МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки до виконання самостійної роботи
для здобувачів освіти освітньо-професійного ступеня фаховий молодший бакалавр
галузь знань 27 Транспорт
спеціальності 274 Автомобільний транспорт
денної форми навчання

Любешів 2023

УДК 51 (07)
К 88

До друку
Голова методичної ради ВСП «Любешівський ТФК ЛНТУ»
_____________________ Герасимик-Чернова Т.П.
(підпис)

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозитарій коледжу
Бібліотекар _____________ М.М. Демих
(підпис)
Рекомендовано до видання методичною радою ВСП «Любешівський ТФК ЛНТУ»
протокол №___ від _________________ 2023 року

Розглянуто і схвалено на засіданні циклової методичної комісії викладачів математичних та природничо-наукових дисциплін ВСП «Любешівський ТФК ЛНТУ»,
протокол №___ від _________________ 2023 року
Голова циклової методичної комісії _______________Остимчук А.В.

(підпис)
Укладачі: ____________ Кулик В.С.,
____________ Баховська М.В.,
____________ Кузьмич Т.П.

Рецензент: _____________________
(підпис)

Відповідальний за випуск: _____________ Т.П. Кузьмич, методист коледжу
(підпис)

Вища математика [Текст]: методичні вказівки до виконання самостійної роботи для здобувачів освіти освітньо-професійного ступеня фаховий молодший бакалавр галузь знань 27 Транспорт спеціальності 274 Автомобільний транспорт денної форми навчання/ уклад. В.С.Кулик. Т.П. Кузьмич, М.В. Баховська М.В. – Любешів: ВСП «Любешівський ТФК Луцького НТУ», 2023– 23 с.

Методичні вказівки містять тематичне планування самостійної роботи, запитання та завдання для самоконтролю, рекомендовану літературу.

1. Вступ

Робоча навчальна програма дисципліни "Вища математика" є складовою частиною нормативно-методичного забезпечення навчального процесу для підготовки фахівців освітньо-професійного ступеня фаховий молодший бакалавр. Зміст програми передбачає лекції, практичні заняття та самостійну роботу.

Мета курсу – забезпечити вивчення тих математичних понять та методів, які не ввійшли до програми загальноосвітньої математичної підготовки студентів, але використовуються в процесі вивчення дисциплін циклу професійної підготовки.

Самостійна робота студентів формує здатність самостійно мислити, засвоювати теоретичний матеріал; вміння користуватися всіма доступними джерелами знань; вміння самостійно добирати навчальний матеріал, аналізувати, узагальнювати його; конспектувати, самостійно опрацьовувати математичний матеріал, працювати з додатковою літературою; використовувати сучасні інформаційні можливості.

Методичні рекомендації для самостійного вивчення дисципліни «Вища математики» підготовлені з метою надання допомоги студентам у процесі вивчення даного предмету.

В результаті вивчення дисципліни студент повинен знати:

- означення визначника другого і третього порядку;
- правило Крамера;
- означення матриці та її властивості;
- формули для обчислення скалярного, векторного, мішаного добутків та їх застосування;
- рівняння прямої у різних формах, еліпса, гіперболи, параболи.
- означення комплексних чисел, різні їх форми та перехід від однієї форми до іншої;

Студент повинен вміти:

- обчислювати визначники другого і третього порядку;
- розв'язувати системи рівнянь за правилом Крамера;
- виконувати дії над векторами;
- обчислювати скалярний, векторний, мішаний добутки і їх застосовувати;
- досліджувати взаємне розташування прямих та знаходити кут між ними;
- будувати криві другого порядку за їх рівняннями та визначати їх властивості;
- виконувати дії над комплексними числами в алгебраїчній, тригонометричній, показниковій формах;

2. Тематичне планування самостійної роботи

№ з/п	Назва тем курсу, питань винесених на самостійне опрацювання	Час опрацювання
1	2	3
1.	*Тема 1*. **Елементи векторної алгебри**	
1.1	Поняття матриці. Визначники другого і третього порядку та їх властивості. Системи лінійних рівнянь. Метод Гауса розв'язання систем лінійних рівнянь.Метод Крамера розв'язання систем лінійних рівнянь. Матриці та основні дії над ними. Обернена матриця. Матрична форма запису системи лінійних рівнянь. Матричний метод розв'язання систем лінійних рівнянь	10
2	*Тема 2.* **Метод координат**	
2.1	Вектори на площині та в просторі. Дії над векторами. Розкладання вектора за даними напрямами. Векторний базис та система координат. Скалярний добуток векторів Векторний добуток векторів. Мішаний добуток векторів. Прямокутні координати. Довжина відрізка. Поділ відрізка в заданому відношенні та навпіл. Центр ваги трикутника. Полярна система координат. Циліндрична система координат	10
3	*Тема 3*. **Аналітична геометрія на площині**	
3.1	Пряма на площині. Канонічне рівняння прямої. Рівняння прямої, що проходить через дві точки. Загальне рівняння прямої. Пряма у «відрізках» на осях. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Пряма, задана точкою і нормованим вектором. Нормальне рівняння прямої. Взаємне розміщення двох прямих на площині Віддаль від точки до прямої. Кут між прямими. Поняття про лінії другого порядку на площині. Коло. Еліпс.Гіпербола. Парабола	10
4	*Тема 4*. **Комплексні числа**	
4.1	Комплексні числа як розширення множини дійсних чисел. Алгебраїчна форма комплексного числа. Дії над комплексними числами, заданими в алгебраїчній формі. Розв'язання квадратних рівнянь з від'ємним дискримінантом. Геометричне тлумачення комплексних чисел. Тригонометрична і показникова форми комплексного числа. Перехід від алгебраїчної форми комплексного числа до тригонометричної та показникової. Дії над комплексними числами, заданими в тригонометричній формі: множення, ділення, піднесення до степеня, добування кореня	12
	ВСЬОГО	42

Тема 1.

Елементи лінійної алгебри

Поняття матриці.

Означення детермінанта n-го порядку

<u>*Означення.*</u> *Матрицею порядку* $m \times k$ називається прямокутна таблиця, що складається з m рядків, k стовбців і $m \times k$ чисел, що стоять у ній.

Матриці записують у вигляді:

$$A_{m\times k} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix}. \qquad (1.2)$$

Розглянемо квадратну матрицю n-го порядку:

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1.3)$$

<u>*Означення.*</u> *Детермінантом* (*визначником*)матриці *A* *n*-го порядку називається алгебраїчна сума $n!$доданків, кожен з яких є добутком n елементів цієї матриці, взятих по одному і тільки по одному з кожного рядка і кожного стовбця цієї матриці. Знак кожного такого добутку рівний $(-1)^l$, де l – кількість інверсій у перестановці других індексів, при умові, що перші індекси впорядковані:

$$\det A = \sum_{n!} (-1)^l a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot a_{3\alpha_3} a_{(n-1)\alpha_{n-1}} a_{n\alpha_n} , \qquad (1.4)$$

де

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.5)$$

Знайдемо формулу для визначення визначника 2-го порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Для цього складемо таблицю:

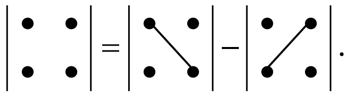
Добуток	Перестановка других індексів	Кількість інверсій	Знак добутку

$a_{11}\cdot a_{22}$	(1,2)	0	$(-1)^0=+1$
$a_{12}\cdot a_{21}$	(2,1)	1	$(-1)^1=-1$

За означенням детермінанта отримаємо:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21} \qquad (1.6)$$

Отже, визначник 2-го порядку можна обчислювати за схемою:



Знайдемо формулу для визначення визначника 3-го порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

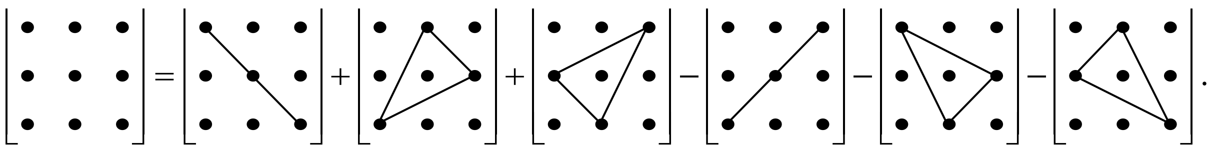
Складемо таблицю:

Добуток	Перестановка других індексів	Кількість інверсій	Знак добутку
$a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}$	(1,2,3)	0	$(-1)^0=+1$
$a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}$	(1,3,2)	1	$(-1)^1=-1$
$a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}$	(2,1,3)	1	$(-1)^1=-1$
$a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}$	(2,3,1)	2	$(-1)^2=+1$
$a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}$	(3,2,1)	3	$(-1)^3=-1$
$a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}$	(3,1,2)	2	$(-1)^2=+1$

За означенням детермінанта отримаємо:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}. \qquad (1.7)$$

Отже, визначник 3-го порядку можна обчислювати за схемою:



Метод Гаусса і метод Гаусса-Жордана розв'язування систем лінійних рівнянь

<u>*Означення.*</u> *Системою k лінійних рівнянь з n невідомими* називається система виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases} \qquad (1.8)$$

де $a_{ij}, b_i \in R(i=\overline{1,k}, j=\overline{1,n})$ – задані дійсні числа, $x_j\,(j=\overline{1,n})$ – змінні. *Розв'язком системи* називається *n*-вимірний вектор $\overrightarrow{x_0}=(x_1^0, x_2^0, x_3^0, ..., x_n^0)$ такий, що при підстановці його координат замість відповідних змінних, кожне рівняння системи (1.8) перетворюється на правильну рівність.

Означення. Система, яка має розв'язок, називається *сумісною*, а система, яка не має розв'язку – несумісною.

Означення. Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, *невизначеною* – коли система має безліч розв'язків.

Метод Гаусса полягає у послідовному виключенні невідомих з рівнянь:

x_1 виключаємо з усіх рівнянь, крім першого;

x_2 – з усіх рівнянь, крім першого і другого;

x_3 – з усіх рівнянь, крім першого, другого і третього і т.д.

Для сумісних систем лінійних рівнянь можливі два випадки:

1. В останньому рівнянні залишиться одне невідоме. Тоді система матиме єдиний розв'язок, який шукається «знизу-вгору».

2. В останньому рівнянні залишиться більш, ніж одне невідоме. Тоді лишаємо у лівій частині цього рівняння лише одну змінну, а інші переносимо у праву частину рівняння і називатимемо їх *вільними змінними*. Вільним змінним можна надавати довільних значень і шукати відповідні значення інших невідомих. В цьому випадку система матиме безліч розв'язків, тобто буде невизначеною.

Метод Гаусса можна модифікувати, якщо робити послідовне виключення змінних з усіх рівнянь, крім одного. Це можна зробити за допомогою правила прямокутника. При цьому потрібно обирати ведучий елемент (найкраще на кожному кроці вибирати «одиницю»), який має міститися по головній діагоналі матриці, що відповідає даній системі рівнянь. Удосконалений таким способом метод Гаусса називається *методом Гаусса - Жордана.*

Метод Крамера розв'язування систем лінійних рівнянь

Розглянемо систему *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3, \\ ...., \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1.9}$$

Введемо позначення: $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$, $\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$,

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta \neq 0$, то розв’язок системи (1.9) шукають за *формулами Крамера:*

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \\ x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \\ x_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n=\dfrac{\Delta_n}{\Delta}. \end{cases} \tag{1.10}$$

Дії над матрицями

__Означення.__ Сумою двох матриць $A_{m\times k}=(a_{ij})$ і $B_{m\times k}=(b_{ij})$, де $i=\overline{1,m}, j=\overline{1,k}$, називається матриця $C_{m\times k}=(c_{ij})$, де $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ для $\forall\ i=\overline{1,m}, j=\overline{1,k}$.

__Означення.__ Добутком матриці $A_{m\times k}=(a_{ij})$ *на число* λ називається матриця $\lambda A_{m\times k}=(\lambda a_{ij})$, *де* $i=\overline{1,m}, j=\overline{1,k}$.

__Означення.__ Добутком двох матриць $A_{m\times k}=(a_{ir})$ і $B_{k\times p}=(b_{rj})$, де $i=\overline{1,m}, r=\overline{1,k}, j=\overline{1,p}$, називається матриця $C_{m\times p}=(c_{ij})$, де

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+a_{i3}\cdot b_{3j}+\dots+a_{ik}\cdot b_{kj}=\sum_{r=1}^{k}a_{ir}\cdot b_{rj} \tag{1.11}$$

для $\forall\ i=\overline{1,m}, j=\overline{1,p}$.

Властивості дій над матрицями:

1. $\forall A,B: A+B=B+A;$
2. $\forall A,B,C: (A+B)+C=A+(B+C);$
3. $\forall A,B,\forall\lambda: \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B;$
4. $\forall A,\forall\lambda,\mu: (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A;$
5. $A\times B\neq B\times A$ (в загальному випадку);
6. $\forall A,B,C: (A\times B)\times C=A\times(B\times C);$
7. $\forall A,B,C: (A+B)\times C=A\times C+B\times C.$

Одинична матриця. Обернена матриця та її обчислення за допомогою елементарних перетворень

<u>*Означення.*</u> *Одиничною матрицею n-го порядку* називається така квадратна матриця, в якій по головній діагоналі розміщені «одиниці», а інші елементи – нулі.

Наприклад, одинична матриця 4-го порядку має вигляд:

$$E_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Одинична матриця E має ту властивість, що при множенні її чи зліва, чи справа на довільну матрицю одержуємо ту ж матрицю. Тобто, для будь-якої матриці A виконуються рівності:

$$A\times E = E\times A = A. \tag{1.12}$$

<u>*Означення.*</u> Матриця B називається *оберненою до матриці A*, якщо виконуються рівності:

$$A\times B = B\times A = E. \tag{1.13}$$

Обернену матрицю до матриці A позначають A^{-1}.

З означення слідує, що якщо матриця B обернена до матриці A, то і A – обернена до B, тобто має місце рівність:

$$(A^{-1})^{-1} = A. \tag{1.14}$$

Обернені матриці існують тільки для квадратних матриць A, причому таких, що $\det A \neq 0$.

Для знаходження оберненої матриці до матриці A складають матрицю виду: $\left(A\,|\,E\right)$, де E – одинична матриця того ж порядку, що й A. Утворену матрицю за допомогою елементарних перетворень зводять до вигляду: $\left(E\,|\,B\right)$. Тоді покладають: $A^{-1} = B$.

Обчислення оберненої матриці за допомогою алгебраїчних доповнень

Нехай маємо квадратну матрицю n-го порядку:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

Розглянемо детермінант n-го порядку, що відповідає цій матриці:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.16)$$

Означення. Мінором елемента a_{ij} детермінанта *n*-го порядку називається детермінант (*n-1*)-го порядку, який одержується з даного детермінанта викресленням *i*-того рядка та *j*-того стовбця.

Мінор елемента a_{ij} позначається: M_{ij}.

Означення. Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} називається число:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \qquad (1.17)$$

Теорема

Нехай задано матрицю A рівністю (1.15). *Тоді, якщо* $\det A = \Delta \neq 0$, *то обернену матрицю до матриці A можна обчислити за допомогою рівності:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \dots & A_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1.18)$$

Матрична форма запису системи лінійних рівнянь

Розглянемо систему *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1.19)$$

Введемо до розгляду такі матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тоді систему (1.19) можна записати у вигляді матричного рівняння:

$$A \times X = B \qquad (1.20)$$

Нехай $\Delta = \det A \neq 0$. Тоді матриця *A* має обернену A^{-1}. Помножимо зліва обидві частини рівності (1.20) на A^{-1}:

$$A^{-1}\times(A\times X)=A^{-1}\times B,$$

$$(A^{-1}\times A)\times X=A^{-1}\times B,$$

$$E\times X=A^{-1}\times B,$$

$$X=A^{-1}\times B. \qquad (1.21)$$

Матриця X є розв'язком матричного рівняння (1.20), а значить і початкової системи (1.19).

Завдання для самостійної роботи

1. Що називається мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника Δ_n n-го порядку?

А. Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника Δ_n називається визначник $(n-1)$- шого порядку, який утворюється з елементів вихідного визначника Δ_n, що залишаються після викреслювання j-го рядка та j-го стовпця.

Б. Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника Δ_n називається визначник $(n-1)$- шого порядку, який утворюється з елементів вихідного визначника Δ_n, що залишаються після викреслювання i-го рядка та i-го стовпця.

В. Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника Δ_n називається визначник, який утворюється з елементів вихідного визначника Δ_n, якщо переставити місцями відповідні елементи i-го рядка та j-го стовпця.

Г. Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника Δ_n називається визначник $(n-1)$- шого порядку, який утворюється з елементів вихідного визначника Δ_n, що залишаються після викреслювання i-го рядка та j-го стовпця, на перетині яких розташований елемент a_{ij}.

2. Що називається алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника Δ_n n-го порядку?

А. $A_{ij}=(-1)^{i-j}M_{ij}$. Б. $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

В. $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ji}$. Г. $A_{ij}=(-1)^{2+i}M_{ij}$.

3. Визначник другого порядку $\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ дорівнює:

А. $a_{11}a_{21}+a_{22}a_{12}$. Б. $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. В. $a_{11}a_{22}+a_{12}a_{21}$.
Г. $a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}$.

4. Визначник третього порядку $\Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ дорівнює (через A_{ij} позначено алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}):

А. $a_{11}A_{11}+a_{12}A_{11}+a_{13}A_{11}$. Б. $a_{11}A_{11}+a_{12}A_{21}+a_{13}A_{31}$.

В. $a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$. Г. $a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}$.

5. Визначник третього порядку $\Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ дорівнює (через A_{ij} позначено алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}):

А. $a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}$. Б. $a_{11}A_{11}+a_{21}A_{22}+a_{31}A_{33}$.

В. $a_{11}A_{31}+a_{21}A_{32}+a_{31}A_{33}$. Г. $a_{11}A_{11}+a_{21}A_{12}+a_{31}A_{13}$.

6. Яка матриця називається транспонованою A^T до матриці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}?$$

А. $\begin{pmatrix} a_{1n} & a_{2(n-1)} & \dots & a_{11} \\ a_{2n} & a_{2(n-1)} & \dots & a_{21} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{mn} & a_{m(n-1)} & \dots & a_{m1} \end{pmatrix}$. Б. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

В. $\begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ a_{(m-1)1} & a_{(m-2)2} & \dots & a_{(m-1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$. Г. $A^T=-A$.

7. Які дві матриці є взаємно транспонованими?

А. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Б. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

В. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Г. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Яка квадратна матриця є одиничною?

А. $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Б. $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

В. $E=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Г. $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Сумою яких двох матриць є матриця $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$?

А. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$. Б. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

В. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$. Г. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Різницею яких двох матриць є матриця $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -11 \end{pmatrix}$?

А. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -21 \\ 3 & 40 \end{pmatrix}$. Б. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

В. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Г. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

11. Добутком числа $\alpha = 2$ на матрицю $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ є

А. $\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$. Б. $\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$.

В. $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$. Г. $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$.

12. Добутком яких двох матриць є матриця $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$?

А. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Б. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

В. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Г. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

13. Добутком яких двох матриць є матриця $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$?

А. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Б. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

14.. Яка система двох лінійних рівнянь має розв'язок $x = 3,\ y = 4$?

А. $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$. Б. $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$.

В. $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$. Г. $\begin{cases} x - 2y = 11 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$.

15. Яка система двох лінійних рівнянь еквівалентна системі

$$\begin{cases} 3x \qquad = 9 \\ \qquad 5y = 15 \end{cases} ?$$

А. $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$. Б. $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$.

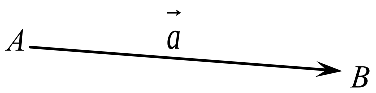
В. $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$. Г. $\begin{cases} x + y = 6 \\ 3x + y = 12 \end{cases}$.

.

Тема 2
Метод координат
Поняття вектора. Колінеарні і компланарні вектори

Під *вектором* будемо розуміти напрямлений відрізок.

Для векторів застосовують позначення: $\vec{a}, \overrightarrow{AB}$. В останньому випадку точку A називають *початком вектора*, точку B – *кінцем вектора* $\overrightarrow{AB}$ (мал.1).



мал. 1

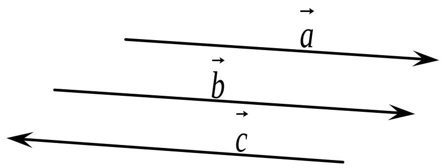
<u>*Означення.*</u> Вектор, у якого початок співпадає з кінцем, називається *нульовим*.

Нульовий вектор позначається: $\vec{0}$. Напрям нульового вектора невизначений.

<u>*Означення.*</u> Вектори називаються *колінеарними*, якщо вони паралельні до однієї прямої або лежать на одній прямій.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – колінеарні, то це позначають так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

<u>*Означення.*</u> Паралельні вектори називаються *співнапрямленими,* якщо вони лежать в одній півплощині відносно прямої, що проходять через початки цих векторів; *протилежно напрямленими* – якщо вони лежать в різних півплощинах відносно цієї прямої.



мал. 2

На мал.2 вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – співнапрямлені: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – протилежно напрямлені: $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$.

Вектор $\overrightarrow{BA}$ називається *протилежним до вектора* $\overrightarrow{AB}$, тобто: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

<u>*Означення.*</u> Три вектори називаються *компланарними*, якщо вони паралельні до однієї площини або лежать в одній площині.

Довжина вектора $\vec{a}$ позначається $|\vec{a}|$.

<u>*Означення.*</u> Вектори називаються *рівними*, якщо вони співнапрямлені і мають однакову довжину, тобто:

$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow$ 1. $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, 2. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

<u>**Теорема**</u>

З будь-якої точки простору можна побудувати вектор, рівний даному, і при тому тільки один.

Лінійні операції над векторами

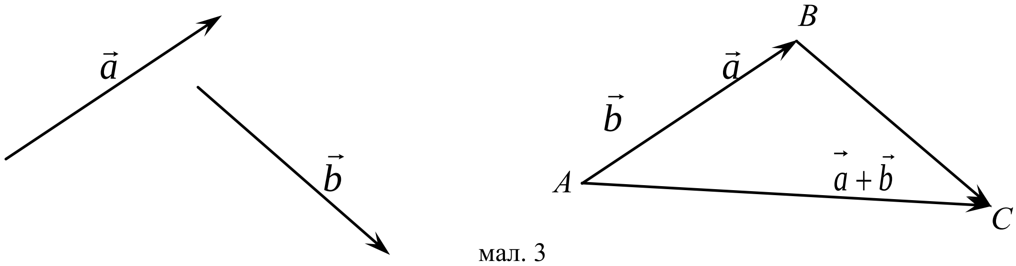
I. Додавання векторів.

<u>*Означення.*</u> *Сумою двох векторів* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{a} + \vec{b}$, який будується за таким правилом:

1) з довільної точки A будуємо вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$;

2) з його кінця – точки B будуємо вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$;

3) сполучаємо початок вектора $\vec{a}$ – точку A з кінцем вектора $\vec{b}$ – точкою C.



мал. 3

Таке правило побудови суми двох векторів називається *правилом трикутника*.

Як бачимо з мал.3, для суми векторів справедлива рівність:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad . \tag{2.1}$$

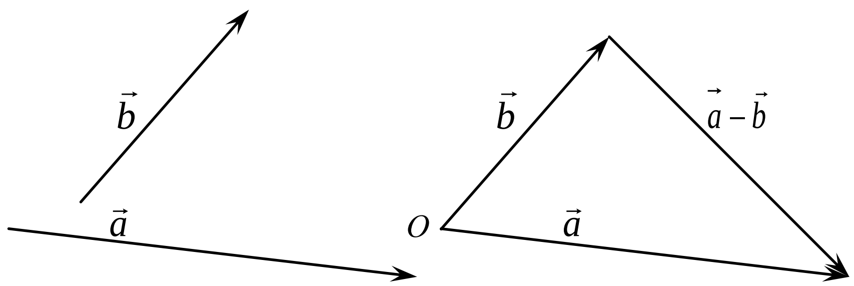
***Властивості суми векторів*:**

1. $\forall \vec{a}, \vec{b} : \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ – *комутативність*;
2. $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} : (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ – *асоціативність*;
3. $\forall \vec{a} : \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$;
4. $\forall \vec{a} : \vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$.

II. Віднімання векторів.

<u>*Означення.*</u> *Різницею двох векторів* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{c}$, який в сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$.

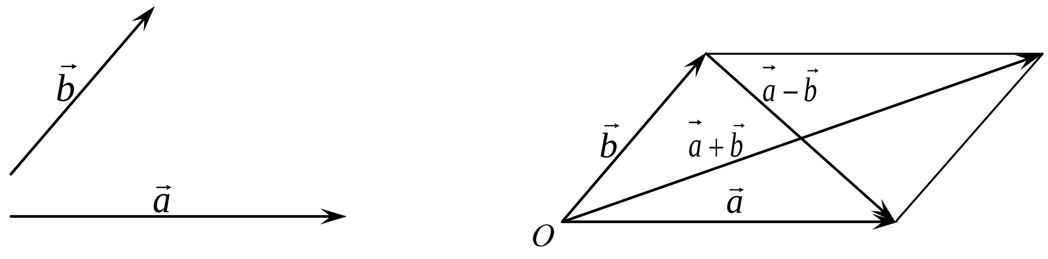
Щоб знайти різницю двох векторів, досить віднести ці вектори до спільного початку, з’єднати їхні кінці і поставити стрілку біля того вектора, від якого віднімаємо (мал.4).



мал. 4

Для знаходження суми і різниці двох векторів також користуються *правилом паралелограма*:

З довільної точки будуємо обидва вектори, на цих векторах добудовуємо паралелограм. Сумою цих векторів є діагональ паралелограма, яка виходить із спільного початку, їх різницею є інша діагональ (мал. 5).



мал.5

III. Множення вектора на число.

<u>*Означення.*</u> *Добутком вектора* $\vec{a}$ *на число* λ називається вектор $\lambda\vec{a}$, довжина якого дорівнює добутку довжини цього вектора на модуль числа. Цей вектор співнапрямлений з даним вектором, якщо число додатне; протилежно напрямлений, якщо число від'ємне і дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли або число дорівнює нулю, або вектор дорівнює нулю.

Тобто, вектор $\lambda\vec{a}$ задовольняє наступні умови:

1) $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$,

2) $\lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, якщо $\lambda > 0$,

3) $\lambda\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, якщо $\lambda < 0$,

4) $\lambda\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ або $\vec{a} = \vec{0}$.

***Властивості добутку вектора на число*:**

1. $\forall\vec{a} : 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;
2. $\forall\vec{a}\forall\alpha,\beta : \alpha(\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$ – *асоціативність множення*;
3. $\forall\vec{a}\forall\alpha,\beta : (\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$;
4. $\forall\vec{a},\vec{b}\forall\alpha : \alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$;

дві останні формули називаються *дистрибутивними законами множення відносно додавання*.

Розклад вектора за даними напрямами

<u>*Означення.*</u> Розкласти вектор $\vec{c}$ за двома не колінеарними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (на площині) означає знайти такий паралелограм, для якого $\vec{c}$ буде діагоналлю, а сторонами паралелограма будуть вектори, колінеарні до $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

<u>*Означення.*</u> Розкласти вектор $\vec{d}$ за трьома не компланарними векторами $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ (в просторі) означає знайти такий паралелепіпед, для якого $\vec{d}$ буде діагоналлю, а сторонами паралелепіпеда будуть вектори, колінеарні до $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Властивості операцій над векторами через координати:

1) Рівні вектори мають рівні відповідні координати в тому самому базисі:

$$\vec{a}(x_1, y_1, z_1) = \vec{b}(x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2. \qquad (2.4)$$

2) Координати суми двох векторів дорівнюють сумам їх відповідних координат:

$$\vec{a}(x_1, y_1, z_1), \vec{b}(x_2, y_2, z_2) \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2). \qquad (2.5)$$

3) Координати добутку вектора на число дорівнюють добуткам координат цього вектора на дане число:

$$\vec{a}(x, y, z) \Rightarrow \lambda\vec{a} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z). \qquad (2.6)$$

4) Координати лінійної комбінації кількох векторів дорівнюють тій же лінійній комбінації відповідних координат.

5) Координати вектора $\overrightarrow{AB}$, де $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ обчислюються за формулою:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \qquad (2.7)$$

тобто, дорівнюють різницям відповідних координат його кінця і початку.

Теорема

Для того, щоб вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ були колінеарними, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}, \qquad (2.8)$$

тобто, щоб були пропорційними їх відповідні координати.

Умова компланарності трьох векторів через координати

Нехай в базисі $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ мають координати: $\vec{a}(x_1, y_1, z_1), \vec{b}(x_2, y_2, z_2), \vec{c}(x_3, y_3, z_3)$.

Теорема

Для того, щоб вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ були компланарними, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad (2.9)$$

тобто, щоб детермінант 3-го порядку, рядки якого складені із координат цих векторів, дорівнював нулю.

Скалярний добуток векторів і його властивості

Означення. *Скалярним добутком двох векторів* називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi, \qquad (2.10)$$

де $\varphi = (\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b})$ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Результатом скалярного добутку векторів є число (скаляр).

***Властивості скалярного добутку*:**

а) алгебраїчні властивості:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ *– комутативність,*

2) $\alpha\vec{a}\cdot\vec{b}=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b}),\ \vec{a}\cdot\beta\vec{b}=\beta(\vec{a}\cdot\vec{b}),\ \alpha\vec{a}\cdot\beta\vec{b}=\alpha\beta(\vec{a}\cdot\vec{b})$ – *асоціативна властивість відносно числового множника.*

3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ – *дистрибутивні закони множення відносно додавання.*

б) геометричні властивості:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$ – скалярний добуток дорівнює нулеві тоді і тільки, коли вектори перпендикулярні.

2) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ – скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини.

3) $$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} \qquad (2.11)$$

– модуль (довжина) вектора дорівнює кореню квадратному із його скалярного квадрата.

4) $$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \qquad (2.12)$$

– косинус кута між двома векторами дорівнює скалярному добутку цих векторів, поділеному на добуток їх довжин.

Вираз скалярного добутку двох векторів через їх координати в ортонормованому базисі

Нехай в ортонормованому базисі $B=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають координати: $\vec{a}(x_1,y_1,z_1),\vec{b}(x_2,y_2,z_2)$. Тоді

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2 \qquad (2.13)$$

– скалярний добуток двох векторів в ортонормованому базисі дорівнює сумі попарних добутків їх відповідних координат.

Довжина вектора

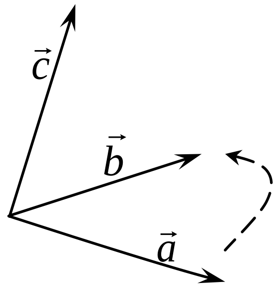
Нехай в ортонормованому базисі $B=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ вектор $\vec{a}=(x,y,z)$. За формулою (2.11) отримаємо:

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (2.14)$$

– довжина вектора дорівнює кореню квадратному із суми квадратів його координат.

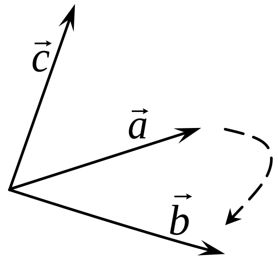
Векторний добуток векторів і його властивості

Кажуть, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють *праву трійку* (або репер ($\vec{a},\vec{b},\vec{c}$) – *додатно орієнтований*), якщо вони розміщені в просторі проти годинникової стрілки (мал.11).



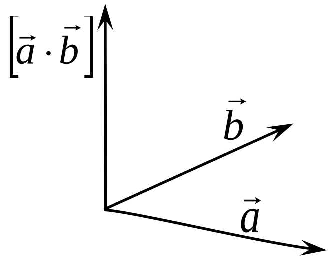
мал. 11

Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють *ліву трійку* (репер $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – *від'ємно орієнтований*), якщо вони розміщені в просторі за годинниковою стрілкою (мал.12).



мал. 12

<u>Означення.</u> Векторним добутком двох векторів називається вектор, довжина якого дорівнює добутку довжин цих векторів на синус кута між ними; цей вектор перпендикулярний до кожного з перемножуваних векторів і утворює з ними праву трійку (мал.13):



$$\left|\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]\right| = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\alpha \qquad (2.15)$$

мал. 13

Результатом векторного добутку векторів є вектор.

***Властивості векторного добутку*:**

а) алгебраїчні властивості:

1) $\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right] = -\left[\vec{b}\cdot\vec{a}\right]$ – *антикомутативність*,

2) $\left[\alpha\vec{a}\cdot\vec{b}\right] = \alpha\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]$, $\left[\vec{a}\cdot\beta\vec{b}\right] = \beta\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]$, $\left[\alpha\vec{a}\cdot\beta\vec{b}\right] = \alpha\beta\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]$ – *асоціативна властивість відносно числового множника.*

3) $\left[(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}\right] = \left[\vec{a}\cdot\vec{c}\right] + \left[\vec{b}\cdot\vec{c}\right]$, $\left[\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})\right] = \left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right] + \left[\vec{a}\cdot\vec{c}\right]$ – *дистрибутивні закони множення відносно додавання.*

б) геометричні властивості:

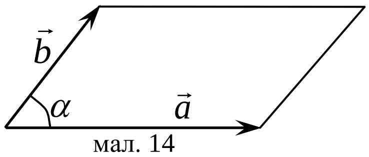
1) $\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]\perp\vec{a}$, $\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]\perp\vec{b}$,

2) $\left(\vec{a},\vec{b},\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]\right)$ – права трійка,

3) $\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]=0\Leftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$ – векторний добуток дорівнює нулеві тоді і тільки, коли вектори колінеарні,

4) $$S_{пар\text{-}ма}=\left|\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]\right| \qquad (2.16)$$

– модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах (віднесених до спільного початку – мал. 14).



мал. 14

5) $$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]\right|$$

(2.17)

Вираз векторного добутку двох векторів через їх координати в ортонормованому базисі

Нехай в ортонормованому базисі $B=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають координати: $\vec{a}(x_1,y_1,z_1),\vec{b}(x_2,y_2,z_2)$. Тоді

$$\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix} \qquad (2.18)$$

– векторний добуток двох векторів в ортонормованому базисі дорівнює детермінанту третього порядку, в першому рядку якого стоять базисні вектори $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, в другому рядку – координати першого множника, в третьому рядку – координати другого множника.

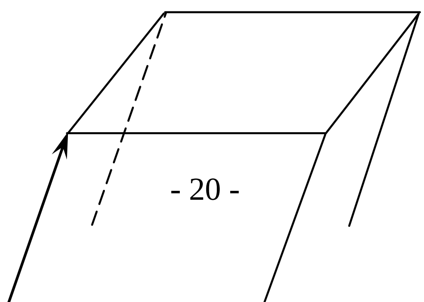
Мішаний добуток трьох векторів і його геометричний зміст

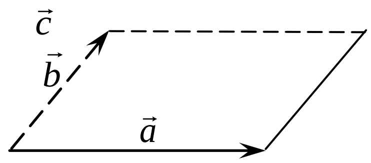
<u>Означення.</u> *Мішаним добутком трьох векторів* називається число, яке дорівнює скалярному добутку векторного добутку перших двох векторів на третій:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]\cdot\vec{c}\,. \qquad (2.19)$$

<u>Теорема</u> (*геометричний зміст мішаного добутку*)

Модуль мішаного добутку трьох векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах (віднесених до спільного початку – мал.16*). Мішаний добуток – додатне число, якщо вектори утворюють праву трійку; від'ємне число, якщо вектори утворюють ліву трійку і дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли всі вектори компланарні*.





мал. 16

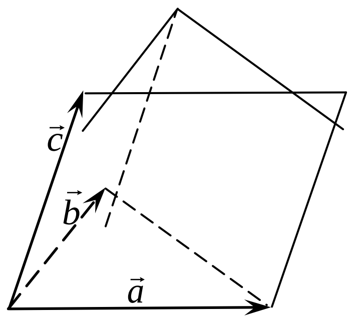
Тобто, мішаний добуток має такі *властивості*:

1) $$V_{пар\text{-}да} = \left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|, \qquad (2.20)$$

2) $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} > 0$, коли $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ – права трійка, $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} < 0$, коли $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ – ліва трійка,

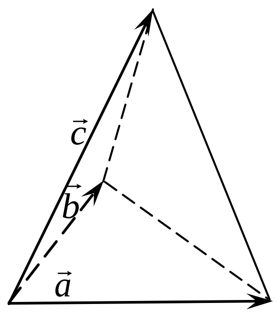
3) $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = 0$ тоді і лише тоді, коли вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарні.

За допомогою мішаного добутку трьох векторів можна також обчислювати об'єм трикутної призми та трикутної піраміди, побудованих на цих векторах (мал. 17, 18).



$$V_{тр.призми} = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right| \qquad (2.21)$$

мал. 17



$$V_{тр.пір.} = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right| \qquad (2.22)$$

мал. 18

Вираз мішаного добутку трьох векторів через їх координати в ортонормованому базисі

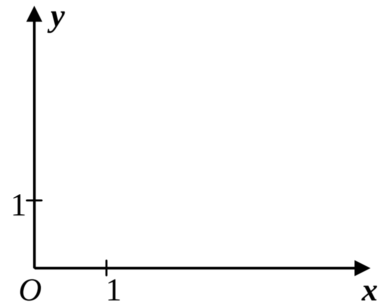
Нехай в ортонормованому базисі $B=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ мають координати: $\vec{a}(x_1,y_1,z_1), \vec{b}(x_2,y_2,z_2), \vec{c}(x_3,y_3,z_3)$. Тоді

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \tag{2.23}$$

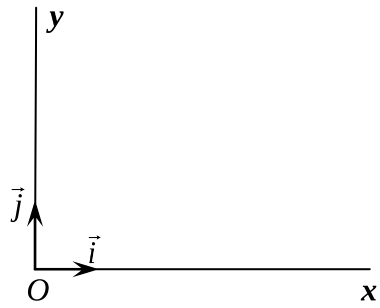
– мішаний добуток трьох векторів дорівнює детермінанту третього порядку, в першому рядку якого стоять координати першого вектора, в другому – координати другого вектора, в третьому – координати третього вектора.

Основні задачі в прямокутній декартовій системі координат

Означення. *Прямокутною декартовою системою координат* називається впорядкована пара взаємно перпендикулярних осей з однаковими масштабами на них (мал. 20, 21).



мал. 20

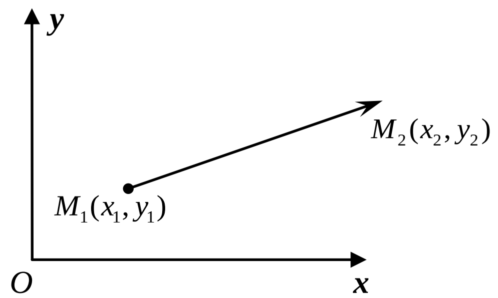


мал. 21

Базис прямокутної системи координат позначається: $R=\{O,\vec{i},\vec{j}\}$, де O – початок системи координат.

Віддаль між точками

Нехай в прямокутній системі координат задано дві точки: $M_1(x_1,y_1), M_2(x_2,y_2)$. Знайти віддаль між цими точками (мал. 22).



мал. 22

Віддаль між точками $\rho(M_1,M_2)=\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|$

Вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ має координати: $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$. За формулою (2.14) отримаємо:

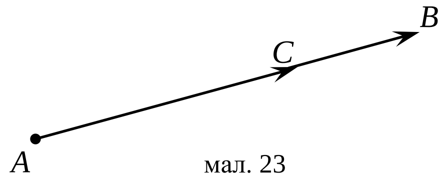
$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{2.24}$$

– віддаль між двома точками дорівнює кореню квадратному із суми квадратів різниць відповідних координат.

Поділ відрізка в даному відношенні

<u>*Означення.*</u> *Точка C ділить відрізок AB у відношенні* λ, якщо виконується рівність:

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} \tag{2.25}$$



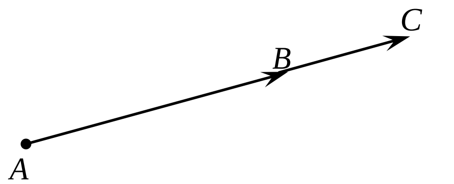
мал. 23

Користуючись мал. 23, попередню рівність можна записати у вигляді:

$$\lambda = \frac{\textit{від початку до подільчої точки}}{\textit{від подільчої точки до кінця}}. \tag{2.26}$$

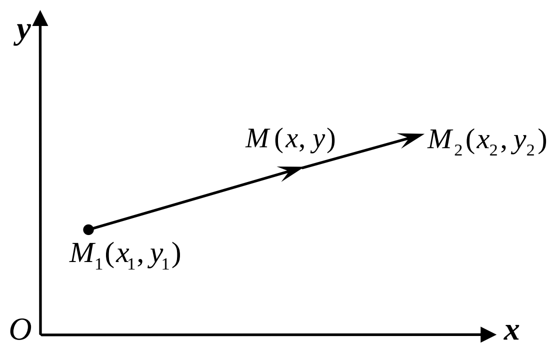
Якщо $\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CB}$ (мал. 23), то $\lambda > 0$ і точка C ділить відрізок AB *внутрішнім способом*.

Якщо $\overrightarrow{AC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CB}$ (мал. 24), то $\lambda < 0$ і точка C ділить відрізок AB *зовнішнім способом*.



мал. 24

Нехай маємо відрізок M_1M_2, де $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$. Знайти координати точки M, яка ділить відрізок M_1M_2 у відношенні λ (мал. 25).



мал. 25

З рівності $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{M_1M}}{\overrightarrow{MM_2}}$ отримаємо: $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$. Оскільки $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1)$,

$\lambda\overrightarrow{MM_2} = (\lambda(x_2 - x), \lambda(y_2 - y))$, то дістанемо систему: $\begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y). \end{cases}$ (2.27)

Розв'язок системи (2.27) (а отже, й координати точки M) матиме вигляд:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}. \end{cases} \quad (2.28)$$

Координати середини відрізка

Якщо точка M ділить відрізок M_1M_2 пополам, то $\lambda = 1$. Тоді з системи (2.28) отримаємо:

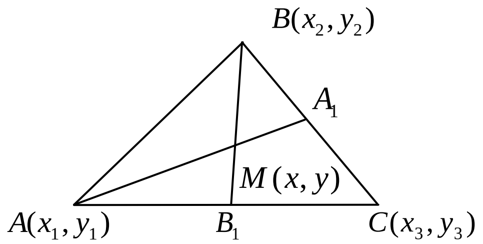
$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases} \quad (2.29)$$

– координати середини відрізка дорівнюють півсумам відповідних координат його початку і кінця.

Центр ваги трикутника

Центром ваги трикутника є, як відомо, точка перетину його медіан.

Нехай дано трикутник з вершинами в точках $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Знайти координати центра маси цього трикутника (мал. 26).



мал. 26

Нехай $M(x, y)$ – центр ваги трикутника. Медіани в точці перетину діляться у відношенні 2:1, починаючи з вершини. Тоді відношення подільності $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MA_1}} = \dfrac{2}{1} = 2$. Оскільки A_1 – середина BC, то за формулою (2.29) ця точка має такі координати: $A_1 = \left(\dfrac{x_2 + x_3}{2}, \dfrac{y_2 + y_3}{2}\right)$.

Отже, користуючись рівністю (2.28), матимемо, що координати точки M мають вигляд:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \\ y = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \end{cases} \quad (2.30)$$ –

координати центра ваги трикутника дорівнюють середнім арифметичним відповідних координат його вершин.

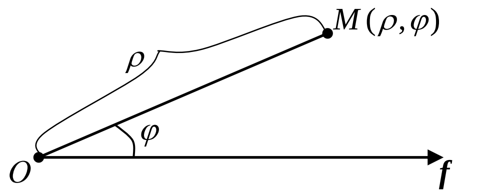
Площа трикутника

Площа трикутника з вершинами в точках $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ обчислюється за формулою:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \tag{2.31}$$

Полярна система координат

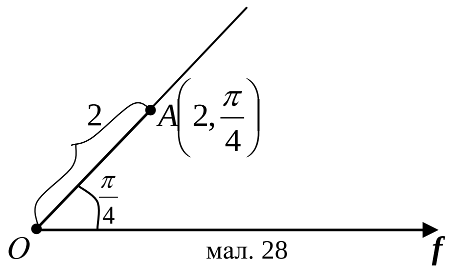
<u>*Означення.*</u> *Полярною системою координат* називається система координат, в якій положення кожної точки на площині визначається двома параметрами: ρ – відстань від даної точки до полюса O (початку системи координат), φ – кут між радіусом цієї точки і полярною віссю Of (мал. 27). Впорядкована пара чисел (ρ, φ) називається *полярними координатами точки*.



мал. 27

<u>Приклад.</u> Побудувати точку $A\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ в полярній системі координат.

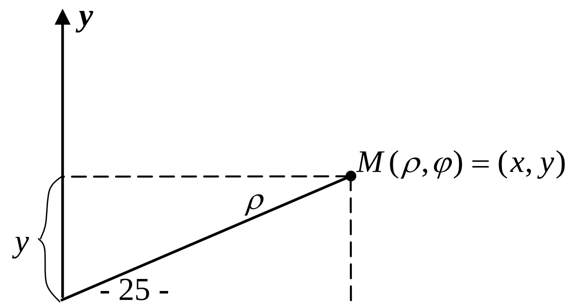
Для побудови цієї точки необхідно побудувати промінь, який утворює з полярною віссю кут $\frac{\pi}{4}$, та відкласти від полюса відрізок довжиною 2 (мал. 28).

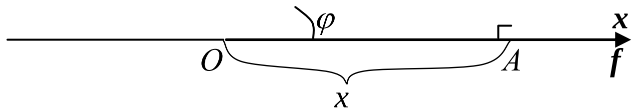


мал. 28

Зв'язок між полярними і прямокутними координатами

Помістимо початок прямокутної декартової системи координат в полюс. Вісь Ox направимо по полярній осі, причому так, щоб їх напрями співпадали і масштаби на осях були однакові (мал. 29).





мал. 29

Нехай точка M в полярній системі координат має координати (ρ,φ), а в прямокутній – (x,y). Виразити (x,y) через (ρ,φ) і навпаки.

З прямокутного трикутника OAM отримаємо:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases} \tag{2.32}$$

– *перехід від полярних до прямокутних координат*.

Піднесемо обидві частини рівностей системи (2.32) до квадрату і додамо почленно:

$x^2+y^2=\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)$. Звідки: $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.

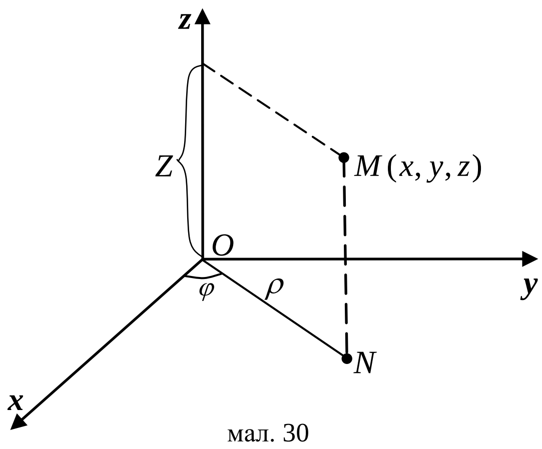
Поділивши друге рівняння системи (2.32) на перше, дістанемо: $tg\varphi=\dfrac{y}{x}$. Отже, отримаємо систему:

$$\begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2}, \\ tg\varphi=\dfrac{y}{x} \end{cases} \tag{2.33}$$

– *перехід від прямокутних до полярних координат*.

Циліндрична система координат

Кожна точка M в просторі повністю визначається положенням її проекції на площину xOy і третьою координатою Z(мал. 30).



мал. 30

Положення проекції N однозначно задається її полярними координатами в площині xOy: $N(\rho,\varphi)$. Як бачимо, для задання точки в просторі досить вказати три параметри: ρ – віддаль від проекції цієї точки на площину xOy до початку координат; φ – кут між віссю Ox і радіусом вектором цієї точки; Z – віддаль від цієї точки до площини xOy.

Впорядкована трійка чисел (ρ,φ,Z) називається *циліндричними координатами*.

Циліндричні координати пов'язані з прямокутними координатами рівностями:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = Z. \end{cases} \qquad (2.34)$$

Завдання для самостійної роботи

1.Чому дорівнюють координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо відомі координати його початку $A(x_A, y_A, z_A)$ і кінця $B(x_B, y_B, z_B)$?

А. $\overrightarrow{AB} = (x_A + x_B; y_A + y_B; z_A + z_B)$.

Б. $\overrightarrow{AB} = (x_A - x_B; y_A - y_B; z_A - z_B)$.

В. $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

Г. $\overrightarrow{AB} = (x_A \cdot x_B; y_A \cdot y_B; z_A \cdot z_B)$.

2. Як обчислюється модуль (довжина) вектора

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\ ?$$

А. $|\vec{a}| = |a_x| + |a_y| + |a_z|$.   Б. $|\vec{a}| = -\sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} - a_z^{\,2}}$.

В. $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^{\,2} - a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}$.   Г. $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}$.

3. Довжина якого з векторів дорівнює $|\vec{a}| = 5$?

А. $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$.   Б. $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\sqrt{3}\vec{k}$.

В. $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\sqrt{3}\vec{k}$.   Г. $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

4. Що називається скалярним добутком $\vec{a} \cdot \vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$?

А. Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\vec{a} \hat{,} \vec{b})$.

Б. Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\vec{a} \hat{,} \vec{b})$.

В. Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$.

Г. Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\vec{b} \cos(\vec{a} \hat{,} \vec{b})$.

5.Чому дорівнює скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$ векторів

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \quad \text{і} \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\ ?$$

А. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z$.   Б. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x - a_y b_y + a_z b_z$.

В. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_y + a_y b_z + a_z b_x$.   Г. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

6. Для того, щоб ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ були ортогональними (перпендикулярними) $\vec{a} \perp \vec{b}$, необхідно і достатньо, щоб

А. $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$.   Б. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.   В. $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$.   Г. $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$.

7.Для того, щоб ненульові вектори $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ і $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ були колінеарними (паралельними) $\vec{a}\parallel\vec{b}$, необхідно і достатньо, щоб

А. $a_xb_y+a_yb_z+a_zb_x=0$. Б. $a_xb_x-a_yb_y+a_zb_z\neq 0$.

В. $\dfrac{a_x}{b_x}\neq\dfrac{a_y}{b_y}\neq\dfrac{a_z}{b_z}$. Г. $\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$. 8.

8. Які два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ортогональні (перпендикулярні)?

А. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\\ \vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}\end{cases}$. Б. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\\ \vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}\end{cases}$.

В. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\\ \vec{b}=3\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}\end{cases}$. Г. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\\ \vec{b}=3\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}\end{cases}$.

9.Які два вектори утворюють між собою гострий кут $(\cos\varphi>0)$?

А. $\begin{cases}\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}\\ \vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}\end{cases}$. Б. $\begin{cases}\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}\\ \vec{b}=\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}\end{cases}$.

В. $\begin{cases}\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}\\ \vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\end{cases}$. Г. $\begin{cases}\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}\\ \vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\end{cases}$.

10.Які два вектори утворюють між собою тупий кут $(\cos\varphi<0)$?

А. $\begin{cases}\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\\ \vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}+5\vec{k}\end{cases}$. Б. $\begin{cases}\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\\ \vec{b}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}\end{cases}$.

В. $\begin{cases}\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\\ \vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}\end{cases}$. Г. $\begin{cases}\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\\ \vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}\end{cases}$.

11. Для яких двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ кут φ між ними дорівнює $\varphi=\pi/3$ $(\cos\varphi=\cos(\pi/3)=1/2)$?

А. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}+\sqrt{3}\vec{k}\\ \vec{b}=\sqrt{2}\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j}\end{cases}$. Б. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{j}-\sqrt{3}\vec{k}\\ \vec{b}=\sqrt{6}\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j}\end{cases}$.

В. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}-\sqrt{3}\vec{k}\\ \vec{b}=2\vec{j}+\sqrt{3}\vec{k}\end{cases}$. Г. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{j}+\sqrt{3}\vec{k}\\ \vec{b}=\sqrt{6}\vec{i}+\sqrt{3}\vec{k}\end{cases}$.

12. Які два вектори колінеарні (паралельні)?

А. $\begin{cases}\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}\\ \vec{b}=4\vec{i}+6\vec{j}+8\vec{k}\end{cases}$. Б. $\begin{cases}\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}\\ \vec{b}=4\vec{i}-6\vec{j}-8\vec{k}\end{cases}$.

В. $\begin{cases}\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}\\ \vec{b}=-4\vec{i}+6\vec{j}-8\vec{k}\end{cases}$. Г. $\begin{cases}\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}\\ \vec{b}=4\vec{i}-6\vec{j}-8\vec{k}\end{cases}$.

13. Який з векторів утворює з віссю Ox напрямний кут $\alpha=60^\circ$ $\left(\cos\alpha=a_x/|\vec{a}|,\quad \cos 60^\circ=1/2\right)$?

А. $\vec{a}=\vec{i}+\sqrt{2}\vec{j}+4\vec{k}$. Б. $\vec{a}=\sqrt{2}\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j}+\sqrt{3}\vec{k}$.

В. $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+\sqrt{2}\vec{k}$. Г. $\vec{a}=\vec{i}+2\sqrt{2}\vec{j}+\sqrt{3}\vec{k}$.

Тема 3

Аналітична геометрія на площині

Пряма на площині

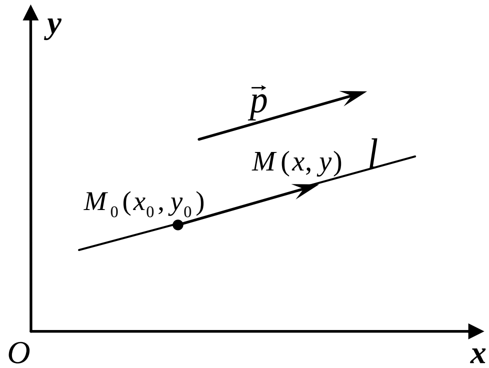
Різні способи задання прямої

1. Канонічне рівняння прямої.

<u>*Означення.*</u> *Напрямним вектором прямої* l називається такий ненульовий вектор $\vec{p}$, який паралельний до цієї прямої.

Нехай пряма l задана точкою $M_0(x_0, y_0)$ і напрямним вектором $\vec{p}(l,m)$. Написати рівняння цієї прямої.

Візьмемо довільну точку $M(x, y) \in l$ (мал. 31)



мал. 31

Для будь-якого положення точки M на прямій l: $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p}$, де $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$, $\vec{p}(l,m)$. З умови колінеарності двох векторів (2.8) отримаємо:

$$l: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \tag{3.1}$$

– *канонічне рівняння прямої.*

2. Параметричні рівняння прямої.

Нехай дано такі ж початкові умови, що й у попередньому пункті. Тоді отримаємо рівняння (3.1). Введемо в це рівняння параметр t:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = t .$$

З останніх рівностей отримаємо систему: $\begin{cases} x - x_0 = lt, \\ y - y_0 = mt, \end{cases}$

яку запишемо у вигляді:

$$l: \begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt \end{cases} \tag{3.2}$$

– *параметричні рівняння прямої.*

Геометричний зміст параметра t

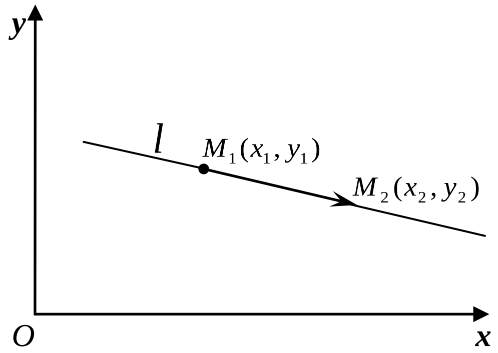
Для будь-якого положення точки M на прямій знайдеться таке дійсне число t, що координати цієї точки виражаються формулами (3.2). І навпаки:

Для довільного дійсного числа t пара чисел, знайдених за формулами (3.2) є координатами точки, яка належить прямій.

3. Пряма, задана двома точками.

Нехай пряма l задана двома точками: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$. Написати рівняння цієї прямої.

Виберемо за початкову точку M_1, за напрямний вектор візьмемо $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ (мал. 32).



мал. 32

Використавши канонічне рівняння прямої (3.1), отримаємо:

$$l: \ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{3.3}$$

– *рівняння прямої через дві точки*.

4. Загальне рівняння прямої.

Канонічне рівняння (3.1) можна записати у вигляді:

$$mx - ly - mx_0 + ly_0 = 0 .$$

Бачимо, що пряма задається лінійним рівнянням відносно змінних x, y. Виникає запитання: що задає будь-яке лінійне рівняння на площині?

<u>Теорема</u>

Рівняння
$$Ax + By + C = 0 , \tag{3.4}$$
де A і B одночасно не рівні нулю, задає пряму з напрямним вектором $\vec{p}(-B, A)$.

<u>Доведення.</u> Рівняння (3.4) на площині задає деяку лінію. Скориставшись коефіцієнтами цього рівняння, виберемо на площині точку $M_0(-\frac{C}{A}, 0)$ (при умові, що $A \neq 0$). Напишемо рівняння прямої l, що проходить через точку M_0 з напрямним вектором $\vec{p}(-B, A)$. Використаємо рівняння (3.1):

$$\frac{x + \frac{C}{A}}{-B} = \frac{y - 0}{A},$$

з якого отримаємо:

$$l: Ax + By + C = 0.$$

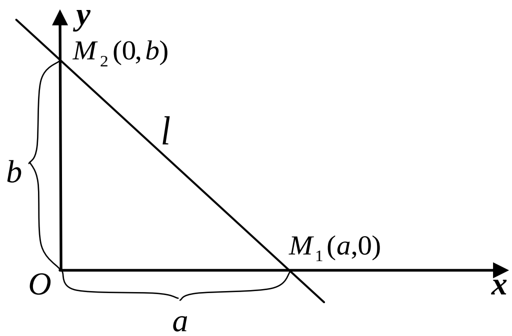
Отже, рівняння (3.4) задає пряму.

<u>*Теорему доведено*</u>

Рівняння (3.4) називається *загальним рівнянням прямої*.

5. Пряма у «відрізках» на осях.

Нехай пряма l, яка не проходить через початок координат, відтинає на осі Ox відрізок a, на осі Oy – відрізок b (мал. 33). Написати рівняння цієї прямої.



мал. 33

Шукатимемо рівняння прямої l у вигляді (3.4):

$$l: \ Ax + By + C = 0$$

$M_1(a,0) \in l \Rightarrow A \cdot a + B \cdot 0 + C = 0$. Звідси: $A = -\frac{C}{a}$.

$M_2(0,b) \in l \Rightarrow A \cdot 0 + B \cdot b + C = 0$. Звідси: $B = -\frac{C}{b}$.

Підставимо ці значення A і B в рівняння (3.4):

$$-\frac{C}{a}x - \frac{C}{b}y + C = 0.$$

Оскільки пряма не проходить через початок координат, то $C \neq 0$. Тому останнє рівняння можна поділити на C:

$$-\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + 1 = 0.$$

З цього рівняння отримаємо:

$$l: \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (3.5)$$

– рівняння прямої у «відрізках» на осях.

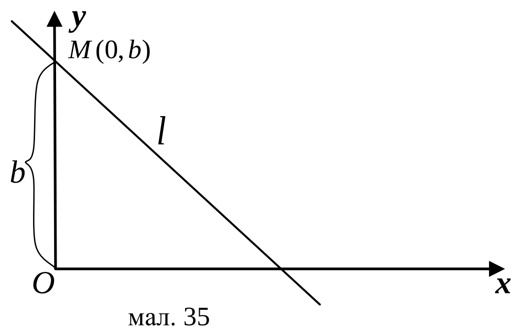
6. Пряма з кутовим коефіцієнтом.

Нехай задано напрямний вектор $\vec{p}(l,m)$ прямої l.

<u>*Означення.*</u> *Кутовим коефіцієнтом прямої* називається відношення ординати до абсциси її напрямного вектора:

$$k = \frac{m}{l}.$$

Написати рівняння прямої l, яка відтинає на осі Oy відрізок b і має кутовий коефіцієнт k (мал. 35).



мал. 35

Запишемо координати напрямного вектора прямої у вигляді:

$$\vec{p} = (l, m) = l(1, \frac{m}{l}) = l(1, k).$$

Оскільки $l(1,k) \parallel (1,k)$, то напрямним до прямої буде також вектор $\vec{p}_1(1,k)$. Використаємо канонічне рівняння прямої (3.1):

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-b}{k}.$$

Звідки отримаємо:

$$l: \ y = kx + b \tag{3.6}$$

– *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.*

7. Пряма, задана точкою і кутовим коефіцієнтом.

Написати рівняння прямої l, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і має кутовий коефіцієнт k.

Шукатимемо рівняння прямої l у вигляді (3.6):

$$y = kx + b,$$

$$M_0(x_0, y_0) \in l \Rightarrow y_0 = kx_0 + b.$$

Віднімемо від рівняння (3.6) попереднє рівняння. Дістанемо:

$$l: \ y - y_0 = k(x - x_0) \tag{3.7}$$

– *рівняння прямої, заданої точкою і кутовим коефіцієнтом.*

8. Пряма, задана точкою і нормованим вектором.

Означення. *Нормованим вектором прямої* l називається такий ненульовий вектор $\vec{n}$, який перпендикулярний до цієї прямої.

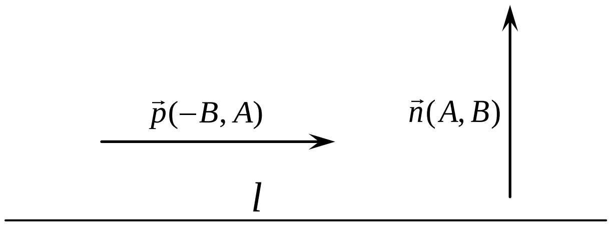
Теорема

Коефіцієнти A і B в загальному рівнянні прямої $l: \ Ax + By + C = 0$ *є координатами нормованого вектора цієї прямої, тобто* $\vec{n} = (A, B)$.

Доведення. Напрямний вектор прямої l має координати: $\vec{p}(-B, A)$. Знайдемо скалярний добуток: $\vec{n} \cdot \vec{p} = A \cdot (-B) + B \cdot A = 0$. Звідси, за властивостями скалярного добутку $\vec{n} \perp \vec{p}$, а тому $\vec{n} \perp l$. Отже, $\vec{n} = (A, B)$ – нормований вектор прямої l.

Теорему доведено

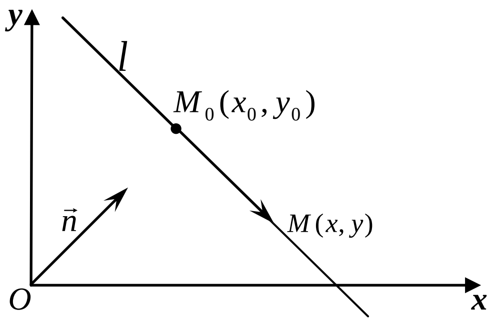
З попередньої теореми отримаємо, що із загального рівняння прямої можна дістати координати її напрямного і нормованого векторів (мал. 36).



мал. 36

Нехай пряма задана точкою $M_0(x_0, y_0)$ і нормованим вектором $\vec{n}(\alpha, \beta)$. Написати рівняння цієї прямої.

Візьмемо довільну точку $M(x, y) \in l$ (мал. 37).



мал. 37

Для будь-якого положення точки M на прямій l: $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$, де $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$, $\vec{n}(\alpha, \beta)$. Тоді $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$. Звідси:

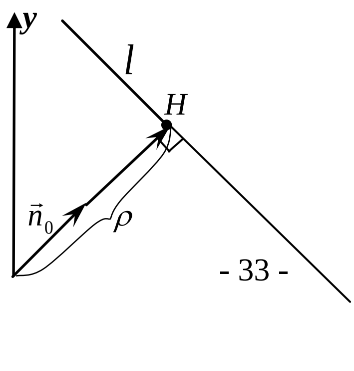
$$l: \ \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0 \tag{3.8}$$

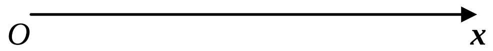
– *рівняння прямої, заданої точкою і нормованим вектором*.

9. Нормальне рівняння прямої.

Написати рівняння прямої l, заданої одиничним нормальним вектором $\vec{n}_0(\cos\varphi, \sin\varphi)$ і віддаллю ρ від початку координат до прямої.

Нехай H – основа перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму(мал. 38).





мал. 38

Оскільки $\vec{n}_0$ – одиничний нормований вектор, то $\overrightarrow{OH} = \rho\vec{n}_0 = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$. $\overrightarrow{OH}$ – радіус-вектор точки *H*. Тому $H(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$. Підставимо координати вектора $\vec{n}_0$ і точки *H* в рівняння (3.8):

$$\cos\varphi(x-\rho\cos\varphi)+\sin\varphi(y-\rho\sin\varphi)=0, \quad \text{або} \quad x\cos\varphi+y\sin\varphi-\rho(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=0.$$

Оскільки $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$, то отримаємо рівняння:

$$l: \ x\cos\varphi+y\sin\varphi-\rho=0 \tag{3.9}$$

– нормальне рівняння прямої.

Взаємне розміщення двох прямих на площині

Нехай прямі l_1 і l_2 задані рівняннями:

$$l_1: \ A_1x+B_1y+C_1=0,$$

$$l_2: \ A_2x+B_2y+C_2=0.$$

<u>Теорема</u> (*умова паралельності двох прямих*)

Для того, щоб прямі l_1 і l_2 були паралельними, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}, \tag{3.10}$$

тобто, щоб були пропорційними коефіцієнти при однакових змінних.

<u>Доведення.</u> Напрямний вектор прямої l_1 має координати $\vec{p}_1(-B_1, A_1)$, прямої l_2 — $\vec{p}_2(-B_2, A_2)$. Оскільки $l_1 \parallel l_2$, то їх напрямні вектори також паралельні. З умови колінеарності двох векторів (2.8) отримаємо рівність:

$$\frac{-B_1}{-B_2}=\frac{A_1}{A_2},$$

з якої дістанемо умову (3.10).

<u>Теорему доведено</u>

<u>Теорема</u> (*умова співпадання двох прямих*)

Для того, щоб прямі l_1 і l_2 співпадали, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}, \tag{3.11}$$

тобто, щоб були пропорційними відповідні коефіцієнти цих прямих.

<u>Теорема</u> (*умова перетину двох прямих*)

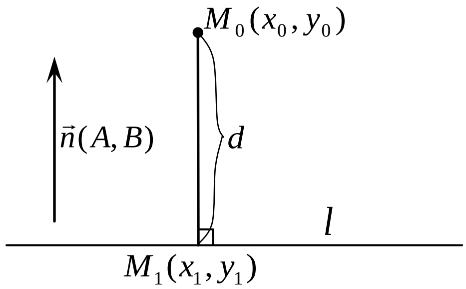
Якщо прямі не паралельні і не співпадають, то вони перетинаються в одній точці. Для того, щоб прямі l_1 і l_2 перетинались, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}. \tag{3.12}$$

Віддаль відточки до прямої

<u>*Означення.*</u> Під *віддаллю від точки до прямої* розуміють віддаль від цієї точки до її ортогональної проекції на цю пряму.

Нехай задано пряму l: $Ax + By + C = 0$. Знайти віддаль від точки $M_0(x_0, y_0)$ до цієї прямої (мал. 39): $d = \rho(M_0, l) = M_0M_1$.



мал. 39

Для знаходження числа d використаємо скалярний добуток векторів $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_0M_1}$ за означенням та через координати:

1. *За означенням*:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M_1} = |\vec{n}| \cdot \left|\overrightarrow{M_0M_1}\right| \cdot \cos\varphi = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot d \cdot (\pm 1).$$

2. *Через координати*:

Оскільки $\overrightarrow{M_0M_1}(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$, $\vec{n}(A, B)$, то

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M_1} = A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) = Ax_1 + By_1 - Ax_0 - By_0 = -C - Ax_0 - By_0 = -(Ax_0 + By_0 + C).$$

Звідки: $\sqrt{A^2 + B^2} \cdot d \cdot (\pm 1) = -(Ax_0 + By_0 + C)$.

Отримаємо формулу:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{3.13}$$

Кут між прямими на площині

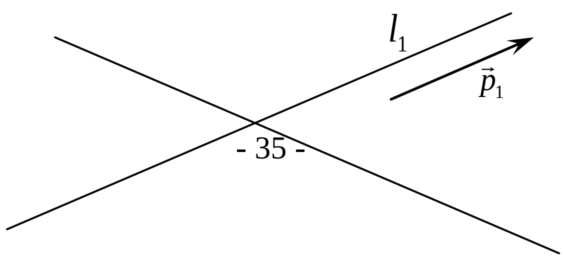
1. Прямі l_1 і l_2 задані загальними рівняннями:

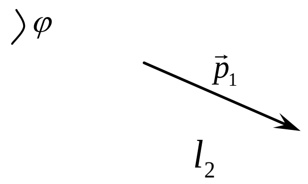
$$l_1: \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$l_2: \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Знайти кут між цими прямими.

Напрямний вектор прямої l_1 має координати $\vec{p}_1(-B_1, A_1)$, прямої l_2 — $\vec{p}_2(-B_2, A_2)$ (мал. 41).





мал. 41

$$\cos\varphi = \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{|\vec{p}_1| \cdot |\vec{p}_2|} = \frac{(-B_1)\cdot(-B_2) + A_1 \cdot A_2}{\sqrt{(-B_1)^2 + A_1^{\ 2}} \cdot \sqrt{(-B_2)^2 + A_2^{\ 2}}}.$$

Отже, *кут між прямими* можна обчислити за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^{\ 2} + B_1^{\ 2}} \cdot \sqrt{A_2^{\ 2} + B_2^{\ 2}}}. \tag{3.14}$$

Якщо $l_1 \perp l_2$, то $\cos\varphi = 0$. Тому справедлива теорема:

<u>Теорема</u> (*умова перпендикулярності двох прямих*)

Для того, щоб прямі l_1 *і* l_2 *були перпендикулярними, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*:

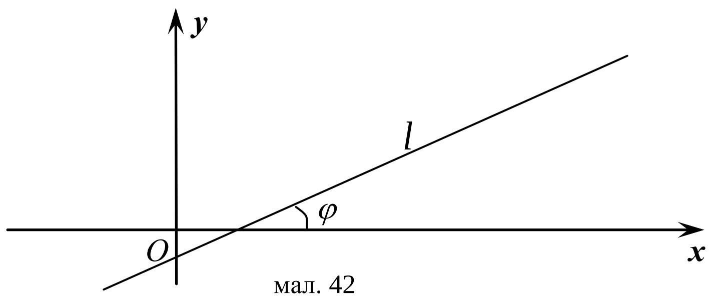
$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0. \tag{3.15}$$

2. Прямі задані рівнянням з кутовим коефіцієнтом:

$$y = kx + b.$$

В прямокутній декартовій системі координат кутовий коефіцієнт прямої дорівнює тангенсу кута нахилу прямої до додатного напряму осі *Ox* (мал. 42), тобто:

$$k = tg\varphi. \tag{3.16}$$



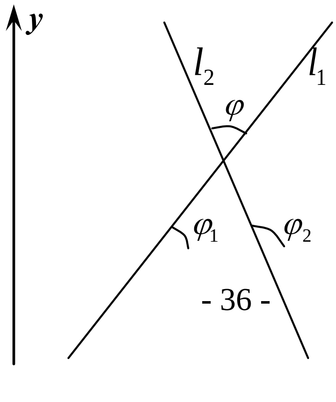
мал. 42

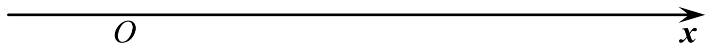
Нехай l_1: $y = k_1 x + b_1$,

l_2: $y = k_2 x + b_2$.

Знайти кут між прямими.

Для прямих l_1 і l_2 з мал. 43 матимемо: $k_1 = tg\varphi_1$, $k_2 = tg\varphi_2$.





мал. 43

Оскільки $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, то $tg\varphi = tg(\varphi_2 - \varphi_1) = \dfrac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_1 \cdot tg\varphi_2}$.

Отже, *кут між прямими*, обчислюється за формулою:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}. \qquad (3.17)$$

Якщо $l_1 \perp l_2$, то $tg\varphi = \infty$. З останньої рівності слідує, $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$. Отже, справедлива теорема:

<u>Теорема</u> (*умова перпендикулярності прямих через їх кутові коефіцієнти*)

Для того, щоб прямі l_1 *і* l_2 *були перпендикулярними, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*:

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}, \qquad (3.18)$$

тобто, щоб їх коефіцієнти були оберненими за величиною і протилежними за знаком.

З мал. 42 слідує теорема:

<u>Теорема</u> (*умова паралельності прямих через їх кутові коефіцієнти*)

Для того, щоб прямі l_1 *і* l_2 *були паралельними, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*:

$$k_1 = k_2, \qquad (3.19)$$

тобто, щоб були рівними їх кутові коефіцієнти.

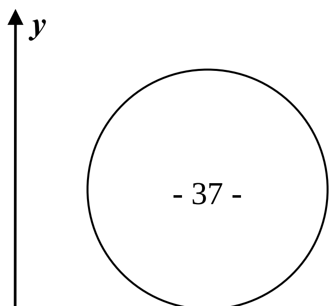
<u>Приклад.</u> Скласти рівняння прямої l_1, яка проходить через точку $A(-2,4)$ паралельно до прямої $l: 3x - 5y - 1 = 0$.

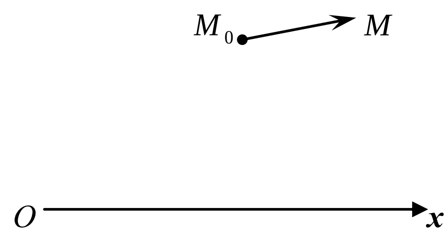
Запишемо рівняння прямої l у вигляді: $y = \dfrac{3}{5}x - \dfrac{1}{5}$. Звідси матимемо, що $k = \dfrac{3}{5}$.

Коло

<u>Означення.</u> Колом називається геометричне місце точок площини, віддалі від яких до фіксованої точки, яка називається *центром кола*, є величина стала, рівна R. Число R називається *радіусом кола*.

Нехай дано коло з центром в точці $M_0(x_0, y_0)$ радіусом R (мал. 44). Скласти рівняння цього кола.





мал. 44

Візьмемо довільну точку $M(x,y)$, що належить колу. Тоді $\left|\overrightarrow{M_0M}\right| = R$, де $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0, y-y_0)$. Звідки отримаємо:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = R,$$

або
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2 \qquad (4.1)$$

– *рівняння кола*.

Рівняння кола з центром в початку координат має вигляд:

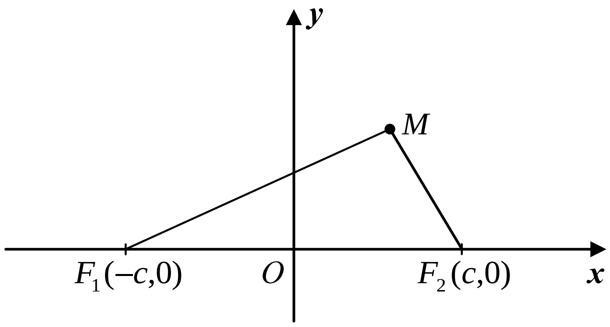
$$x^2+y^2 = R^2 \qquad (4.2)$$

Еліпс

Означення. *Еліпсом* називається геометричне місце точок площини, сума віддалей яких до двох фіксованих точок, які називаються *фокусами*, є величина стала, рівна $2a$, де $2a > 2c$, $2c$ – віддаль між фокусами.

Побудуємо систему координат так: вісь *Ox* проведемо через фокуси F_1 і F_2, а вісь *Oy* проведемо через середину відрізка $F_1F_2 = 2c$ перпендикулярно до осі *Ox*.

Візьмемо довільну точку $M(x,y)$, що належить еліпсу (мал. 45).



мал. 45

За умовою, сума віддалей від точки M до фокусів F_1 і F_2 рівна $2a$, тобто: $F_1M + F_2M = 2a$, де $\overrightarrow{F_1M}(x+c,y)$, $\overrightarrow{F_2M}(x-c,y)$.

Тоді $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$. Звідки: $\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$.

Піднесемо до квадрату обидві частини рівності та виконаємо необхідні спрощення:

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2,$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4cx,$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx.$$

Піднесемо до квадрату:

$$a^2((x-c)^2+y^2)=(a^2-cx)^2,$$

$$a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)=a^4-2a^2cx+c^2x^2,$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2,$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Так як $a>c$ (за умовою), то $a^2-c^2>0$. Тому позначимо:

$$a^2-c^2=b^2. \tag{4.3}$$

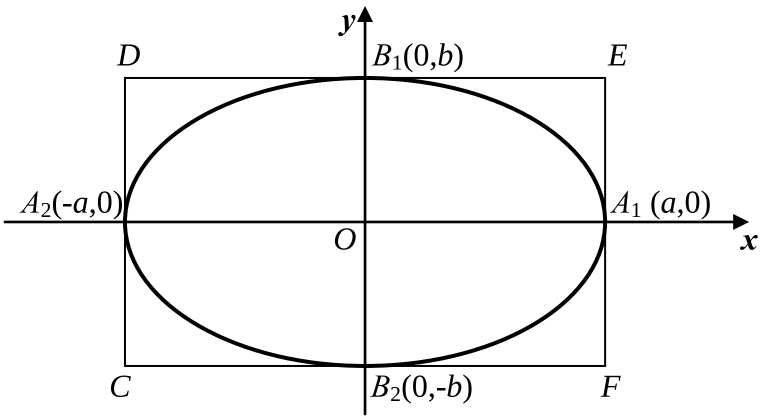
Звідки: $$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Поділимо останню рівність почленно на a^2b^2:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{4.4}$$

– *канонічне рівняння еліпса*.

Графік еліпса зображено на мал. 46.



мал. 46

Властивості еліпса:

1) Оскільки рівняння (4.4) є рівнянням другого степеня, то еліпс – лінія другого порядку.

2) Еліпс симетричний відносно осей *Ox* і *Oy*, а також відносно початку координат.

3) *Означення. Вершинами еліпса* називаються його точки перетину з осями координат. Еліпс має чотири вершини: A_1, A_2, B_1, B_2.

4) Еліпс повністю міститься у прямокутнику *CDEF*, тобто для еліпса виконуються нерівності:

$$\begin{cases} -a\le x\le a, \\ -b\le y\le b. \end{cases}$$

Означення. Відрізок $2a$ називається *великою віссю еліпса*, відрізок $2b$ – *малою віссю еліпса*.

Означення. *Ексцентриситетом еліпса* називається відношення міжфокусної віддалі до великої осі:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \tag{4.5}$$

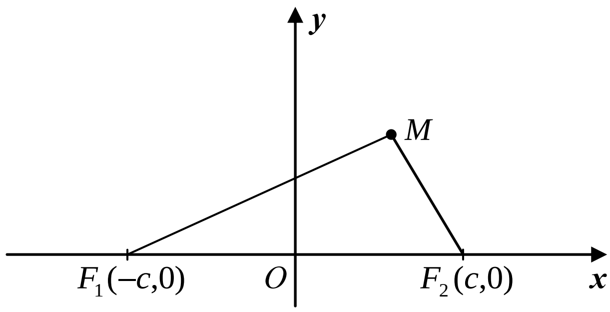
де $0 \le \varepsilon < 1$.

Гіпербола

Означення. *Гіперболою* називається геометричне місце точок площини, різниця віддалей яких до двох фіксованих точок, які називаються *фокусами*, є величина стала, рівна $2a$, де $2a < 2c$, $2c$ – віддаль між фокусами.

Побудуємо систему координат так: вісь *Ox* проведемо через фокуси F_1 і F_2, а вісь *Oy* проведемо через середину відрізка $F_1F_2 = 2c$ перпендикулярно до осі *Ox*.

Візьмемо довільну точку $M(x, y)$, що належить гіперболі (мал. 48).



мал. 48

За умовою, різниця віддалей від точки M до фокусів F_1 і F_2 рівна $2a$, тобто: $F_1M - F_2M = 2a$, де $\overrightarrow{F_1M}(x+c, y)$, $\overrightarrow{F_2M}(x-c, y)$.

Тоді $\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$. Звідки: $\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$.

Піднесемо до квадрату обидві частини рівності та виконаємо необхідні спрощення:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4cx - 4a^2, \quad a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = cx - a^2.$$

Піднесемо до квадрату:

$$a^2((x-c)^2 + y^2) = (cx - a^2)^2,$$

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = c^2x^2 - 2a^2cx + a^4,$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4,$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Так як $a < c$ (за умовою), то $c^2 - a^2 > 0$. Тому позначимо:

$$c^2 - a^2 = b^2. \qquad (4.6)$$

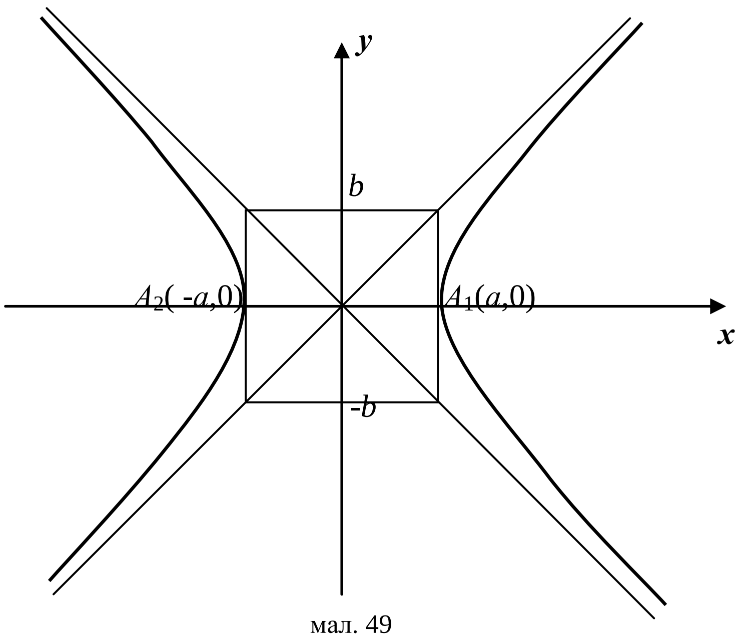
Звідки: $$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Поділимо останню рівність почленно на a^2b^2:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (4.7)$$

– *канонічне рівняння гіперболи*.

Графік гіперболи зображено на мал. 49.



мал. 49

Властивості гіперболи:

1) Оскільки рівняння (4.7) є рівнянням другого степеня, то гіпербола – лінія другого порядку.

2) Гіпербола симетрична відносно осей *Ox* і *Oy*, а також відносно початку координат.

3) <u>*Означення.*</u> *Вершинами гіперболи* називаються її точки перетину з віссю *Ox*.

Гіпербола має дві вершини: A_1, A_2.

4) Гіпербола має дві асимптоти, які задаються рівняннями:

$$y_1 = \frac{b}{a}x \quad \text{і} \quad y_2 = -\frac{b}{a}x.$$

<u>*Означення.*</u> Відрізок $2a$ називається *дійсною віссю гіперболи*, відрізок $2b$ – *уявною віссю гіперболи*.

<u>*Означення.*</u> *Ексцентриситетом гіперболи* називається відношення міжфокусної віддалі до дійсної осі:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \tag{4.8}$$

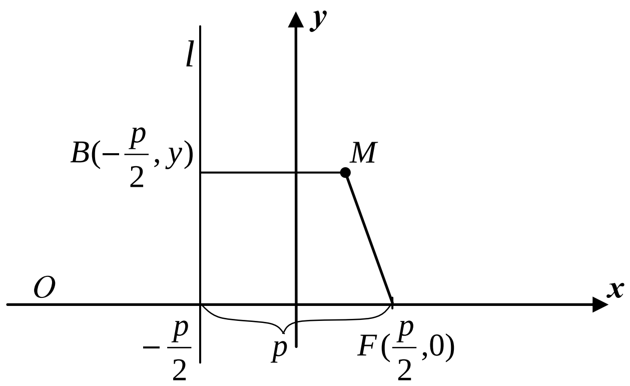
де $\varepsilon > 1$

Парабола

<u>*Означення.*</u> *Параболою* називається геометричне місце точок площини, рівновіддалених від даної точки, яка називається *фокусом*, і від даної прямої, яка називається *директрисою*.

Побудуємо систему координат так: вісь *Ox* проведемо через фокус *F* перпендикулярно до директриси; вісь *Oy* проведемо посередині між фокусом і директрисою відрізка перпендикулярно до осі *Ox*.

Візьмемо довільну точку $M(x, y)$, що належить параболі (мал. 51).



мал. 51

За умовою, віддалі від точки M до фокуса F і до директриси рівні, тобто: $FM = BM$, де $\overrightarrow{FM}\left(x - \frac{p}{2}, y\right)$, $\overrightarrow{BM}\left(x + \frac{p}{2}, 0\right)$.

Тоді $\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}$.

Піднесемо до квадрату обидві частини рівності та виконаємо необхідні спрощення:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2,$$

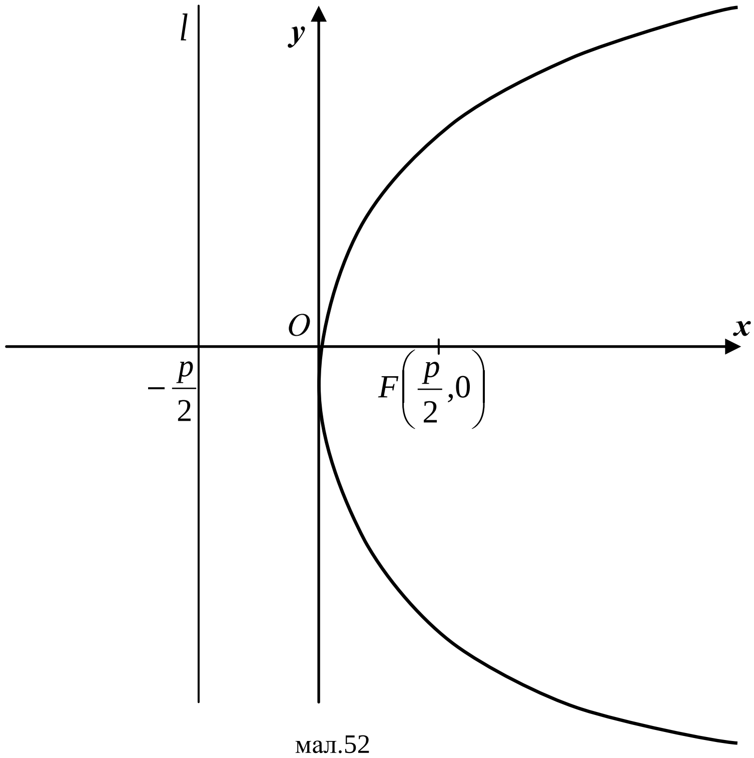
$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}.$$

Звідки:

$$y^2 = 2px \tag{4.9}$$

– *канонічне рівняння параболи*.

Графік параболи зображено на мал. 52.



мал.52

Властивості параболи:

1) Оскільки рівняння (4.10) є рівнянням другого степеня, то парабола – лінія другого порядку.

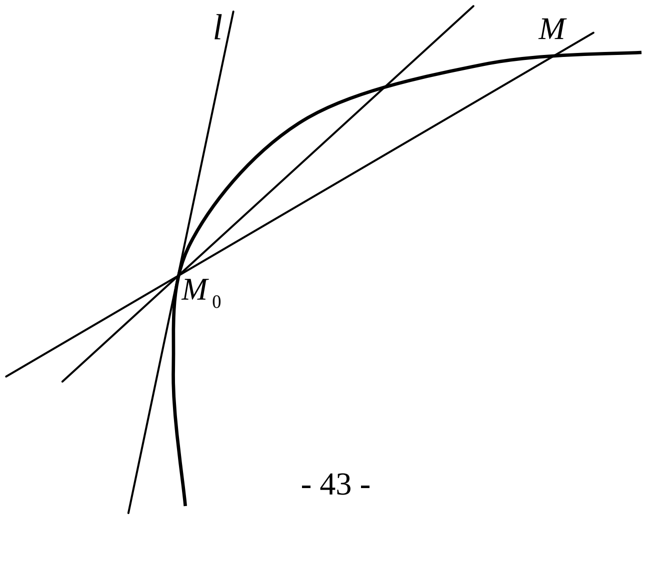
2) Парабола симетрична відносно осі *Ox*.

3) Парабола має одну вершину в початку координат.

4) Парабола повністю міститься в правій півплощині відносно осі Oy.

Дотичні до ліній другого порядку

Означення. Дотичною до лінії γ *в точці* M_0 називається граничне положення січної M_0M, коли точка M прямує до M_0 вздовж лінії γ (мал. 54).



γ

мал.54

Рівняння дотичних до ліній другого порядку мають вигляд:

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \qquad (4.11)$$

– рівняння дотичної до еліпса,

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \qquad (4.12)$$

– рівняння дотичної до гіперболи,

$$y_0 y = p(x + x_0) \qquad (4.13)$$

– рівняння дотичної до параболи.

Завдання для самостійної роботи

1. Яке з рівнянь є рівнянням прямої у відрізках на осях?

А. $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n}$; Б. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$;

В. $Ax + By + C = 0$; Г. $y = kx + b$.

2. Яке з рівнянь є рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом?

А. $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n}$; Б. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$;

В. $y = kx + b$; Г. $Ax + By + C = 0$.

3. Яке з рівнянь є рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки?

А. $\dfrac{y-y_1}{y_2+y_1} = \dfrac{x-x_1}{x_2+x_1}$; Б. $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$;

В. $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{x-x_2}{x_2-x_1}$; Г. $y - y_0 = k\left(x - x_0\right)$.

4. Яке з рівнянь є канонічним рівнянням прямої?

А. $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n}$; Б. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$;

В. $y = kx + b$; Г. $Ax + By + C = 0$.

5. Які з рівнянь є загальним рівнянням прямої?

А. $Ax + By + C = 0$; Б. $y = kx + b$;

В. $y - y_0 = k\left(x - x_0\right)$; Г. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

6. Яке з рівнянь є рівнянням прямої, що проходить через задану точку і має заданий кутовий коефіцієнт?

А. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$; Б. $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$;

В. $y = kx + b$; Г. $y - y_0 = k\left(x - x_0\right)$.

7.Яка з прямих відсікає на осях координат Ox, Oy відповідно відрізки $a=2, b=5$?

А. $5x+3y-10=0$; Б. $5x+2y-9=0$;

В. $5x+2y-10=0$; Г. $5x-2y-10=0$.

8.Яка з прямих проходить через точки $M_1(1, 3)$, $M_2(6, 5)$?

А. $\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{2}$; Б. $\frac{x-1}{5}=\frac{y+3}{2}$;

В. $\frac{x+1}{4}=\frac{y+3}{2}$; Г. $\frac{x-1}{5}=\frac{y-3}{2}$.

9. Яке з рівнянь є рівнянням еліпса?

А. $4x^2-9y^2-36=0$; Б. $4x^2-9y^2+36=0$;

В. $4x^2+9y^2-36=0$; Г. $4x^2+9y^2+36=0$.

10. Яке з рівнянь є рівнянням гіперболи?

А. $9x^2+4y^2-36=0$; Б. $9x^2+4y^2+36=0$;

В. $9x^2-4y^2-36=0$; Г. $9x^2+4y-36=0$.

11. Яке з рівнянь є рівнянням кола?

А. $x^2-y^2+7=0$; Б. $5x^2+3y^2-7=0$;

В. $2x^2-4x+3y-7=0$; Г. $x^2-2x+y^2=0$.

12. Яке з рівнянь є рівнянням параболи?

А. $y^2=8x+4$; Б. $y^2=8x^2+4$;

В. $y^2+8x^2=4$; Г. $y=8x+4$.

13.Яка з гіпербол має дійсну $a=5$ і уявну $b=2$ півосі?

А. $4x^2-16y^2=16$; Б. $4x^2-25y^2=100$;

В. $16x^2-4y^2=16$; Г. $25x^2-4y^2=100$.

14. Який з еліпсів має велику і малу півосі відповідно $a=5, b=2$?

А. $4x^2+16y^2=16$; Б. $4x^2+25y^2=100$;

В. $16x^2+4y^2=64$; Г. $25x^2+4y^2=100$.

Тема 4

Комплексні числа

Комплексні числа як розширення множини дійсних чисел

Означення. Множина всіх можливих впорядкованих пар (x, y) дійсних чисел, операції додавання, множення, а також їх рівність означаються за допомогою формул:

1) $(x_1, y_1)+(x_2, y_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2)$, (5.1)

2) $(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2)=(x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1)$, (5.2)

3) $(x_1, y_1)=(x_2, y_2)\Leftrightarrow x_1=x_2$ і $y_1=y_2$, (5.3)

називається *множиною комплексних чисел*.

Множина комплексних чисел позначається: $\boldsymbol{C}$.

Елементи множини $\boldsymbol{C}$ називаються *комплексними числами*.

Якщо впорядковану пару $(x,0), x \in \boldsymbol{R}$, ототожнити з дійсним числом x, поклавши $(x,0) = x$, то отримаємо, що множина $\boldsymbol{C}$ комплексних чисел є розширенням множини $\boldsymbol{R}$ дійсних чисел.

Оскільки $(0,1) \cdot (y,0) = (0, y)$, то комплексне число $z = (x, y)$ допускає представлення:

$$z = (x, y) = (x,0) + (0, y) = (x,0) + (0,1) \cdot (y,0) .$$

Тобто, це число можна записати у вигляді: $z = x + iy$, якщо ввести позначення: $i = (0,1)$ і вважати, що $(x,0) = x$, $(y,0) = y$.

Впорядкована пара $i = (0,1)$ називається *уявною одиницею*. Вона володіє властивістю:

$$i^2 = -1, \tag{5.4}$$

оскільки $i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1$.

<u>*Означення.*</u> Запис комплексного числа у вигляді:

$$z = x + iy, \tag{5.5}$$

де $x \in \boldsymbol{R}$, $y \in \boldsymbol{R}$, i – уявна одиниця, називається *алгебраїчною формою комплексного числа* $z = (x, y)$. При цьому x називається *дійсною частиною комплексного числа* z і позначається: $x = \operatorname{Re} z$; y називається *уявною частиною* і позначається: $y = \operatorname{Im} z$.

Якщо $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то формули (5.1), (5.2), (5.3) запишуться відповідно у вигляді:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \tag{5.6}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1), \tag{5.7}$$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \text{ і } \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2 . \tag{5.8}$$

Зокрема: $$z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z = 0 \text{ і } \operatorname{Im} z = 0. \tag{5.9}$$

Якщо $\operatorname{Im} z = 0$, то число z є дійсним числом. Якщо $\operatorname{Im} z \neq 0$, то комплексне число z називається *уявним числом*.

Операція віднімання комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ здійснюється за допомогою рівності: $$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \tag{5.10}$$

<u>*Означення.*</u> Комплексне число

$$\bar{z} = x - iy \tag{5.11}$$

називається *спряженим до комплексного числа* $z = x + iy$.

Очевидно, що $\overline{(\bar{z})} = z$, $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \boldsymbol{R}$.

<u>*Означення.*</u> Дійсне число

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{5.12}$$

називається *модулем комплексного числа* $z = x + iy$.

Очевидно, що завжди $|z| \geq 0$ і $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Справедливі також рівності:

$$|\bar{z}| = |z|, \tag{5.13}$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2, \tag{5.14}$$

оскільки $|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$, $z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - yi) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$.

Дія ділення комплексного числа z_1 на комплексне число z_2 здійснюється за допомогою рівностей:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}. \tag{5.15}$$

Отже, частка комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ обчислюється за формулою:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}}. \tag{5.16}$$

Розв'язування квадратних рівнянь з від'ємним дискримінантом

<u>*Означення.*</u> *Квадратним рівнянням* називається рівняння виду:

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{5.17}$$

Розв'язки цього рівняння у випадку невід'ємного дискримінанта

$$D = b^2 - 4ac \tag{5.18}$$

шукаються за формулами:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}. \tag{5.19}$$

Якщо ж $D < 0$, то рівняння (5.17) на множині дійсних чисел $\boldsymbol{R}$ не має розв'язків. У цьому випадку знаходять уявні корені квадратного рівняння, тобто, корені на множині комплексних чисел $\boldsymbol{C}$.

Оскільки $i^2 = -1$, то $i = \sqrt{-1}$. Якщо $D < 0$, то $-D > 0$ і

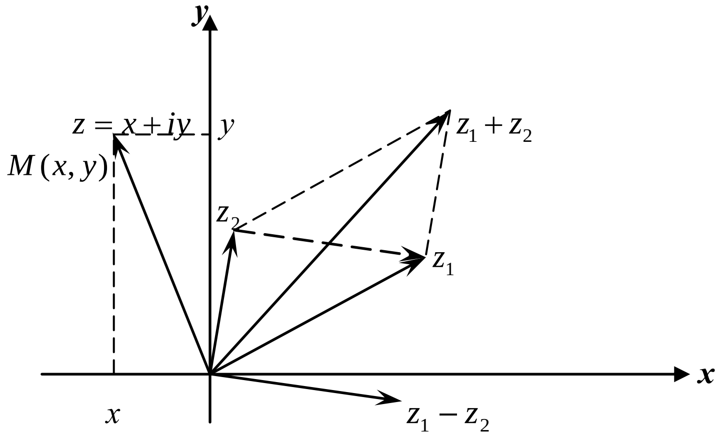
$\sqrt{D} = \sqrt{(-1) \cdot (-D)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-D} = i\sqrt{-D}$.

Тоді розв'язки квадратного рівняння з від'ємним дискримінантом згідно із (5.19) обчислюються за формулами:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a} \tag{5.20}$$

Геометричне тлумачення комплексних чисел та дій над ними

Якщо в площині введено прямокутну декартову систему координат, то між сукупністю всіх точок координатної площини і множиною комплексних чисел $\boldsymbol{C}$ можна встановити взаємно однозначну відповідність за таким правилом: комплексному числу $z = x + iy \in \boldsymbol{C}$ відповідає єдина точка $M(x, y)$ цієї площини і навпаки (мал. 55). При цьому кажуть, що точка $M(x, y)$ є *зображенням комплексного числа* $z = x + iy$ *на площині*.



мал.55

Оскільки дійсні числа $x = (x, 0)$ зображаються точками осі *Ox*, то ця вісь називається *дійсною віссю*. Оскільки уявні числа виду $iy = (0, y)$ зображаються точками осі *Oy*, то ця вісь називається *уявною віссю*.

Комплексне число $z = x + iy$ можна також зобразити на координатній площині вектором $\overrightarrow{OM}$ із початком в точці $O(0,0)$ і кінцем в точці $M(x, y)$. Тоді сума $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ зобразиться вектором, що є діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах, які зображають комплексні числа z_1 та z_2. Комплексне число $z_1 - z_2$ зобразиться вектором, який є іншою діагоналлю цього паралелограма, або вектором, що виходить з початку координат і паралельний до цієї діагоналі (мал. 55).

Модуль $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ комплексного числа $z = x + iy$ дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{OM}$, який зображає це комплексне число, а величина $|z_1 - z_2|$ є відстань між точками, що зображають комплексні числа z_1 та z_2 на площині.

Як випливає з геометричних міркувань, для довільних комплексних чисел z_1 і z_2 справедливі нерівності:

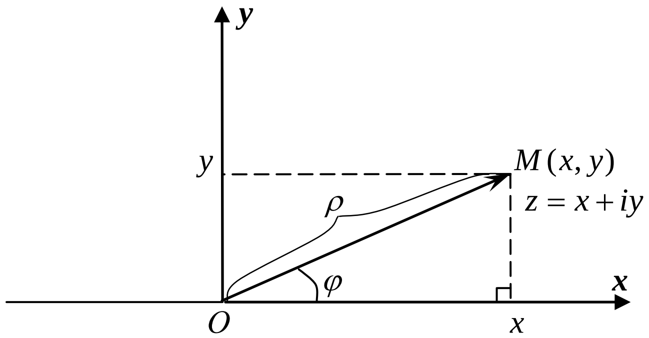
$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|, \tag{5.21}$$

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 - z_2|. \tag{5.22}$$

Тригонометрична і показникова форми комплексного числа

Поряд із прямокутними декартовими координатами (x, y) точки M, яка на комплексній площині зображає комплексне число $z = x + iy$, розглянемо її полярні координати (ρ, φ), де ρ – довжина радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$ точки M, φ – полярний кут точки M, тобто кут між додатним напрямком осі Ox і вектором $\overrightarrow{OM}$ (мал. 56). При цьому кут φ вважається від'ємним, якщо він вимірюється в напрямку, що відповідає руху годинникової стрілки, і додатним – в протилежному випадку.

Очевидно, що завжди $\rho \geq 0$ і $-\infty < \varphi < +\infty$.



мал. 56

Якщо (ρ, φ) – полярні координати точки $M(x, y)$, що зображає комплексне число $z = x + iy$ на комплексній площині, то

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \tag{5.23}$$

а число φ називається *аргументом комплексного числа* z.

Для комплексного числа $z = x + iy$ з полярними координатами (ρ, φ) справедливі рівності:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \tag{5.24}$$

Звідси отримаємо:

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{5.25}$$

– *тригонометрична форма комплексного числа* z.

Введемо позначення: $$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi\,. \tag{5.26}$$

Тоді з формули (5.25) отримаємо:

$$z = \rho e^{i\varphi} \tag{5.27}$$

– *показникова форма комплексного числа*.

Дії над комплексними числами в тригонометричній та показниковій формах

Над комплексними чисел z_1 і z_2, записаними в тригонометричній формі:

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$
$$z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2), \tag{5.28}$$

дії множення і ділення виконуються за такими правилами:

I. Множення комплексних чисел

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= \rho_1\cdot\rho_2(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2) =$$
$$= \rho_1\cdot\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Отже, отримаємо: $$z_1\cdot z_2 = \rho_1\cdot\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)) \tag{5.29}$$

– модуль добутку комплексних чисел дорівнює добутку їх модулів, аргумент добутку дорівнює сумі їх аргументів.

II. Ділення комплексних чисел

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\cdot(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$
$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} =$$
$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

Звідси матимемо: $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)) \tag{5.30}$$

– модуль частки комплексних чисел дорівнює частці їх модулів, аргумент частки дорівнює різниці їх аргументів.

III. Піднесення комплексних чисел до цілого степеня (формула Муавра)

Нехай маємо комплексне число z, записане в тригонометричній формі:

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Застосовуючи до цього числа формулу (5.29), можна отримати таку рівність:

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \tag{5.31}$$

– формула Муавра.

IV. Добування кореня з комплексних чисел

<u>*Означення.*</u> *Коренем n-го степеня з комплексного числа z* називається таке комплексне число ω, що $\omega^n = z$.

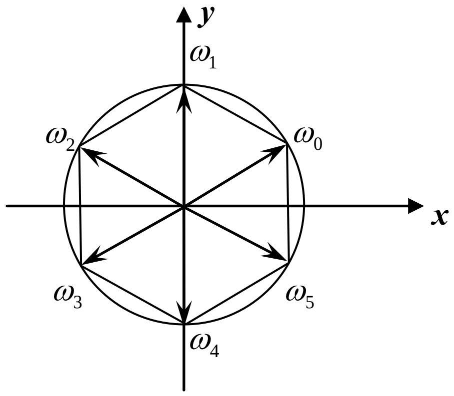
При $z \neq 0$ існує n різних комплексних чисел $\omega_0, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_{n-1}$, що є коренями n-го степеня з комплексного числа z.

Корені ω_k n-го степеня з комплексного числа $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ обчислюються за формулами:

$$\omega_k=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \qquad (5.32)$$

де $k=\overline{0,n-1}$.

Всі корені ω_k n-го степеня з комплексного числа z лежать на колі радіусом $\sqrt[n]{\rho}$ з центром в початку координат. Сполучивши їх послідовно, отримаємо правильний n-кутник, вписаний у це коло (мал. 58 – випадок кореня 6-го степеня).



мал. 58

Завдання для самостійної роботи

1. Якщо $z_1=2+4i$ та $z_2=5+3i$, то значення виразу $z=3iz_1+2z_2$ дорівнює

А. $z=-4+6i$. Б. $z=-2+12i$.

В. $z=3+5i$. Г. $z=-3-12i$.

2. Якщо $z_1=3-2i$ та $z_2=5+4i$, то значення виразу $z=3z_1+2iz_2$ дорівнює

А. $z=1+4i$. Б. $z=5-2i$. В. $z=-3+8i$. Г. $z=3-4i$.

3. Якщо $z_1=-3+5i$ та $z_2=6+4i$, то значення виразу $z=4iz_1-3z_2$ дорівнює

А. $z=-5+2i$. Б. $z=3+4i$.

В. $z=-38-24i$. Г. $z=18-42i$.

4. Якщо $z_1=-5+3i$ та $z_2=2+4i$, то значення виразу $z=z_1\cdot z_2$ дорівнює

А. $z=-22-14i$. Б. $z=10-3i$.

В. $z=-5+4i$. Г. $z=-24+18i$.

5. Якщо $z_1=3-5i$ та $z_2=2+6i$, то значення виразу $z=z_1\cdot z_2$ дорівнює

А. $z=2+8i$. Б. $z=36+8i$.

В. $z=24+16i$. Г. $z=26-14i$.

.6. Якщо $z_1=3-8i$ та $z_2=4+5i$, то значення виразу $z=z_1\cdot z_2$ дорівнює

А. $z=38+4i$. Б. $z=52-17i$.

В. $z=-16+23i$. Г. $z=-25-16i$.

7. Якщо $z_1=2-5i$ та $z_2=3+4i$, то значення виразу $z=z_1/z_2$ дорівнює

А. $z = \frac{14}{27} - \frac{5}{9} i$. Б. $z = \frac{8}{25} + \frac{3}{5} i$.

В. $z = -\frac{14}{25} - \frac{23}{25} i$. Г. $z = \frac{12}{25} - \frac{27}{25} i$.

8. Подати комплексне число $z = 5\sqrt{3} - 5i$ у тригонометричній і показниковій (експоненціальній) формах.

А. $z = 10e^{-i\frac{\pi}{6}} = 10\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

Б. $z = 10e^{-i\frac{\pi}{3}} = 10\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

В. $z = 5e^{-i\frac{\pi}{4}} = 5\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Г. $z = 10e^{-i\frac{\pi}{6}} = 10\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

9.Подати комплексне число $z = -4 + 4i$ у тригонометричній і показниковій (експоненціальній) формах.

А. $z = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}} = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

Б. $z = 4e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

В. $z = 4\sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi} = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$.

Г. $z = 8e^{i\frac{3}{4}\pi} = 8\left(\cos\frac{3}{4}\pi - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

10. Подати комплексне число $z = -3 - 3\sqrt{3}i$ у тригонометричній і показниковій (експоненціальній) формах.

А. $z = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$.

Б. $z = 6e^{i\frac{4}{3}\pi} = 6\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$.

В. $z = 6e^{i\frac{\pi}{4}} = 6\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Г. $z = 12e^{i\frac{2}{3}\pi} = 12\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$.

11. Якщо $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$ та $z_2 = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$, то значення виразу $z = z_1 \cdot z_2$ в алгебраїчній формі дорівнює

А. $z = 12e^{-i\frac{\pi}{2}} = -12i$. Б. $z = 12e^{i\frac{\pi}{4}} = 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2}i$.

В. $z = 12e^{i\pi} = -12$. Г. $z = 12e^{i\frac{\pi}{2}} = 12i$.

12.. Якщо $z_1 = 2e^{3i\pi}$ та $z_2 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$, то значення виразу $z = z_1 \cdot z_2$ в алгебраїчній формі дорівнює

А. $z = 8e^{-i\frac{3}{4}\pi} = -4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$. Б. $z = 8e^{i\frac{\pi}{2}} = 8i$.

В. $z = 8e^{i\frac{\pi}{3}} = 4\sqrt{3} - 4i$. Г. $z = 8e^{-i\frac{3}{4}\pi} = -4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$.

13.Значення виразу $z = z_1 \cdot z_2$, де $z_1 = 12\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ і $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$, в алгебраїчній формі дорівнює

А. $z = 24\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 12 + 12\sqrt{3}i$.

Б. $z = 24\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 12\sqrt{3} + 12i$.

В. $z = 24\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -12 + 12\sqrt{3}i$.

Г. $z = 14\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 7 + 7\sqrt{3}i$.

14.Значення виразу $z = z_1/z_2$, де $z_1 = 12\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ і $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$, в алгебраїчній формі дорівнює

А. $z = 24\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 12 + 12\sqrt{3}i$.

Б. $z = 6\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 3 + 3\sqrt{3}i$.

В. $z = 6\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3} + 3i$.

Г. $z = 6\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -3 + 3\sqrt{3}i$.

15. Значення виразу $z = z_1/z_2$, де $z_1 = 8\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ і $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, в алгебраїчній формі дорівнює

А. $z = 4\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -2\sqrt{3} - 2i$.

Б. $z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -2 + 2\sqrt{3}i$.

В. $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$.

Г. $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 4i$.

Перелік питань, які виносяться на залік

1. Визначники другого і третього порядку і їх обчислення.

2. Системи лінійних рівнянь і їх обчислення методом Гаусса.
3. Системи лінійних рівнянь і їх обчислення методом Крамера.
4. Матриці і дії над ними.
5. Обернена матриця і її обчислення за допомогою елементарних перетворень.
6. Матрична форма запису системи лінійних рівнянь. Розв'язання систем лінійних рівнянь матричним методом.
7. Вектори на площині та в просторі.
8. Дії над векторами.
9. Векторний базис та система координат.
10. Скалярний добуток векторів і його застосування.
11. Векторний добуток векторів і його застосування.
12. Мішаний добуток векторів і його застосування.
13. Поділ відрізка в заданому відношенні та навпіл.
14. Довжина відрізка. Центр ваги трикутника.
15. Полярна система координат. Циліндрична система координат.
16. Канонічне рівняння прямої. Рівняння прямої, що проходить через дві точки.
17. Загальне рівняння прямої. Пряма, задана точкою і нормованим вектором.
18. Рівняння прямої у «відрізках» на осях. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
19. Нормальне рівняння прямої. Взаємне розміщення двох прямих на площині.
20. Відстань від точки до прямої. Кут між прямими.
21. Поняття про лінії другого порядку на площині. Коло.
22. Еліпс, властивості еліпса.
23. Гіпербола, властивості гіперболи.
24. Парабола, властивості параболи.
25. Поняття комплексного числа. Алгебраїчна форма комплексного числа. Дії над комплексними числами, заданими в алгебраїчній формі.
26. Геометричне задання комплексних чисел.
27. Тригонометрична форма комплексного числа. Перехід від алгебраїчної форми комплексного числа до тригонометричної.
28. Дії над комплексними числами, заданими в тригонометричній формі: множення, ділення, піднесення до степеня, добування кореня.
29. Показникова форма комплексного числа. Перехід від алгебраїчної форми комплексного числа до показникової.

Рекомендована література

1. Кулик В.С.,Т.П.Кузьмич, М.В. Баховська . Конспект лекцій з вищої математики – Любешів, 2023.
2. Кулик В.С.,Т.П.Кузьмич, М.В. Баховська . Методичні вказівки до практичних занять з вищої математики – Любешів, 2023.
3. Басманов О.Є., Кириченко І.К., Мігунова Л.В., Сознік О.П. Вища математика: Навч. посібник. – Харків: АПБ, 2009
4. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – Київ, "А.С.К.", 2005. – 648 с.
5. Домбровський В.К., Крижанівський І.М. Вища математика:Підручник .- Тернопіль: 2003.
6. Кагадій Л.П., Павленко А.В., Чуднов К.У. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Ч. 1,2: Конспект лекцій. – Дніпропетровськ, НМетАУ. – 2004.
7. Клепко В.Ю.,Голець В.Л.Вища математика у прикладах і задачах: Навч.посібник.- Центр учбової літератури, 2021.- 594 с.
8. Соколенко О.І., Новик Г.А. Вища математика в прикладах і задачах. – К.: "Либідь", 2001 р.
9. Литвин І.І., Конопчук О.М., Желізняк Г.О. Вища математика: Навч. Посібник.- Київ «Центр учбової літератури»., 2009

Зміст

Вступ……………………………………………………….………………..3

Тематичне планування самостійної роботи..……………………..………4

Тема1. *Елементи лінійної алгебри*…………………………….…….……..5

Тема 2. *Метод координат* …...14

Тема 3. *Аналітична геометрія на площині* ………………………….......29

Тема 4. *Комплексні числа* ……………………………………….......45

Перелік питань, які виносяться на залік…………………..…..…54

Рекомендована література ……………………………..........................55

Вища математика [Текст]: методичні вказівки до виконання самостійної роботи для здобувачів освіти освітньо-кваліфікаційного рівня фаховий молодший бакалавр галузь знань 27 Транспорт спеціальності 274 Автомобільний транспорт денної форми навчання/ уклад. В.С.Кулик. Т.П. Кузьмич, М.В. Баховська М.В. – Любешів: ВСП «Любешівський ТФК ЛНТУ», 2023– 57 с

Комп'ютерний набір і верстка : Т.П. Кузьмич
Редактор: Т.П. Кузьмич

Підп. до друку ___________2023 р. Формат А4.
Папір офіс. Гарн. Таймс. Умов. друк. арк. ______
Обл. вид. арк.______ Тираж 15 прим.