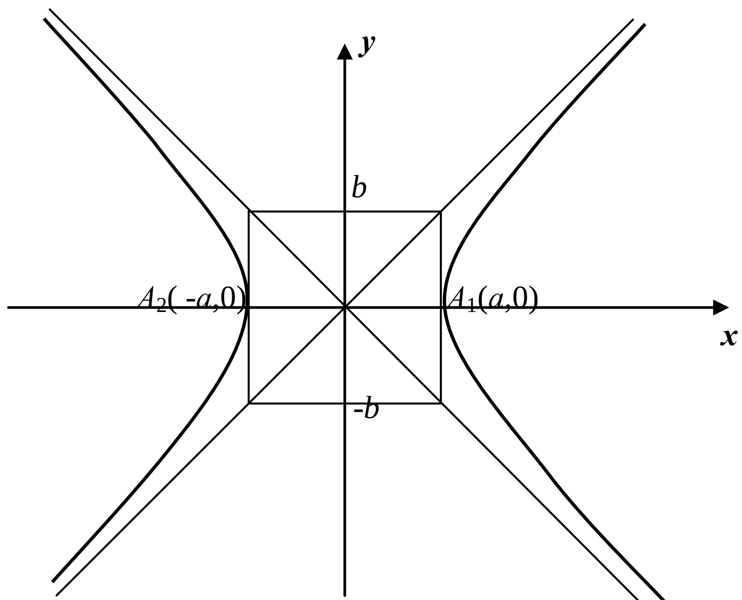
Звідки: $$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Поділимо останню рівність почленно на a^2b^2:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4.7}$$

– *канонічне рівняння гіперболи*.

Графік гіперболи зображено на мал. 49.



мал. 49

Властивості гіперболи:

1) Оскільки рівняння (4.7) є рівнянням другого степеня, то гіпербола – лінія другого порядку.

2) Гіпербола симетрична відносно осей Ox і Oy, а також відносно початку координат.

3) <u>*Означення.*</u> *Вершинами гіперболи* називаються її точки перетину з віссю Ox.

Гіпербола має дві вершини: A_1, A_2.

4) Гіпербола має дві асимптоти, які задаються рівняннями:

$$y_1 = \frac{b}{a}x \quad \text{і} \quad y_2 = -\frac{b}{a}x.$$

<u>*Означення.*</u> Відрізок $2a$ називається *дійсною віссю гіперболи*, відрізок $2b$ – *уявною віссю гіперболи*.

<u>*Означення.*</u> *Ексцентриситетом гіперболи* називається відношення міжфокусної віддалі до дійсної осі:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \tag{4.8}$$

де $\varepsilon > 1$.

<u>Приклад.</u> Побудувати гіперболу: $16x^2 - 64y^2 = 25$ і знайти параметри a, b, c, ε.

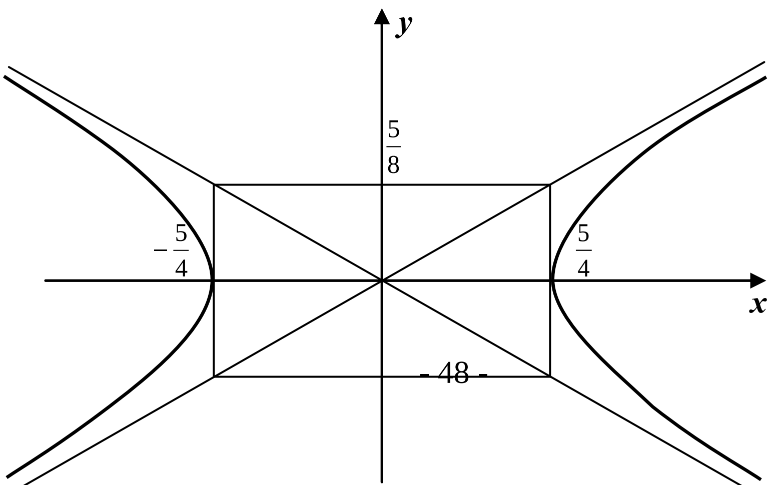
Зведемо рівняння гіперболи до канонічного вигляду:

$$\frac{16x^2}{25} - \frac{64y^2}{25} = 1,$$

$$\frac{x^2}{25/16} - \frac{y^2}{25/64} = 1.$$

Звідси отримаємо: $a = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$, $b = \sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8}$.

Графік гіперболи зображено на мал. 50.



$-\frac{5}{8}$

мал. 50

З формули (4.6) знайдемо c:

$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{25}{16} + \frac{25}{64} = 25\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{64}\right) = 25 \cdot \frac{80}{16 \cdot 64} = \frac{25 \cdot 5}{64} = \frac{125}{64}.$$

Тоді $c = \sqrt{\frac{125}{64}} = \frac{5\sqrt{5}}{8}$.

Знайдемо ε за формулою (4.8):

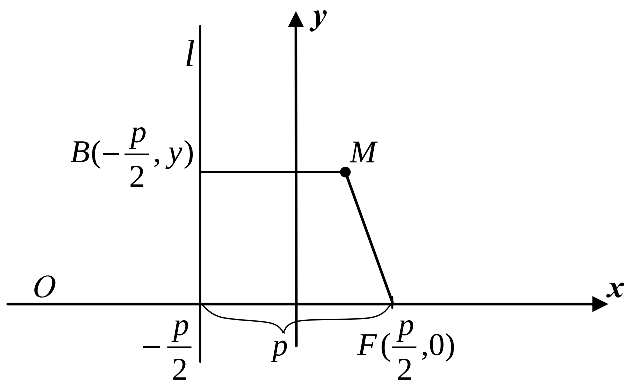
$$\varepsilon = \frac{\frac{5\sqrt{5}}{8}}{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

§-4. Парабола

<u>*Означення.*</u> *Параболою* називається геометричне місце точок площини, рівновіддалених від даної точки, яка називається *фокусом*, і від даної прямої, яка називається *директрисою*.

Побудуємо систему координат так: вісь Ox проведемо через фокус F перпендикулярно до директриси; вісь Oy проведемо посередині між фокусом і директрисою відрізка перпендикулярно до осі Ox.

Візьмемо довільну точку $M(x, y)$, що належить параболі (мал. 51).



мал. 51

За умовою, віддалі від точки M до фокуса F і до директриси рівні, тобто: $FM = BM$, де $\overrightarrow{FM}\left(x - \frac{p}{2}, y\right)$, $\overrightarrow{BM}\left(x + \frac{p}{2}, 0\right)$.

Тоді $\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}$.

Піднесемо до квадрату обидві частини рівності та виконаємо необхідні спрощення:

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2,$$

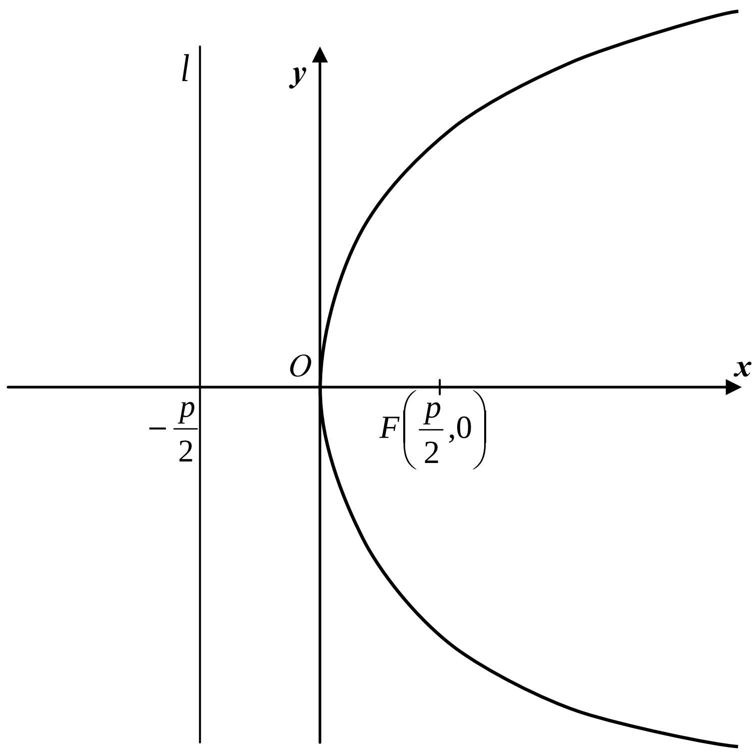
$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}.$$

Звідки:

$$y^2=2px \qquad (4.9)$$

– *канонічне рівняння параболи*.

Графік параболи зображено на мал. 52.



мал.52

Властивості параболи:

1) Оскільки рівняння (4.10) є рівнянням другого степеня, то парабола – лінія другого порядку.

2) Парабола симетрична відносно осі *Ox*.

3) Парабола має одну вершину в початку координат.

4) Парабола повністю міститься в правій півплощині відносно осі Оу.

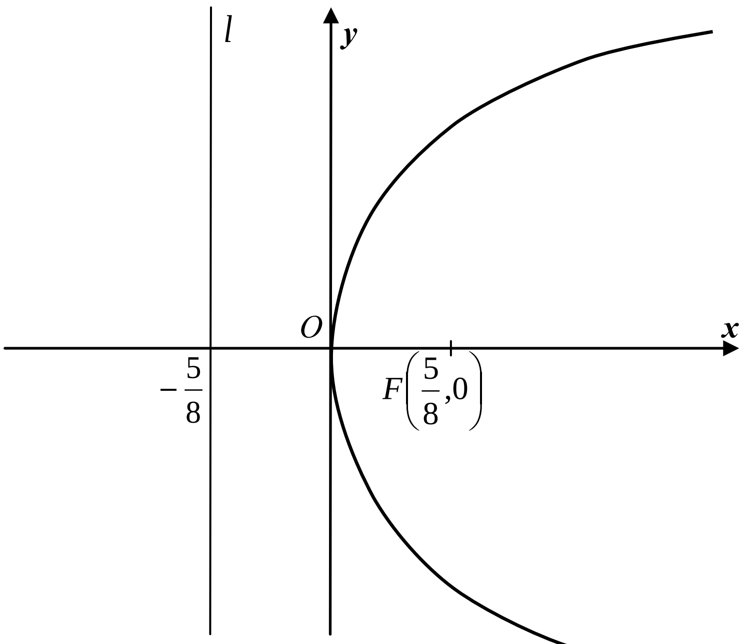
Приклад. Побудувати параболу: $2y^2 = 5x$ і знайти директрису та координати фокуса.

Зведемо рівняння параболи до канонічного вигляду:

$$y^2 = \frac{5}{2}x.$$

Звідси отримаємо: $2p = \frac{5}{2} \Rightarrow p = \frac{5}{4}$. Рівняння директриси: $x = -\frac{5}{8}$. Координати фокуса: $F\left(\frac{5}{8}, 0\right)$.

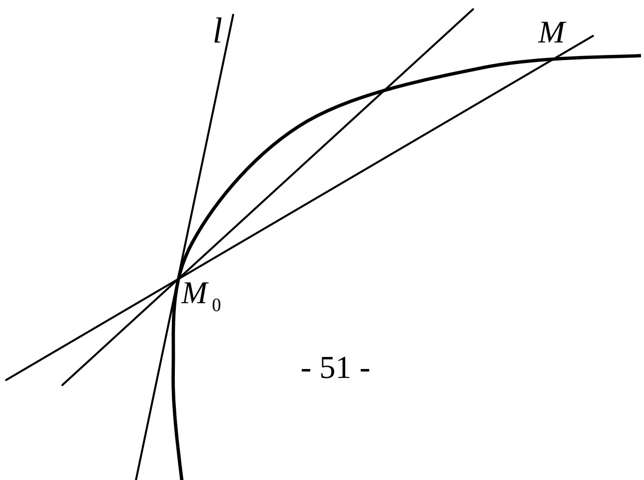
Графік параболи зображено на мал. 53.



мал.53

§-5. Дотичні до ліній другого порядку

Означення. Дотичною до лінії γ в точці M_0 називається граничне положення січної M_0M, коли точка M прямує до M_0 вздовж лінії γ (мал. 54).



γ

мал.54

Рівняння дотичних до ліній другого порядку мають вигляд:

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \qquad (4.11)$$

– рівняння дотичної до еліпса,

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \qquad (4.12)$$

– рівняння дотичної до гіперболи,

$$y_0 y = p(x + x_0) \qquad (4.13)$$

– рівняння дотичної до параболи.

Приклад. Знайти дотичну до еліпса: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ в точці $A(0,-2)$.

Рівняння дотичної згідно з формулою (4.11) має вигляд:

$\frac{0 \cdot x}{9} + \frac{(-2) \cdot y}{4} = 1$. Звідки: $y = -2$ — дотична до еліпса.

Розділ 5

Комплексні числа

§-1. Комплексні числа як розширення множини дійсних чисел

Означення. Множина всіх можливих впорядкованих пар (x, y) дійсних чисел, операції додавання, множення, а також їх рівність означаються за допомогою формул:

1) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, (5.1)

2) $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$, (5.2)

3) $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$ і $y_1 = y_2$, (5.3)

називається *множиною комплексних чисел*.

Множина комплексних чисел позначається: $\boldsymbol{C}$.

Елементи множини $\boldsymbol{C}$ називаються *комплексними числами*.

Якщо впорядковану пару $(x,0), x \in \boldsymbol{R}$, ототожнити з дійсним числом x, поклавши $(x,0) = x$, то отримаємо, що множина $\boldsymbol{C}$ комплексних чисел є розширенням множини $\boldsymbol{R}$ дійсних чисел.

Оскільки $(0,1) \cdot (y,0) = (0, y)$, то комплексне число $z = (x, y)$ допускає представлення:

$$z = (x, y) = (x,0) + (0, y) = (x,0) + (0,1) \cdot (y,0).$$

Тобто, це число можна записати у вигляді: $z = x + iy$, якщо ввести позначення: $i = (0,1)$ і вважати, що $(x,0) = x$, $(y,0) = y$.

Впорядкована пара $i = (0,1)$ називається *уявною одиницею*. Вона володіє властивістю:

$$i^2 = -1, \tag{5.4}$$

оскільки $i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1$.

Означення. Запис комплексного числа у вигляді:

$$z = x + iy, \tag{5.5}$$

де $x \in \boldsymbol{R}$, $y \in \boldsymbol{R}$, i – уявна одиниця, називається *алгебраїчною формою комплексного числа* $z = (x, y)$. При цьому x називається *дійсною частиною комплексного числа* z і позначається: $x = \operatorname{Re} z$; y називається *уявною частиною* і позначається: $y = \operatorname{Im} z$.

Якщо $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то формули (5.1), (5.2), (5.3) запишуться відповідно у вигляді:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \tag{5.6}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1), \tag{5.7}$$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \text{ і } \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2. \tag{5.8}$$

Зокрема: $$z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z = 0 \text{ і } \operatorname{Im} z = 0. \qquad (5.9)$$

Якщо $\operatorname{Im} z = 0$, то число z є дійсним числом. Якщо $\operatorname{Im} z \neq 0$, то комплексне число z називається *уявним числом*.

Операція віднімання комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ здійснюється за допомогою рівності: $$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \qquad (5.10)$$

Означення. Комплексне число

$$\bar{z} = x - iy \qquad (5.11)$$

називається *спряженим до комплексного числа* $z = x + iy$.

Очевидно, що $\overline{(\bar{z})} = z$, $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \boldsymbol{R}$.

Означення. Дійсне число

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (5.12)$$

називається *модулем комплексного числа* $z = x + iy$.

Очевидно, що завжди $|z| \geq 0$ і $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Справедливі також рівності:

$$|\bar{z}| = |z|, \qquad (5.13)$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2, \qquad (5.14)$$

оскільки $|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$, $z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - yi) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$.

Дія ділення комплексного числа z_1 на комплексне число z_2 здійснюється за допомогою рівностей:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}. \qquad (5.15)$$

Отже, частка комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ обчислюється за формулою:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2}. \qquad (5.16)$$

Приклад. Виконати дії та знайти дійсну і уявну частини результату:

1) $(3 - 2i)(5 + 7i)$,

2) $\dfrac{4 + 3i}{5 - 2i}$.

1) $(3 - 2i)(5 + 7i) = 15 + 21i - 10i - 14i^2 = 15 + 11i + 14 = 29 + 11i$.

Тоді $\operatorname{Re} z = 29$, $\operatorname{Im} z = 11$.

2) $\frac{4+3i}{5-2i}=\frac{(4+3i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)}=\frac{20+8i+15i+6i^2}{5^2-(2i)^2}=\frac{20+23i-6}{25+4}=\frac{14+23i}{29}=\frac{14}{29}+\frac{23}{29}i$.

Тоді $\operatorname{Re} z=\frac{14}{29}$, $\operatorname{Im} z=\frac{23}{29}$.

§-2. Розв'язування квадратних рівнянь з від'ємним дискримінантом

Означення. *Квадратним рівнянням* називається рівняння виду:

$$ax^2+bx+c=0. \tag{5.17}$$

Розв'язки цього рівняння у випадку невід'ємного дискримінанта

$$D=b^2-4ac \tag{5.18}$$

шукаються за формулами:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}. \tag{5.19}$$

Якщо ж $D<0$, то рівняння (5.17) на множині дійсних чисел $\boldsymbol{R}$ не має розв'язків. У цьому випадку знаходять уявні корені квадратного рівняння, тобто, корені на множині комплексних чисел $\boldsymbol{C}$.

Оскільки $i^2=-1$, то $i=\sqrt{-1}$. Якщо $D<0$, то $-D>0$ і

$\sqrt{D}=\sqrt{(-1)\cdot(-D)}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-D}=i\sqrt{-D}$.

Тоді розв'язки квадратного рівняння з від'ємним дискримінантом згідно із (5.19) обчислюються за формулами:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{-D}}{2a} \tag{5.20}$$

Приклад. Розв'язати квадратне рівняння: $x^2-2x+5=0$.

За формулою (5.18): $D=(-2)^2-4\cdot1\cdot5=4-20=-16<0$.

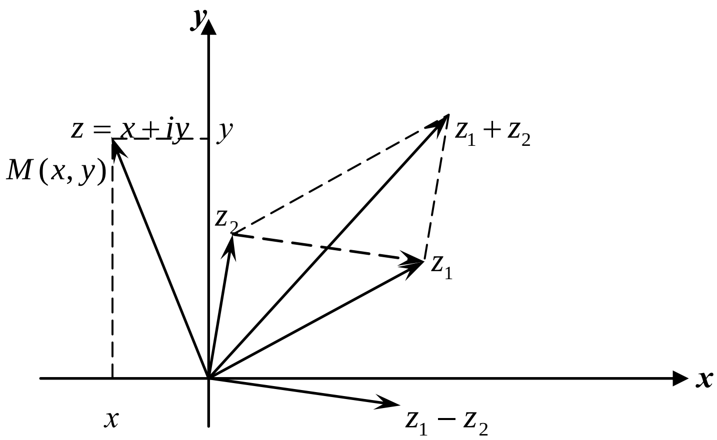
Тоді з формули (5.20) отримаємо:

$x_1=\frac{2+i\sqrt{16}}{2}=\frac{2+4i}{2}=1+2i$,

$x_2=\frac{2-i\sqrt{16}}{2}=\frac{2-4i}{2}=1-2i$.

§-3. Геометричне тлумачення комплексних чисел та дій над ними

Якщо в площині введено прямокутну декартову систему координат, то між сукупністю всіх точок координатної площини і множиною комплексних чисел $\boldsymbol{C}$ можна встановити взаємно однозначну відповідність за таким правилом: комплексному числу $z = x + iy \in \boldsymbol{C}$ відповідає єдина точка $M(x, y)$ цієї площини і навпаки (мал. 55). При цьому кажуть, що точка $M(x, y)$ є *зображенням комплексного числа* $z = x + iy$ *на площині*.



мал.55

Оскільки дійсні числа $x = (x, 0)$ зображаються точками осі *Ox*, то ця вісь називається *дійсною віссю*. Оскільки уявні числа виду $iy = (0, y)$ зображаються точками осі *Oy*, то ця вісь називається *уявною віссю*.

Комплексне число $z = x + iy$ можна також зобразити на координатній площині вектором $\overrightarrow{OM}$ із початком в точці $O(0,0)$ і кінцем в точці $M(x, y)$. Тоді сума $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ зобразиться вектором, що є діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах, які зображають комплексні числа z_1 та z_2. Комплексне число $z_1 - z_2$ зобразиться вектором, який є іншою діагоналлю цього паралелограма, або вектором, що виходить з початку координат і паралельний до цієї діагоналі (мал. 55).

Модуль $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ комплексного числа $z = x + iy$ дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{OM}$, який зображає це комплексне число, а величина $|z_1 - z_2|$ є відстань між точками, що зображають комплексні числа z_1 та z_2 на площині.

Як випливає з геометричних міркувань, для довільних комплексних чисел z_1 і z_2 справедливі нерівності:

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|, \qquad (5.21)$$

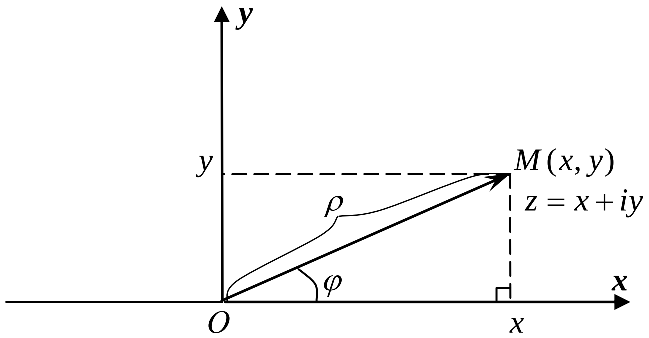
$$\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 - z_2|. \qquad (5.22)$$

§-4. Тригонометрична і показникова форми комплексного числа

Поряд із прямокутними декартовими координатами (x, y) точки *M*, яка на комплексній площині зображає комплексне число $z = x + iy$, розглянемо її полярні координати (ρ, φ), де

ρ – довжина радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$ точки *M*, φ – полярний кут точки *M*, тобто кут між додатним напрямком осі *Ox* і вектором $\overrightarrow{OM}$ (мал. 56). При цьому кут φ вважається від'ємним, якщо він вимірюється в напрямку, що відповідає руху годинникової стрілки, і додатним – в протилежному випадку.

Очевидно, що завжди $\rho \geq 0$ і $-\infty < \varphi < +\infty$.



мал. 56

Якщо (ρ, φ) – полярні координати точки $M(x, y)$, що зображає комплексне число $z = x + iy$ на комплексній площині, то

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{5.23}$$

а число φ називається *аргументом комплексного числа* z.

Для комплексного числа $z = x + iy$ з полярними координатами (ρ, φ) справедливі рівності:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \tag{5.24}$$

Звідси отримаємо:

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{5.25}$$

– *тригонометрична форма комплексного числа* z.

Введемо позначення: $$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{5.26}$$

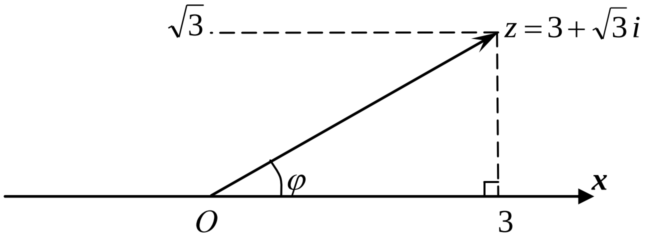
Тоді з формули (5.25) отримаємо:

$$z = \rho e^{i\varphi} \tag{5.27}$$

– *показникова форма комплексного числа*.

<u>Приклад.</u> Знайти тригонометричну та показникову форми комплексного числа $z = 3 + \sqrt{3}i$.

Комплексне число $z = 3 + \sqrt{3}i$ зображається вектором із початком в точці $O(0,0)$ і кінцем в точці $(3, \sqrt{3})$ (мал. 57).



мал. 57

Знайдемо ρ за формулою (5.23):

$$\rho=\sqrt{3^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{9+3}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}.$$

Знайдемо φ за формулою (5.24):

$$\cos\varphi=\frac{x}{\rho}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \text{Звідси } \varphi=\frac{\pi}{6}.$$

Отже, тригонометрична форма комплексного числа $z=3+\sqrt{3}i$ за формулою (5.25) має вигляд:

$$z=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Показникову форму знайдемо за формулою (5.27):

$$z=2\sqrt{3}\,e^{\frac{\pi}{6}i}.$$

§-5. Дії над комплексними числами в тригонометричній та показниковій формах

Над комплексними чисел z_1 і z_2, записаними в тригонометричній формі:

$$\begin{aligned} z_1&=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\\ z_2&=\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2), \end{aligned} \tag{5.28}$$

дії множення і ділення виконуються за такими правилами:

I. Множення комплексних чисел

$$\begin{aligned} &z_1\cdot z_2=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=\\ &=\rho_1\cdot\rho_2(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2+i\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2+i\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)=\\ &=\rho_1\cdot\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \end{aligned}$$

Отже, отримаємо: $$z_1\cdot z_2=\rho_1\cdot\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)) \tag{5.29}$$

– *модуль добутку комплексних чисел дорівнює добутку їх модулів, аргумент добутку дорівнює сумі їх аргументів*.

II. Ділення комплексних чисел

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)\cdot(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Звідси матимемо: $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \qquad (5.30)$$

– модуль частки комплексних чисел дорівнює частці їх модулів, аргумент частки дорівнює різниці їх аргументів.

III. Піднесення комплексних чисел до цілого степеня (формула Муавра)

Нехай маємо комплексне число z, записане в тригонометричній формі:

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Застосовуючи до цього числа формулу (5.29), можна отримати таку рівність:

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad (5.31)$$

– формула Муавра.

IV. Добування кореня з комплексних чисел

<u>*Означення.*</u> *Коренем n-го степеня з комплексного числа* z називається таке комплексне число ω, що $\omega^n = z$.

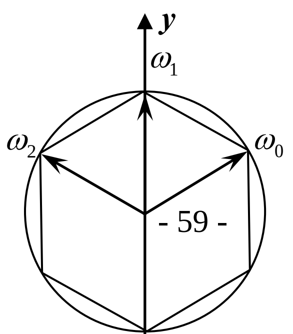
При $z \neq 0$ існує n різних комплексних чисел $\omega_0, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_{n-1}$, що є коренями n-го степеня з комплексного числа z.

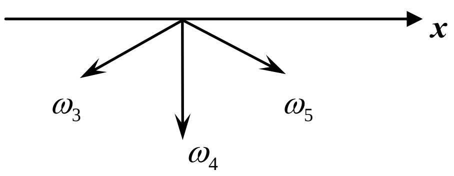
Корені ω_k n-го степеня з комплексного числа $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ обчислюються за формулами:

$$\omega_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad (5.32)$$

де $k = \overline{0, n-1}$.

Всі корені ω_k n-го степеня з комплексного числа z лежать на колі радіусом $\sqrt[n]{\rho}$ з центром в початку координат. Сполучивши їх послідовно, отримаємо правильний n-кутник, вписаний у це коло (мал. 58 – випадок кореня 6-го степеня).





мал. 58

Приклад. Знайти корені 4-го степеня з числа $z=-1$.

Знайдемо тригонометричну форму числа $z=-1$. Очевидно, що $\rho=1, \varphi=\pi$. Звідси отримаємо: $$z=1\cdot(\cos\pi+i\sin\pi).$$

Тоді за формулою (5.32) матимемо:

$$\omega_0=\sqrt[4]{1}(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 0}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 0}{4})=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,$$
$$\omega_1=\sqrt[4]{1}(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 1}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 1}{4})=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,$$
$$\omega_2=\sqrt[4]{1}(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 2}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 2}{4})=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i,$$
$$\omega_3=\sqrt[4]{1}(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 3}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 3}{4})=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Якщо комплексні числа z_1 і z_2 записані в показниковій формі:

$$z_1=\rho_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2=\rho_2 e^{i\varphi_2}, \tag{5.33}$$

то дії множення і ділення згідно із формулами (2.29) і (2.30) виконуються так:

$$z_1\cdot z_2=\rho_1\cdot\rho_2\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \tag{5.34}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}. \tag{5.35}$$

Для комплексного числа z, записаного в показниковій формі:

$z=\rho e^{i\varphi}$, піднесення цього числа до n-го степеня і добування з нього кореня n-го степеня виконуються відповідно до формул (5.31), (5.32) за правилами:

$$z^n=\rho^n\cdot e^{in\varphi}, \tag{5.36}$$

– формула Муавра.

$$\omega_k=\sqrt[n]{\rho}\cdot e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n}}, \tag{5.37}$$

де $k=\overline{0,n-1}$.

Список використаної літератури:

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – Київ, “А.С.К.”, 2005. – 648 с.
2. Рудавський Ю.К., Костробій П.П. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. – Львів, 1999.
3. Соколенко О.І., Новик Г.А. Вища математика в прикладах і задачах. – К.: ”Либідь”, 2001 р.
4. Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник. − Львів: «Новий світ−2000», 2007. − 436 с.
5. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: Видавництво А. С. К., 2004, – 648 с.
6. Литвин І.І., Конопчук О.М., Желізняк Г.О. Вища математика: Навч. Посібник.-Київ «Центр учбової літератури»., 2009
7. Рудницький В.Б., Кантемір І.І. Практичні заняття з курсу вищої математики. Частина 2.: Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. − Хмельницький.: ТУП. 2000. − 315 с.
8. Лісовська В. П., Перестюк М. О. Вища математика. Практикум. ч. ІІ. – К.:КНЕУ, 2012, – 448 с.

Зміст:

Вища математика [Текст]: конспект лекцій для здобувачів освіти освітньо-професійного ступеня фаховий молодший бакалавр галузь знань 27 Транспорт спеціальності 274 Автомобільний транспорт денної форми навчання / уклад. В.С.Кулик., Т.П. Кузьмич, М.В. Баховська – Любешів: ВСП «Любешівський ТФК ЛНТУ, 2023 –64 с.

Комп’ютерний набір Т.П. Кузьмич

Редактор: Т.П. Кузьмич

Підр. до друку _________ 2023р. Формат А4. Папір офіс.

Гарн.Таймс. Умов.друк, арк. 3,5. Обл.вид.арк.3,4.

Тираж 15 прим. Зам.