МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Відокремлений структурний підрозділ
«Любешівський технічний фаховий коледж
Луцького національного технічного університету»

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки до практичних занять
для здобувачів освіти освітньо-професійного ступеня фаховий молодший бакалавр
галузь знань 27 Транспорт
спеціальності 274 Автомобільний транспорт
денної форми навчання

Любешів 2023 рік

УДК 51 (07)
К 88

До друку
Голова методичної ради ВСП «Любешівський ТФК ЛНТУ»
__________________ Герасимик-Чернова Т.П.

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозитарій коледжу
Бібліотекар _____________ М.М. Демих

Затверджено методичною радою ВСП «Любешівський ТФК ЛНТУ»
протокол № _____ від «____»__________ 2023 р.

Рекомендовано до видання на засіданні циклової методичної комісії викладачів математичних та природничо-наукових дисциплін
протокол № _____ від «____»__________ 2023 р.
Голова циклової методичної комісії _____________ Бущук В.Я.

Укладачі: __________________ В.С. Кулик
Т.П. Кузьмич
М.В. Баховська М.В.
Рецензент: __________________

Відповідальний за випуск: _________ БущукВ.Я., викладач вищої категорії, голова циклової методичної комісії викладачів математичних та природничо-наукових дисциплін.

Вища математика [Текст]: методичні вказівки до виконання практичних занять для здобувачів освіти освітньо-професійного ступеня фаховий молодший бакалавр галузь знань 27 Транспорт спеціальності 274 Автомобільний транспорт денної форми навчання / уклад. В.С.Кулик. Т.П. Кузьмич, М.В. Баховська М.В. – Любешів: ВСП «Любешівський ТФК Луцького НТУ», 2023 – 73 с.

Методичне видання містить методичні вказівки до практичних занять, перелік питань, які виносяться на залік та літературу.

1. Вступ

Практичні заняття з дисципліни "Вища математика" є складовою частиною нормативно-методичного забезпечення навчального процесу для здобувачів освітньо-професійного рівня «фаховий молодший бакалавр».

Мета курсу – забезпечити вивчення тих математичних понять та методів, які не ввійшли до програми загальноосвітньої математичної підготовки студентів, але використовуються в процесі вивчення дисциплін циклу професійної підготовки.

Завдання курсу – оволодіння студентами математичними знаннями і вміннями для вивчення спеціальних дисциплін, ефективного розв'язання завдань економіки, управління.

В результаті вивчення дисципліни студент повинен знати:

- означення визначника другого і третього порядку;
- правило Крамера;
- означення матриці та її властивості;
- формули для обчислення скалярного, векторного, мішаного добутків та їх застосування;
- рівняння прямої у різних формах, еліпса, гіперболи, параболи.
- означення комплексних чисел, різні їх форми та перехід від однієї форми до іншої.

Студент повинен вміти:

- обчислювати визначники другого і третього порядку;
- розв'язувати системи рівнянь за правилом Крамера;
- виконувати дії над векторами;
- обчислювати скалярний, векторний, мішаний добутки і їх застосовувати;
- досліджувати взаємне розташування прямих та знаходити кут між ними;
- будувати криві другого порядку за їх рівняннями та визначати їх властивості;
- виконувати дії над комплексними числами в алгебраїчній, тригонометричній, показниковій формах.

2. Тематичне планування практичних занять

№ з/п	Назва тем курсу, практичних занять та їх зміст. Назви змістовних модулів	Час опрацювання	Бібліографія
1	2	3	4
1	*Тема 1*. **Елементи векторної алгебри**	**4**	Л.1 (ст. 3-12)
1.1	*Практичне заняття № 1.* Системи лінійних рівнянь. Методи Гауса і Крамера розв'язання систем лінійних рівнянь	2	Л.1 (ст. 3-8)
1.2	*Практичне заняття № 2.* Матриці та основні дії над ними. Обернена матриця.	2	Л.1 (ст. 8-12)
2	*Тема 2.* **Метод координат**	**4**	Л.1 (ст. 13-29)
2.1	*Практичне заняття № 3.* Вектори на площині та в просторі. Дії над векторами.	2	Л.1 (ст. 19-24)
2.2.	*Практичне заняття № 4.* Скалярний добуток векторів. Векторний добуток векторів. Мішаний добуток векторів		Л.1 (ст. 25-29)
3	*Тема 3*. **Аналітична геометрія на площині**	**4**	Л.1 (30-51)
3.1	*Практичне заняття № 5.* Різні способи задання прямої	2	Л.1 (30-36)
3.2	*Практичне заняття № 6* Лінії другого порядку на площині	2	Л.1 (ст. 42-50)
4	*Тема 4*. **Комплексні числа**	**4**	Л.1 (ст. 52-59)
4.1	*Практичне заняття №7* Тригонометрична і показникова форми комплексного числа.	2	Л.1 (ст.. 55-59)
4.2.	*Практичне заняття № 8* Дії над комплексними числами, заданими в тригонометричній формі	2	Л.1 (ст.60-65)
	ВСЬОГО	16	

3. Практичні заняття

Практичне заняття №1. Системи лінійних рівнянь. Методи Гауса і Крамера розв'язання систем лінійних рівнянь.

<u>*Означення.*</u> *Системою k лінійних рівнянь з n невідомими* називається система виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3, \\ ....,\\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + ... + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases} \tag{1.8}$$

де $a_{ij}, b_i \in R(i = \overline{1,k}, j = \overline{1,n})$ – задані дійсні числа, $x_j\,(j = \overline{1,n})$ – змінні. *Розв'язком системи* називається *n*-вимірний вектор $\overrightarrow{x_0} = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, ..., x_n^0)$ такий, що при підстановці його координат замість відповідних змінних, кожне рівняння системи (1.8) перетворюється на правильну рівність.

<u>*Означення.*</u> Система, яка має розв'язок, називається *сумісною*, а система, яка не має розв'язку – несумісною.

<u>*Означення.*</u> Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, *невизначеною* – коли система має безліч розв'язків.

Метод Гаусса полягає у послідовному виключенні невідомих з рівнянь:

x_1 виключаємо з усіх рівнянь, крім першого;

x_2 – з усіх рівнянь, крім першого і другого;

x_3 – з усіх рівнянь, крім першого, другого і третього і т.д.

Для сумісних систем лінійних рівнянь можливі два випадки:

1. В останньому рівнянні залишиться одне невідоме. Тоді система матиме єдиний розв'язок, який шукається «знизу-вгору».

2. В останньому рівнянні залишиться більш, ніж одне невідоме. Тоді лишаємо у лівій частині цього рівняння лише одну змінну, а інші переносимо у праву частину рівняння і називатимемо їх *вільними змінними*. Вільним змінним можна надавати довільних значень і шукати відповідні значення інших невідомих. В цьому випадку система матиме безліч розв'язків, тобто буде невизначеною.

<u>Приклад.</u> Розв'язати систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 49. \end{cases}$$

Розв’яжемо цю систему за допомогою матриць:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&-4&1&-5\\1&1&-1&5\\1&2&1&49\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ |-3\,\|\\ |-3\,|||\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}3&-4&1&-5\\0&-7&4&-20\\0&-10&-2&-152\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ 7\,|||-10\,\|\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}3&-4&1&-5\\0&-7&4&-20\\0&0&-54&-864\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \div(-54)\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}3&-4&1&-5\\0&-7&4&-20\\0&0&1&16\end{array}\right).$$

З останньої матриці отримаємо систему:

$$\begin{cases}3x_1-4x_2+x_3=-5,\\ -7x_2+4x_3=-20,\\ x_3=16;\end{cases}\quad \begin{cases}3x_1-4x_2=-21,\\ -7x_2=-84,\\ x_3=16;\end{cases}\quad \begin{cases}x_1=9,\\ x_2=12,\\ x_3=16.\end{cases}$$

Відповідь: $\{(9;12;16)\}$.

Метод Гаусса можна модифікувати, якщо робити послідовне виключення змінних з усіх рівнянь, крім одного. Це можна зробити за допомогою правила прямокутника. При цьому потрібно обирати ведучий елемент (найкраще на кожному кроці вибирати «одиницю»), який має міститися по головній діагоналі матриці, що відповідає даній системі рівнянь. Удосконалений таким способом метод Гаусса називається *методом Гаусса - Жордана.*

Приклад2. Розв’язати систему методом Гаусса - Жордана:

$$\begin{cases}2x_1-2x_2-x_3=-1,\\ 3x_1-4x_2+x_3=-5,\\ 4x_1-x_2+3x_3=-4.\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&-2&-1&-1\\3&-4&1&-5\\4&-1&3&-4\end{array}\right)\begin{array}{l}\|-|\\ \\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}(1)&-2&2&-4\\3&-4&1&-5\\4&-1&3&-4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&-4\\0&2&-5&7\\0&7&-5&12\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ |||-3\,\|\\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&-4\\0&(1)&10&-9\\0&7&-5&12\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&22&-22\\0&1&10&-9\\0&0&-75&75\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \div(-75)\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&22&-22\\0&1&10&-9\\0&0&(1)&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\end{array}\right).$$

З останньої матриці отримаємо:

$$\begin{cases}x_1=0,\\ x_2=1,\\ x_3=-1.\end{cases}$$

Відповідь: $\{(0;1;-1)\}$.

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3, \\ ...., \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1.9}$$

Введемо позначення: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & b_n & ... & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & b_3 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & b_n \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta \neq 0$, то розв’язок системи (1.9) шукають за *формулами Крамера:*

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}, \\ .... \\ x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}. \end{cases} \tag{1.10}$$

<u>Приклад.</u> Розв’язати систему методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 12,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 12,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 12,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Скориставшись формулами Крамера, отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{12}{12} = 1, \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{12}{12} = 1, \\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{0}{12} = 0. \end{cases}$$

Тестові завдання до практичного заняття:

ТЗ 3.1. При якій умові квадратна система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \text{ де } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

– головний визначник системи, має єдиний розв’язок?

А. $\Delta = 0$. Б. $\Delta \geq 0$. В. $\Delta \leq 0$. Г. $\Delta \neq 0$.

ТЗ 3.2. При якій достатній умові квадратна система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \text{ де } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

– головний визначник системи і

$$\Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \Delta^{(n)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}$$

– допоміжні визначники системи, не має жодного розв’язку?

А. $\Delta \neq 0$, $\Delta^{(j)} = 0 \ \ (j = 1, 2, \ldots, n)$.

Б. $\Delta > 0$, $\Delta^{(j)} \neq 0$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

В. $\Delta = 0$, $\Delta^{(j)} = 0 \ \ (j = 1, 2, \ldots, n)$.

Г. $\Delta = 0$, а хоча б один із визначників $\Delta^{(j)} \ \ (j = 1, 2, \ldots, n)$ відмінний від нуля.

ТЗ 3.3. Необхідною і достатньою умовою наявності ненульового розв’язку однорідної квадратної системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}, \text{ де } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

– головний визначник, є

А. $\Delta = 0$. Б. $\Delta \geq 0$. В. $\Delta \leq 0$. Г. $\Delta \neq 0$.

ТЗ 3.4. Система лінійних рівнянь $AX = B$ має безліч розв’язків тоді і тільки тоді, коли

А. Ранг розширеної матриці $C = (A \mid B)$ менший рангу основної матриці A і менший числа невідомих.

Б. Ранг розширеної матриці $C = (A \mid B)$ більший рангу основної матриці A, але менший числа невідомих.

В. Ранг розширеної матриці $C = (A \mid B)$ дорівнює рангу основної матриці A і менший числа невідомих.

Г. Ранг розширеної матриці $C = (A \mid B)$ дорівнює рангу основної матриці A і дорівнює числу невідомих.

ТЗ 3.5. Яка система двох лінійних рівнянь має розв’язок $x = 3,\ y = 4$?

А. $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$. Б. $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$.

В. $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$. Г. $\begin{cases} x - 2y = 11 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$.

ТЗ 3.6. Яка система двох лінійних рівнянь еквівалентна системі

$$\begin{cases} 3x \quad = 9 \\ \quad 5y = 15 \end{cases}?$$

А. $\begin{cases} x+y=6 \\ 2x-y=7 \end{cases}$.   Б. $\begin{cases} x+y=6 \\ 2x-3y=5 \end{cases}$.

В. $\begin{cases} 2x+y=6 \\ 3x-2y=5 \end{cases}$.   Г. $\begin{cases} x+y=6 \\ 3x+y=12 \end{cases}$.

ТЗ 3.7. Які пари систем лінійних рівнянь еквівалентні між собою?

А. $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x-y=5 \end{cases}$ і $\begin{cases} x+2y=3 \\ 8y=10 \end{cases}$. Б. $\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$ і $\begin{cases} x+2y=3 \\ 8y=8 \end{cases}$.

В. $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ і $\begin{cases} x+2y=3 \\ 5y=6 \end{cases}$. Г. $\begin{cases} x+2y=3 \\ 5x-3y=7 \end{cases}$ і $\begin{cases} x+2y=3 \\ 9y=18 \end{cases}$.

ТЗ 3.8. Яка система двох лінійних рівнянь має єдиний розв'язок?

А. $\begin{cases} 5x-3y=8 \\ 10x-6y=15 \end{cases}$.   Б. $\begin{cases} 3x+2y=3 \\ 15x+10y=1 \end{cases}$.

В. $\begin{cases} x+3y=4 \\ 3x-y=2 \end{cases}$.   Г. $\begin{cases} x+y=6 \\ 2x-3y=-3 \end{cases}$.

ТЗ 3.9. Яка система двох лінійних рівнянь еквівалентна одному рівнянню з двома невідомими?

А. $\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x+6y=10 \end{cases}$.   Б. $\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x+6y=9 \end{cases}$.

В. $\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x+6y=10 \end{cases}$.   Г. $\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x+5y=9 \end{cases}$.

ТЗ 3.10. Яка система двох лінійних рівнянь має безліч розв'язків?

А. $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-3y=-4 \end{cases}$.   Б. $\begin{cases} 7x-y=5 \\ 14x-2y=10 \end{cases}$.

В. $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+y=4 \end{cases}$.   Г. $\begin{cases} 7x-y=5 \\ 14x-2y=9 \end{cases}$.

ТЗ 3.11. Яка система двох лінійних рівнянь не має жодного розв'язку?

А. $\begin{cases} 7x+y=5 \\ 21x+3y=9 \end{cases}$.   Б. $\begin{cases} 7x+y=5 \\ 14x+2y=10 \end{cases}$.

В. $\begin{cases} 7x+y=5 \\ 21x-3y=9 \end{cases}$.   Г. $\begin{cases} 7x+y=5 \\ 14x-2y=10 \end{cases}$.

ТЗ 3.12. Яка система трьох лінійних рівнянь має розв'язок $x=1,\ y=2,\ z=-3$?

А. $\begin{cases} x+y-z=6 \\ 2x+3y+z=5 \\ -x+2y-z=6 \end{cases}$.   Б. $\begin{cases} x+y-z=6 \\ 2x+3y+z=5 \\ x+2y-z=6 \end{cases}$.

В. $\begin{cases} x+y-z=6 \\ 2x-3y+z=5 \\ -x+2y-z=6 \end{cases}$.   Г. $\begin{cases} x+y-z=6 \\ 2x+3y+z=6 \\ -x+2y-z=6 \end{cases}$.

ТЗ 3.13. Яка однорідна квадратна система має ненульовий розв'язок?

А. $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-3y+2z=0 \\ 4x+y-z=0 \end{cases}$.   Б. $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ 4x+2y-z=0 \end{cases}$.

В. $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ 4x+y-z=0 \end{cases}$. Г. $\begin{cases} x+2y-2z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ 4x+y-z=0 \end{cases}$.

ТЗ 3.14. Яка система трьох лінійних рівнянь еквівалентна системі

$$\begin{cases} 3x \quad\quad =15 \\ \quad 2y \quad =4 \\ \quad\quad 5z=5 \end{cases} ?$$

А. $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y+z=2 \\ 3x+y+2z=11 \end{cases}$. Б. $\begin{cases} x+y+z=8 \\ x-y+z=4 \\ 3x+y+2z=19 \end{cases}$.

В. $\begin{cases} x+y+z=8 \\ x-y+z=4 \\ 2x-y+2z=5 \end{cases}$. Г. $\begin{cases} x+y+z=8 \\ x+2y+z=5 \\ 3x+y+2z=19 \end{cases}$.

ТЗ 3.15. Яка з систем трьох лінійних рівнянь еквівалентна системі

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ \quad 3y+z=9 \\ \quad\quad 7z=21 \end{cases} ?$$

А. $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ 5x+2y-3z=0 \end{cases}$. Б. $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ 5x+2y-3z=1 \end{cases}$.

В. $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ 4x+2y-3z=0 \end{cases}$. Г. $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=2 \\ 5x+2y-3z=1 \end{cases}$.

ТЗ 3.16. Яка система трьох лінійних рівнянь має єдиний розв’язок?

А. $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-2y \quad =5 \\ -5x+5y=3 \end{cases}$. Б. $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-2y \quad =5 \\ 7x \quad\quad =5 \end{cases}$.

В. $\begin{cases} x+y+z=3 \\ \quad 3y-z=5 \\ -6y+2z=3 \end{cases}$. Г. $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+z=1 \\ 3x+3z=4 \end{cases}$.

ТЗ 3.17. Яка система трьох лінійних рівнянь еквівалентна системі двох рівнянь з трьома невідомими?

А. $\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x-y+3z=5 \\ 3x+y+4z=8 \end{cases}$. Б. $\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x-y+3z=5 \\ 3x+2y+3z=8 \end{cases}$.

В. $\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x-y+3z=5 \\ 3x+y+2z=8 \end{cases}$. Г. $\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x-y+3z=5 \\ 2x+y+2z=8 \end{cases}$.

ТЗ 3.18. Яка система трьох лінійних рівнянь має безліч розв’язків?

А. $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 3x+y-z=3 \\ x+2y-z=2 \end{cases}$. Б. $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 3x+y-z=3 \\ 5x-y+z=5 \end{cases}$.

В. $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 3x+y-z=3 \\ 2x-3y+2z=1 \end{cases}$. Г. $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+y-z=1 \\ 3x+2y+z=6 \end{cases}$.

ТЗ 3.19. Яка система трьох лінійних рівнянь не має жодного розв'язку?

А. $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+3y-z=4 \\ 5x+6y+2z=13 \end{cases}$. Б. $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+3y-z=4 \\ x+2y-z=1 \end{cases}$.

В. $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+3y-z=4 \\ 5x+6y+7z=18 \end{cases}$. Г. $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+3y-z=4 \\ 5x+6y+2z=12 \end{cases}$.

ТЗ 3.20. Яка система трьох лінійних рівнянь еквівалентна одному рівнянню з трьома невідомими?

А. $\begin{cases} 2x-y+5z=7 \\ 5x-3y+15z=21 \\ 3x-2y+10z=14 \end{cases}$. Б. $\begin{cases} 2x-y+5z=7 \\ 3x-2y+5z=14 \\ 5x-4y+10z=21 \end{cases}$.

В. $\begin{cases} 2x-y+5z=7 \\ 6x-3y+15z=21 \\ 4x-y+10z=14 \end{cases}$. Г. $\begin{cases} 2x-y+5z=7 \\ 6x-3y+15z=21 \\ 4x-2y+10z=14 \end{cases}$.

ТЗ 3.21. Яка з систем трьох лінійних рівнянь має єдиний розв'язок?

А. $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-z=1 \\ 7x+y-3z=5 \end{cases}$. Б. $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-z=1 \\ 7x+y-3z=6 \end{cases}$.

В. $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-z=1 \\ 3y+z=4 \end{cases}$. Г. $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-z=1 \\ 3x+y-z=3 \end{cases}$.

ТЗ 3.22. Знайти розв'язки системи $\begin{cases} x-4y+z=6 \\ x-3y-2z=2 \\ -x+2y+5z=2 \end{cases}$.

А. $x=12+11t,\ \ y=4-3t,\ \ z=t,\ t\in R$.
Б. $x=22+11t,\ \ y=4+3t,\ \ z=t,\ t\in R$.
В. $x=2+15t,\ \ y=4+2t,\ \ z=t,\ t\in R$.
Г. $x=11-22t,\ \ y=2+3t,\ \ z=t,\ t\in R$.

ТЗ 3.23. Знайти розв'язки системи $\begin{cases} x+y-3z=2 \\ x+2y+z=1 \\ 3x+5y-z=4 \end{cases}$.

А. $x=3+7t,\ \ y=-1-4t,\ \ z=t,\ t\in R$.
Б. $x=5+2t,\ \ y=-1-5t,\ \ z=t,\ t\in R$.
В. $x=2+3t,\ \ y=-4+5t,\ \ z=t,\ t\in R$.
Г. $x=8-7t,\ \ y=2+3t,\ \ z=t,\ t\in R$.

ТЗ 3.24. Знайти розв'язки системи $\begin{cases} x-3y-2z=0 \\ x-2y+2z=0 \\ x-y+6z=0 \end{cases}$.

А. $x=3t,\ \ y=8t,\ \ z=t,\ t\in R$.
Б. $x=-12t,\ \ y=-3t,\ \ z=t,\ t\in R$.
В. $x=6t,\ \ y=-4t,\ \ z=t,\ t\in R$.
Г. $x=-10t,\ \ y=-4t,\ \ z=t,\ t\in R$.

ТЗ 3.25. Яка з систем трьох лінійних рівнянь еквівалентна системі $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ \quad y-3z=3 \\ \qquad z=-1 \end{cases}$?

А. $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ x+y+2z=-1 \\ x-2y+z=2 \end{cases}$. Б. $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ x+y-2z=1 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$.

В. $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ x+y+2z=-1 \\ x-y+z=0 \end{cases}$. Г. $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ x+y+z=-1 \\ x-y+z=1 \end{cases}$.

ТЗ 3.26. Яка з систем трьох лінійних рівнянь еквівалентна системі

$$\begin{cases} x+2y-z=2 \\ \quad y-3z=3 \\ \qquad z=-1 \end{cases} ?$$

А. $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ x+y+2z=-1 \\ x-y+z=0 \end{cases}$. Б. $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ x+y-2z=1 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$.

В. $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ x+\quad 2z=-1 \\ x-2y+z=2 \end{cases}$. Г. $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ x+y\ +z=-1 \\ x-y\qquad =3 \end{cases}$.

ТЗ 3.27. Яка з указаних систем двох рівнянь з трьома невідомими еквівалентна системі

$\begin{cases} x+4y-z=3 \\ x+3y+z=0 \\ x+2y+4z=-3 \end{cases}$ **?**

А. $\begin{cases} x+4y-z=3 \\ \quad y-4z=1 \end{cases}$. Б. $\begin{cases} x+4y-z=3 \\ \quad y-3z=3 \end{cases}$.

В. $\begin{cases} x+4y-z=3 \\ \quad y+4z=-3 \end{cases}$. Г. $\begin{cases} x+4y-z=3 \\ \quad y-2z=-2 \end{cases}$.

Практичне заняття №2. Матриці та основні дії над ними. Обернена матриця.

<u>*Означення.*</u> *Матрицею порядку* $m \times k$ називається прямокутна таблиця, що складається з m рядків, k стовбців і $m \times k$ чисел, що стоять у ній.

Матриці записують у вигляді:

$$A_{m\times k} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3k} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ... & a_{mk} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо квадратну матрицю n-го порядку:

$$A_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

<u>*Означення.*</u> *Сумою двох матриць* $A_{m\times k}=(a_{ij})$ і $B_{m\times k}=(b_{ij})$, де $i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,k}$, називається матриця $C_{m\times k}=(c_{ij})$, де $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ для $\forall\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,k}$.

<u>*Означення.*</u> *Добутком матриці* $A_{m\times k}=(a_{ij})$ *на число* λ називається матриця $\lambda A_{m\times k}=(\lambda a_{ij})$, *де* $i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,k}$.

<u>*Означення.*</u> *Добутком двох матриць* $A_{m\times k}=(a_{ir})$ і $B_{k\times p}=(b_{rj})$, де $i=\overline{1,m}, r=\overline{1,k},\ j=\overline{1,p}$, називається матриця $C_{m\times p}=(c_{ij})$, де

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+a_{i3}\cdot b_{3j}+\dots+a_{ik}\cdot b_{kj}=\sum_{r=1}^{k}a_{ir}\cdot b_{rj} \qquad (1.11)$$

для $\forall\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,p}$.

<u>Приклад.</u> Нехай $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & -4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Знайти $A+B, 3A$.

$A+B=\begin{pmatrix} 8 & -4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix},\ 3A=\begin{pmatrix} 9 & -3 & -6 & 15 \\ 0 & 12 & 3 & -12 \end{pmatrix}$.

<u>Приклад.</u> Нехай $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & -4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Знайти $A\times B$.

$A\times B=\begin{pmatrix} 10 & 8 & -17 \\ -12 & 5 & 18 \end{pmatrix}$.

Властивості дій над матрицями:

1. $\forall A,B: A+B=B+A$;
2. $\forall A,B,C: (A+B)+C=A+(B+C)$;
3. $\forall A,B,\forall\lambda: \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$;
4. $\forall A,\forall\lambda,\mu: (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$;
5. $A\times B\neq B\times A$ (в загальному випадку);
6. $\forall A,B,C: (A\times B)\times C=A\times(B\times C)$;
7. $\forall A,B,C: (A+B)\times C=A\times C+B\times C$.

<u>*Означення.*</u> *Одиничною матрицею n-го порядку* називається така квадратна матриця, в якій по головній діагоналі розміщені «одиниці», а інші елементи – нулі.

Наприклад, одинична матриця 4-го порядку має вигляд:

$$E_{4\times 4}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Одинична матриця E має ту властивість, що при множенні її чи зліва, чи справа на довільну матрицю одержуємо ту ж матрицю. Тобто, для будь-якої матриці A виконуються рівності:

$$A\times E=E\times A=A. \tag{1.12}$$

<u>*Означення.*</u> Матриця B називається *оберненою до матриці A*, якщо виконуються рівності:

$$A\times B=B\times A=E. \tag{1.13}$$

Обернену матрицю до матриці A позначають A^{-1}.

З означення слідує, що якщо матриця B обернена до матриці A, то і A – обернена до B, тобто має місце рівність:

$$(A^{-1})^{-1}=A. \tag{1.14}$$

Обернені матриці існують тільки для квадратних матриць A, причому таких, що $\det A\neq 0$.

Для знаходження оберненої матриці до матриці A складають матрицю виду: $(A\,|\,E)$, де E – одинична матриця того ж порядку, що й A. Утворену матрицю за допомогою елементарних перетворень зводять до вигляду: $(E\,|\,B)$. Тоді покладають: $A^{-1}=B$.

<u>Приклад.</u> Знайти обернену матрицю до матриці

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Складаємо матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \mathrm{I}-\mathrm{II} \\ \\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} (1) & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \times(-1) \\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \times(-1) \\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & (1) & -7 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -4 & 5 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \div 12 \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -\frac{1}{12} & \frac{2}{12} & 0 \\ 0 & 1 & -7 & \frac{2}{12} & -\frac{3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & (1) & -\frac{4}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{5}{12} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{7}{12} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \end{array}\right).$$

Звідси отримаємо: $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{8}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{4}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{7}{12} \\ -\frac{4}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -4 & -1 & 7 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$

Нехай маємо квадратну матрицю *n*-го порядку:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1.15)$$

Розглянемо детермінант *n*-го порядку, що відповідає цій матриці:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.16)$$

Означення. Мінором елемента a_{ij} детермінанта *n*-го порядку називається детермінант (*n-1*)-го порядку, який одержується з даного детермінанта викресленням *i*-того рядка та *j*-того стовбця.

Мінор елемента a_{ij} позначається: M_{ij}.

Означення. Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} називається число:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}. \qquad (1.17)$$

Теорема

Нехай задано матрицю A рівністю (1.15). *Тоді, якщо* $\det A=\Delta\neq 0$, *то обернену матрицю до матриці A можна обчислити за допомогою рівності:*

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \dots & A_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1.18)$$

Приклад. Знайти обернену матрицю до матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -4\\ 5 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$ за допомогою алгебраїчних доповнень.

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix},\ \text{де}\ \Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & -4\\ 5 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=37,$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=3,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=1,\ A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}5 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-8,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & -4\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2,\ A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -4\\ 3 & 1\end{vmatrix}=13,\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=7,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & -4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=8,\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -4\\ 5 & 2\end{vmatrix}=-22,\ A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-9.$$

Звідси: $A^{-1}=\frac{1}{37}\begin{pmatrix}3 & 2 & 8\\ 1 & 13 & -22\\ -8 & 7 & -9\end{pmatrix}.$

Тестові завдання до практичного заняття:

ТЗ 2.1. Яка матриця називається транспонованою A^T до матриці

$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$?

А. $\begin{pmatrix}a_{1n} & a_{2(n-1)} & \dots & a_{11}\\ a_{2n} & a_{2(n-1)} & \dots & a_{21}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{mn} & a_{m(n-1)} & \dots & a_{m1}\end{pmatrix}$. Б. $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$.

В. $\begin{pmatrix}a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\\ a_{(m-1)1} & a_{(m-2)2} & \dots & a_{(m-1)n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\end{pmatrix}$. Г. $A^T=-A$.

ТЗ 2.2. Які дві матриці є взаємно транспонованими?

А. $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Б. $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

В. $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Г. $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

ТЗ 2.3. Яка квадратна матриця є одиничною?

А. $E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 1 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & 1 & \dots & 1\end{pmatrix}$. Б. $E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$.

В. $E=\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ 0 & 1 & \dots & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$. Г. $E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1\end{pmatrix}$.

ТЗ 2.4. Сумою яких двох матриць є матриця $\begin{pmatrix}8 & 1\\ 7 & -4\end{pmatrix}$?

А. $\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & -7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -2\\ 4 & -5\end{pmatrix}$. Б. $\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & -7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & 3\end{pmatrix}$.

В. $\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & -7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 2\\ -7 & 4\end{pmatrix}$. Г. $\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & -7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & 3\end{pmatrix}$.

ТЗ 2.5. Різницею яких двох матриць є матриця $\begin{pmatrix}2 & 5\\ -3 & -11\end{pmatrix}$?

А. $\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & -7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -21\\ 3 & 40\end{pmatrix}$. Б. $\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & -7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

В. $\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & -7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & 4\end{pmatrix}$. Г. $\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & -7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{pmatrix}$.

ТЗ 2.6. Що називається добутком матриці A на число α?

А. Добутком матриці A на число α називається нова матриця $C=\alpha A$, яка відрізняється від матриці A тим, що кожний елемент першого рядка матриці A помножається на число α

$$\alpha A=\begin{pmatrix}\alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Б. Добутком матриці A на число α називається нова матриця $C=\alpha A$, яка відрізняється від матриці A тим, що кожний елемент першого стовпця матриці A помножається на число α

$$\alpha A=\begin{pmatrix}\alpha a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ \alpha a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

В. Добутком матриці A на число α називається нова матриця $C=\alpha A$, яка відрізняється від матриці A тим, що кожний елемент матриці A помножається на число α

$$\alpha A=\begin{pmatrix}\alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n}\\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Г. Добутком матриці A на число α називається нова матриця $C=\alpha A$, яка відрізняється від матриці A тим, що кожний елемент головної діагоналі матриці A помножається на число α

$$\alpha A=\begin{pmatrix}\alpha a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn}\end{pmatrix}.$$

ТЗ 2.7. Добутком числа $\alpha = 2$ на матрицю $\begin{pmatrix}3 & 5\\ -1 & -4\end{pmatrix}$ є

А. $\begin{pmatrix}6 & 10\\ -2 & -8\end{pmatrix}$. Б. $\begin{pmatrix}6 & 10\\ -1 & -4\end{pmatrix}$.

В. $\begin{pmatrix}6 & 5\\ -2 & -4\end{pmatrix}$. Г. $\begin{pmatrix}6 & 5\\ -1 & -8\end{pmatrix}$.

ТЗ 2.8. Що називається добутком матриці A розміру $m\times n$ на матрицю B розміру $n\times p$?

А. Матриця $C = AB$ розміру $m\times p$, кожний елемент c_{ij} якої обчислюється за правилом $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j} + \ldots + a_{in}\cdot b_{nj}$.

Б. Матриця $C = AB$ розміру $m\times p$, кожний елемент c_{ij} якої обчислюється за правилом $c_{ij} = a_{j1}b_{1i} + a_{j2}\cdot b_{2i} + \ldots + a_{jn}\cdot b_{ni}$.

В. Матриця $C = AB$ розміру $p\times m$, кожний елемент c_{ij} якої обчислюється за правилом $c_{ij} = a_{i1}b_{1i} + a_{i2}\cdot b_{2i} + \ldots + a_{in}\cdot b_{ni}$.

Г. Квадратна матриця $C = AB$ q-того порядку $(q = \min\{m, n, p\})$, кожний елемент c_{ij} якої обчислюється за правилом $c_{ij} = a_{j1}b_{1i} + a_{j2}\cdot b_{2i} + \ldots + a_{jq}\cdot b_{qi}$.

ТЗ 2.9. Добутком яких двох матриць є матриця $\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 5 & 3 & 2\end{pmatrix}$?

А. $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 1\end{pmatrix}$. Б. $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

В. $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Г. $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

ТЗ 2.10. Добутком яких двох матриць є матриця $\begin{pmatrix}3 & 2\\ -5 & 6\end{pmatrix}$?

А. $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$. Б. $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$.

В. $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$. Г. $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

ТЗ 2.11. Добутком яких двох матриць є матриця $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$?

А. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Б. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

В. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Г. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ТЗ 2.12. Визначник якої матриці A дорівнює 18?

А. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 6 & 7 & 0 \end{pmatrix}$. Б. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$.

В. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$. Г. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.

ТЗ 2.13. Визначник якої матриці A дорівнює 1?

А. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Б. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

В. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Г. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

ТЗ 2.14. Яка з матриць має визначник, що дорівнює 72?

А. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Б. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

В. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Г. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

ТЗ 2.15. Яка матриця A^{-1} називається оберненою до матриці A?

А. Квадратна матриця A^{-1} того ж порядку, що і A, називається оберненою до A, якщо $A \cdot A^{-1} = 0$.

Б. Квадратна матриця A^{-1} того ж порядку, що і A, називається оберненою до A, якщо $A \cdot A^{-1} = A^{-1}A = E$, де E – одинична матриця того ж порядку.

В. Квадратна матриця A^{-1} того ж порядку, що і A, називається оберненою до A, якщо $A^{-1}A = A$.

Г. Квадратна матриця A^{-1} того ж порядку, що і A, називається оберненою до A, якщо $A \cdot A^{-1} = A$.

ТЗ 2.16. Для якої матриці A існує обернена матриця A^{-1}?

А. Матриця A повинна бути прямокутною розміру $m \times n$, причому кількість рядків m більша кількості стовпців n $(m > n)$.

Б. Матриця A повинна бути квадратною $(m = n)$ і особливою $(\det A = 0)$.

В. Матриця A повинна бути прямокутною розміру $m \times n$, причому кількість рядків m менша кількості стовпців n $(m < n)$.

Г. Для того, щоб матриця A мала обернену A^{-1} необхідно і достатньо, щоб матриця A була квадратною $(m = n)$ і неособливою $(\det A \neq 0)$.

ТЗ 2.17. Яка матриця S називається приєднаною до матриці A?

А. $\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & M_{nn} \end{pmatrix}$. Б. $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$.

В. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Г. $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$.

(Тут M_{ij} і A_{ij} – відповідно мінор і алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} матриці A).

ТЗ 2.18. Нехай матриця S є приєднаною до матриці A. За якою формулою обчислюється обернена матриця A^{-1} до матриці A?

А. $A^{-1} = \det A \cdot S^T$. Б. $A^{-1} = \det A \cdot S$.

В. $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot S^T$. Г. $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot S$.

ТЗ 2.19. Для якої матриці A оберненою є матриця

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}?$$

А. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Б. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

В. $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Г. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

ТЗ 2.20. Яка матриця є виродженою (особливою)?

А. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Б. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

В. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Г. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

ТЗ 2.21. Яка з матриць є виродженою (особливою)?

А. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$. Б. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. В. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Г. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

ТЗ 2.22. Яка з матриць є невиродженою (неособливою)?

А. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Б. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

В. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.   Г. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 10 \end{pmatrix}$.

ТЗ 2.23. Для якої матриці A приєднана матриця S має вигляд

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

А. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.   Б. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

В. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.   Г. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

ТЗ 2.24. Для якої матриці A приєднана матриця S має вигляд

$$S = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}?$$

А. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.   Б. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

В. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.   Г. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$.

ТЗ 2.25. Для якої матриці A обернена матриця має вигляд

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}?$$

А. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.   Б.. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

В. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.   Г. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ТЗ 2.26. При якій умові квадратна система лінійних рівнянь $AX = B$, де A – квадратна матриця, X – матриця-стовпець невідомих, B – матриця-стовпець вільних членів, має єдиний розв’язок і за якою формулою він обчислюється?

А. A – особлива матриця $(\det A = 0)$ і $X = A^{-1}B$.

Б. A – неособлива матриця $(\det A \neq 0)$ і $X = A^{-1}B$.

В. A – неособлива матриця $(\det A \neq 0)$ і $X = BA^{-1}$.

Г. A – неособлива матриця $(\det A \neq 0)$ і $X = ABA^{-1}$.

ТЗ 2.27. За якою формулою обчислюється розв’язок X матричного рівняння $AX = B$, де A – квадратна неособлива матриця $(\det A \neq 0)$?

А. $X = A^{-1}B$.   Б. $X = BA^{-1}$.

В. $X = A^{-1}BA$. Г. $X = ABA^{-1}$.

ТЗ 2.28. За якою формулою обчислюється розв'язок X матричного рівняння $XA = B$, де A – квадратна неособлива матриця $(\det A \neq 0)$?

А. $X = A^{-1}B$. Б. $X = BA^{-1}$.

В. $X = A^{-1}BA$. Г. $X = ABA^{-1}$.

ТЗ 2.29. За якою формулою обчислюється розв'язок X матричного рівняння $AXB = C$, де A і B – квадратні неособливі матриці?

А. $X = B^{-1}CA^{-1}$. Б. $X = A^{-1}CB^{-1}$.

В. $X = B^{-1}CA^{-1}$. Г. $X = A^{-1}B^{-1}C$.

ТЗ 2.30. Яке матричне рівняння має розв'язок $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$?

А. $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \end{pmatrix}$. Б. $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 1 \end{pmatrix}$.

В. $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \end{pmatrix}$. Г. $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -4 \end{pmatrix}$.

ТЗ 2.31. Яке матричне рівняння має розв'язок $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$?

А. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$. Б. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 25 \end{pmatrix}$.

В. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \end{pmatrix}$. Г. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 23 \end{pmatrix}$.

ТЗ 2.32. Яке матричне рівняння має розв'язок

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}?$$

А. $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Б. $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$.

В. $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 5 \end{pmatrix}$. Г. $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 11 \end{pmatrix}$.

ТЗ 2.33. Яке матричне рівняння має розв'язок $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

А. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Б. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

В. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Г. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

ТЗ 2.34. Яке матричне рівняння має розв'язок

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

А. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Б. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

В. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Г. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

ТЗ 2.35. Яке матричне рівняння має розв'язок

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}?$$

А. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Б. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

В. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Г. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Практичне заняття № 3,4. Вектори на площині та в просторі. Дії над векторами. Скалярний добуток векторів. Векторний добуток векторів. Мішаний добуток векторів

Означення. Скалярним добутком двох векторів називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi, \tag{2.10}$$

де $\varphi=(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Результатом скалярного добутку векторів є число (скаляр).

***Властивості скалярного добутку*:**

а) алгебраїчні властивості:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ – *комутативність,*

2) $\alpha\vec{a}\cdot\vec{b}=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b}),\ \vec{a}\cdot\beta\vec{b}=\beta(\vec{a}\cdot\vec{b}),\ \alpha\vec{a}\cdot\beta\vec{b}=\alpha\beta(\vec{a}\cdot\vec{b})$ – *асоціативна властивість відносно числового множника.*

3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ – *дистрибутивні закони множення відносно додавання.*

Приклад. $(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(4\vec{a}-3\vec{b})=12\vec{a}\cdot\vec{a}-9\vec{a}\cdot\vec{b}+8\vec{a}\cdot\vec{b}-6\vec{b}\cdot\vec{b}=12\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+6\vec{b}\cdot\vec{b}.$

б) геометричні властивості:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$ – скалярний добуток дорівнює нулеві тоді і тільки, коли вектори перпендикулярні.

2) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ – скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини.

3)
$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} \tag{2.11}$$

– модуль (довжина) вектора дорівнює кореню квадратному із його скалярного квадрата.

4)
$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \tag{2.12}$$

– косинус кута між двома векторами дорівнює скалярному добутку цих векторів, поділеному на добуток їх довжин.

Вираз скалярного добутку двох векторів через їх координати в ортонормованому базисі

Нехай в ортонормованому базисі $B=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають координати: $\vec{a}(x_1,y_1,z_1),\vec{b}(x_2,y_2,z_2)$. Тоді

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2 \tag{2.13}$$

– скалярний добуток двох векторів в ортонормованому базисі дорівнює сумі попарних добутків їх відповідних координат.

Довжина вектора

Нехай в ортонормованому базисі $B=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ вектор $\vec{a}=(x,y,z)$. За формулою (2.11) отримаємо:

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{2.14}$$

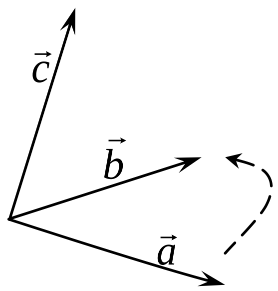
– довжина вектора дорівнює кореню квадратному із суми квадратів його координат.

Приклад. Нехай $\vec{a}(2,-2,1),\vec{b}(3,1,5)$. Знайти кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

За формулою (2.12):

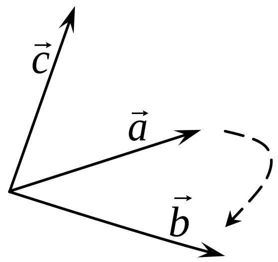
$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{2\cdot3+(-2)\cdot1+1\cdot5}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2+5^2}}=\frac{9}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{35}}=\frac{3}{\sqrt{35}}.$$

Кажуть, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють *праву трійку* (або репер ($\vec{a},\vec{b},\vec{c}$) – *додатно орієнтований*), якщо вони розміщені в просторі проти годинникової стрілки (мал.11).



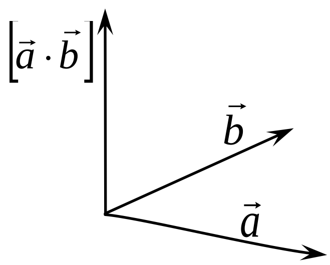
мал. 11

Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють *ліву трійку* (репер ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$) – *від'ємно орієнтований*), якщо вони розміщені в просторі за годинниковою стрілкою (мал.12).



мал. 12

<u>*Означення.*</u> *Векторним добутком двох векторів* називається вектор, довжина якого дорівнює добутку довжин цих векторів на синус кута між ними; цей вектор перпендикулярний до кожного з перемножуваних векторів і утворює з ними праву трійку (мал.13):



$$\left|\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]\right| = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\alpha \qquad (2.15)$$

мал. 13

Результатом векторного добутку векторів є вектор.

***Властивості векторного добутку*:**

а) алгебраїчні властивості:

1) $\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right] = -\left[\vec{b}\cdot\vec{a}\right]$ – *антикомутативність,*

2) $\left[\alpha\vec{a}\cdot\vec{b}\right] = \alpha\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]$, $\left[\vec{a}\cdot\beta\vec{b}\right] = \beta\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]$, $\left[\alpha\vec{a}\cdot\beta\vec{b}\right] = \alpha\beta\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]$ – *асоціативна властивість відносно числового множника.*

3) $\left[(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}\right]=\left[\vec{a}\cdot\vec{c}\right]+\left[\vec{b}\cdot\vec{c}\right]$, $\left[\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})\right]=\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]+\left[\vec{a}\cdot\vec{c}\right]$ – *дистрибутивні закони множення відносно додавання.*

б) геометричні властивості:

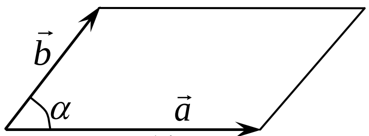
1) $\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]\perp\vec{a}, \left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]\perp\vec{b}$,

2) $\left(\vec{a},\vec{b},\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]\right)$ – права трійка,

3) $\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]=0\Leftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$ – векторний добуток дорівнює нулеві тоді і тільки, коли вектори колінеарні,

4) $$S_{пар\text{-}ма}=\left|\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]\right| \qquad (2.16)$$

– модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах (віднесених до спільного початку – мал. 14).



мал. 14

5) $$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]\right| \qquad (2.17)$$

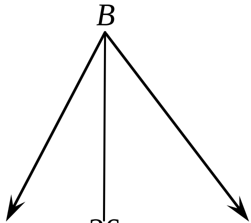
Вираз векторного добутку двох векторів через їх координати в ортонормованому базисі

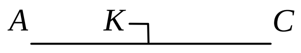
Нехай в ортонормованому базисі $B=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають координати: $\vec{a}(x_1,y_1,z_1),\vec{b}(x_2,y_2,z_2)$. Тоді

$$\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix} \qquad (2.18)$$

– векторний добуток двох векторів в ортонормованому базисі дорівнює детермінанту третього порядку, в першому рядку якого стоять базисні вектори $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, в другому рядку – координати першого множника, в третьому рядку – координати другого множника.

Приклад. Вершини трикутника ABC мають координати: $A(1,-1,2)$, $B(5,-6,2)$, $C(1,3,-1)$. Обчислити площу трикутника і довжину висоти, опущеної з вершини B на сторону AC (мал. 15).





мал. 15

Площу трикутника обчислюватимемо за формулою: $S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\right]\right|$. З іншого боку: $S_\Delta = \frac{1}{2}AC\cdot BK$. Звідси: $\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\right]\right| = \frac{1}{2}AC\cdot BK$. З останньої рівності отримаємо:

$BK = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\right]\right|}{AC}$. $\overrightarrow{BA} = (1-5,-1+6,2-2) = (-4,5,0)$, $\overrightarrow{BC} = (1-5,3+6,-1-2) = (-4,5,0)$.

$\left[\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 5 & 0 \\ -4 & 9 & -3 \end{vmatrix} = -15\vec{i} - 12\vec{j} - 16\vec{k}$, тобто $\left[\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\right] = (-15,-12,-16)$.

$\left|\left[\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\right]\right| = \sqrt{(-15)^2 + (-12)^2 + (-16)^2} = \sqrt{625} = 25,\ S_\Delta = \frac{1}{2}\cdot 25 = 12{,}5$ (кв. од.)

$\overrightarrow{AC} = (1-1,3+1,-1-2) = (0,4,-3)$, $AC = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{16+9} = 5$.

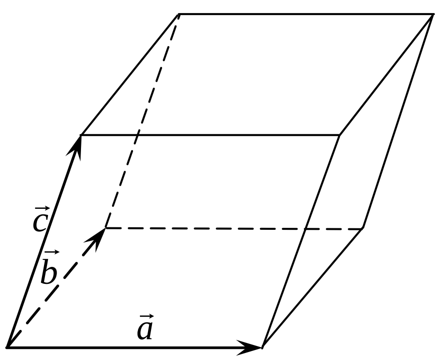
$BK = \frac{25}{5} = 5$ (од.)

<u>*Означення.*</u> *Мішаним добутком трьох векторів* називається число, яке дорівнює скалярному добутку векторного добутку перших двох векторів на третій:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = \left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]\cdot\vec{c}. \tag{2.19}$$

<u>Теорема</u> (*геометричний зміст мішаного добутку*)

Модуль мішаного добутку трьох векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах (віднесених до спільного початку – мал.16*). Мішаний добуток – додатне число, якщо вектори утворюють праву трійку; від'ємне число, якщо вектори утворюють ліву трійку і дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли всі вектори компланарні.*



мал. 16

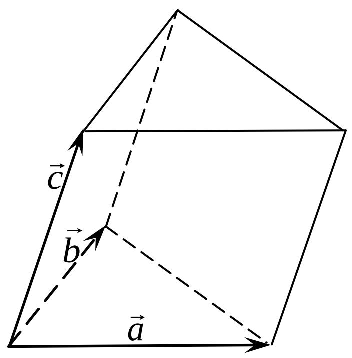
Тобто, мішаний добуток має такі *властивості*:

1) $$V_{пар\text{-}да} = \left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|, \tag{2.20}$$

2) $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} > 0$, коли $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ – права трійка, $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} < 0$, коли $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ – ліва трійка,

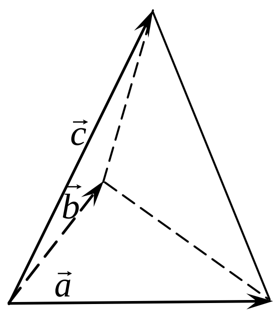
3) $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ тоді і лише тоді, коли вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарні.

За допомогою мішаного добутку трьох векторів можна також обчислювати об'єм трикутної призми та трикутної піраміди, побудованих на цих векторах (мал. 17, 18).



мал. 17

$$V_{тр.призми}=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right| \qquad (2.21)$$



мал. 18

$$V_{тр.пір.}=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right| \qquad (2.22)$$

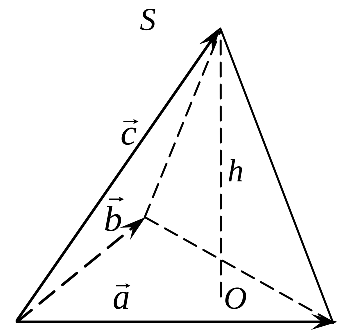
Вираз мішаного добутку трьох векторів через їх координати в ортонормованому базисі

Нехай в ортонормованому базисі $B=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ мають координати: $\vec{a}(x_1,y_1,z_1),\vec{b}(x_2,y_2,z_2),\vec{c}(x_3,y_3,z_3)$. Тоді

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \qquad (2.23)$$

– мішаний добуток трьох векторів дорівнює детермінанту третього порядку, в першому рядку якого стоять координати першого вектора, в другому – координати другого вектора, в третьому – координати третього вектора.

Приклад. Обчислити об'єм і висоту трикутної піраміди (мал.19), побудованої на векторах: $\vec{a}(1,-2,3),\vec{b}(2,1,-1),\vec{c}(3,-3,4)$.



мал. 19

Об'єм піраміди обчислюватимемо за формулою: $V_{тр.пір.}=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|$. З іншого боку: $V_{тр.пір.}=\frac{1}{3}S_{осн.}\cdot h$. Звідси: $\frac{1}{6}\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|=\frac{1}{3}S_{осн.}\cdot h$. З останньої рівності отримаємо: $h=\frac{\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|}{2\cdot S_{осн.}}$.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & -3 & 4\end{vmatrix}=4+6-18-9-3+16=-4,\ V_{тр.пір.}=\frac{1}{6}\cdot\left|-4\right|=\frac{2}{3}\ \text{(куб. од.)}$$

$$S_{осн.}=\frac{1}{2}\left|\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]\right|,\ \text{де}\ \left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=-1\vec{i}+7\vec{j}+5\vec{k}.\ \text{Тоді}\ \left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]=(-1,7,5),$$

$$S_{осн.}=\frac{1}{2}\sqrt{1+49+25}=\frac{1}{2}\sqrt{75}=\frac{5\sqrt{3}}{2}\ \text{(кв. од.)},\ h=\frac{4}{2\cdot\frac{5\sqrt{3}}{2}}=\frac{4}{5\sqrt{3}}\ \text{(од.)}$$

Тестові завдання до практичного заняття:

ТЗ 4.1. Що називається проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь $\vec{l}$?

А. Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь $\vec{l}$ називається число $пр_{\vec{l}}\overrightarrow{AB}$, яке дорівнює довжині відрізка A_lB_l між проекціями відповідно початку A і кінця B вектора на вісь $\vec{l}$.

Б. Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь $\vec{l}$ називається число $пр_{\vec{l}}\overrightarrow{AB}$, яке дорівнює довжині відрізка A_lB_l між проекціями відповідно початку A і кінця B вектора на вісь $\vec{l}$, причому довжина береться зі знаком "+", якщо вектор $\overrightarrow{A_lB_l}$ співнапрямлений з віссю $\vec{l}$ $\overrightarrow{A_lB_l}\uparrow\uparrow\vec{l}$, або довжина береться зі знаком "–", якщо вектор $\overrightarrow{A_lB_l}$ напрямлений протилежно осі $\vec{l}$ $\overrightarrow{A_lB_l}\uparrow\downarrow\vec{l}$.

В. Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь $\vec{l}$ називається число $пр_{\vec{l}}\overrightarrow{AB}$, яке дорівнює сумі довжин відрізків AA_l і BB_l , де A_l і B_l – проекції відповідно початку A і кінця B вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь $\vec{l}$.

Г. Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь $\vec{l}$ називається вектор $пр_{\vec{l}}\overrightarrow{AB}$, який дорівнює сумі векторів $\overrightarrow{AA_l}$ і $\overrightarrow{BB_l}$, де A_l і B_l – проекції відповідно початку A і кінця B вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь $\vec{l}$.

ТЗ 4.2. Чому дорівнює проекція суми $np_{\bar{l}}(\vec{a}+\vec{b})$?

А. $np_{\bar{l}}(\vec{a}+\vec{b}) = np_{\bar{l}}\vec{a} + np_{\bar{l}}\vec{b} - 2np_{\bar{l}}\vec{a}\cdot np_{\bar{l}}\vec{b}$. Б. $np_{\bar{l}}(\vec{a}+\vec{b}) = np_{\bar{l}}\vec{a}\cdot np_{\bar{l}}\vec{b}$.

В. $np_{\bar{l}}(\vec{a}+\vec{b}) = np_{\bar{l}}\vec{a} + np_{\bar{l}}\vec{b}$. Г. $np_{\bar{l}}(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{b}\cdot np_{\bar{l}}\vec{a} + \vec{a}\cdot np_{\bar{l}}\vec{b}$.

ТЗ 4.3. Проекція $np_{\vec{a}}\vec{b}$ вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$ дорівнює

А. $np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{a}|\sin(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$. Б. $np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{a}|\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$.

В. $np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$. Г. $np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\sin(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$.

ТЗ 4.4. Напрямні косинуси $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ вектора $\vec{a}$ зв'язані співвідношенням

А. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Б. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = |\vec{a}|^2$.

В. $\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma = 1$. Г. $|\cos\alpha| + |\cos\beta| + |\cos\gamma| = 1$.

ТЗ 4.5. В якому випадку $np_{\bar{l}}\vec{a} = 0$?

А. Вектор $\vec{a}$ паралельний до осі $\vec{l}$. Б. Вектор $\vec{a}$ утворює з віссю $\vec{l}$ кут 30°.

В. Вектор $\vec{a}$ утворює з віссю $\vec{l}$ кут 45°. Г. Вектор $\vec{a}$ перпендикулярний до осі $\vec{l}$.

ТЗ 4.6. Чому дорівнюють координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо відомі координати його початку $A(x_A, y_A, z_A)$ і кінця $B(x_B, y_B, z_B)$?

А. $\overrightarrow{AB} = (x_A + x_B; y_A + y_B; z_A + z_B)$. Б. $\overrightarrow{AB} = (x_A - x_B; y_A - y_B; z_A - z_B)$.

В. $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$. Г. $\overrightarrow{AB} = (x_A\cdot x_B; y_A\cdot y_B; z_A\cdot z_B)$.

ТЗ 4.7. Як обчислюється модуль (довжина) вектора

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\ ?$$

А. $|\vec{a}| = |a_x| + |a_y| + |a_z|$. Б. $|\vec{a}| = -\sqrt{a_x^2 + a_y^2 - a_z^2}$.

В. $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 - a_y^2 + a_z^2}$. Г. $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

ТЗ 4.8. Що називається добутком $\lambda\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на скаляр λ?

А. Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називається вектор $\lambda\vec{a}$, який має такі властивості: 1) $|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\cdot|\vec{a}|$; 2) якщо $\lambda = 0$, то $0\cdot\vec{a} = \vec{0}$; якщо $\lambda > 0$, то $\lambda\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{a}$; якщо $\lambda < 0$, то $\lambda\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$.

Б. Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називається вектор $\lambda\vec{a}$, який має такі властивості: 1) $|\lambda\vec{a}| = \lambda\cdot|\vec{a}|$; 2) якщо $\lambda = 0$, то $0\cdot\vec{a} = \vec{0}$; якщо $\lambda > 0$, то $\lambda\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{a}$; якщо $\lambda < 0$, то $\lambda\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$.

В. Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називається вектор $\lambda\vec{a}$, який має такі властивості: 1) $|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\cdot|\vec{a}|$; 2) якщо $\lambda = 0$, то $0\cdot\vec{a} = \vec{0}$; якщо $\lambda \neq 0$, то $\lambda\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$.

Г. Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називається вектор $\lambda\vec{a}$, який має такі властивості: 1) $|\lambda\vec{a}| = \lambda\cdot|\vec{a}|$; 2) якщо $\lambda = 0$, то $0\cdot\vec{a} = \vec{0}$; якщо $\lambda \neq 0$, то $\lambda\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$.

ТЗ 4.9. Довжина якого з векторів дорівнює $|\vec{a}| = 5$?

А. $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$. Б. $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\sqrt{3}\vec{k}$.

В. $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\sqrt{3}\vec{k}$. Г. $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

ТЗ 4.10. Що називається скалярним добутком $\vec{a}\cdot\vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$?

А. Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ i $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$.

Б. Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ i $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$.

В. Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ i $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$.

Г. Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ i $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\vec{b}\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$.

ТЗ 4.11. Чому дорівнює скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}$ векторів

$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ і $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$?

А. $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x-a_yb_y-a_zb_z$. Б. $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x-a_yb_y+a_zb_z$.

В. $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_y+a_yb_z+a_zb_x$. Г. $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

ТЗ 4.12. Чому дорівнює косинус кута $\varphi=\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}$ між двома векторами $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ і $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$?

А. $\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}+\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$.

Б. $\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}-\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$.

В. $\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})=\dfrac{a_xb_x-a_yb_y-a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}+\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$.

Г. $\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$.

ТЗ 4.13. Для того, щоб ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ були ортогональними (перпендикулярними) $\vec{a}\perp\vec{b}$, необхідно і достатньо, щоб

А. $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$. Б. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. В. $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$. Г. $\vec{a}\cdot\vec{b}\neq 0$.

ТЗ 4.14. Для того, щоб ненульові вектори $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ і $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ були колінеарними (паралельними) $\vec{a}\,\|\,\vec{b}$, необхідно і достатньо, щоб

А. $a_xb_y+a_yb_z+a_zb_x=0$. Б. $a_xb_x-a_yb_y+a_zb_z\neq 0$.

В. $\dfrac{a_x}{b_x}\neq\dfrac{a_y}{b_y}\neq\dfrac{a_z}{b_z}$. Г. $\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

ТЗ 4.15. Які два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ортогональні (перпендикулярні)?

А. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\\ \vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}\end{cases}$. Б. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\\ \vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}\end{cases}$.

В. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\\ \vec{b}=3\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}\end{cases}$. Г. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\\ \vec{b}=3\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}\end{cases}$.

ТЗ 4.16. Які два вектори утворюють між собою гострий кут $(\cos\varphi>0)$?

А. $\begin{cases}\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}\\ \vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}\end{cases}$. Б. $\begin{cases}\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}\\ \vec{b}=\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}\end{cases}$.

В. $\begin{cases}\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}\\ \vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\end{cases}$. Г. $\begin{cases}\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}\\ \vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\end{cases}$.

ТЗ 4.17. Які два вектори утворюють між собою тупий кут $(\cos\varphi<0)$?

А. $\begin{cases}\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\\ \vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}+5\vec{k}\end{cases}$. Б. $\begin{cases}\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\\ \vec{b}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}\end{cases}$.

В. $\begin{cases}\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\\ \vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}\end{cases}$. Г. $\begin{cases}\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\\ \vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}\end{cases}$.

ТЗ 4.18. Для яких двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ кут φ між ними дорівнює $\varphi=\pi/3$ $\left(\cos\varphi=\cos(\pi/3)=1/2\right)$?

А. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}+\sqrt{3}\vec{k}\\ \vec{b}=\sqrt{2}\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j}\end{cases}$. Б. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{j}-\sqrt{3}\vec{k}\\ \vec{b}=\sqrt{6}\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j}\end{cases}$.

В. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}-\sqrt{3}\vec{k}\\ \vec{b}=2\vec{j}+\sqrt{3}\vec{k}\end{cases}$. Г. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{j}+\sqrt{3}\vec{k}\\ \vec{b}=\sqrt{6}\vec{i}+\sqrt{3}\vec{k}\end{cases}$.

ТЗ 4.19. Які два вектори колінеарні (паралельні)?

А. $\begin{cases}\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}\\ \vec{b}=4\vec{i}+6\vec{j}+8\vec{k}\end{cases}$. Б. $\begin{cases}\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}\\ \vec{b}=4\vec{i}-6\vec{j}-8\vec{k}\end{cases}$.

В. $\begin{cases}\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}\\ \vec{b}=-4\vec{i}+6\vec{j}-8\vec{k}\end{cases}$. Г. $\begin{cases}\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}\\ \vec{b}=4\vec{i}-6\vec{j}-8\vec{k}\end{cases}$.

ТЗ 4.20. Який з векторів утворює з віссю *Ox* напрямний кут $\alpha=60^\circ$ $\left(\cos\alpha=a_x/|\vec{a}|,\quad \cos 60^\circ=1/2\right)$?

А. $\vec{a}=\vec{i}+\sqrt{2}\vec{j}+4\vec{k}$. Б. $\vec{a}=\sqrt{2}\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j}+\sqrt{3}\vec{k}$.

В. $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+\sqrt{2}\vec{k}$. Г. $\vec{a}=\vec{i}+2\sqrt{2}\vec{j}+\sqrt{3}\vec{k}$.

ТЗ 4.21. Який з векторів утворює з віссю *Oy* напрямний кут $\beta=45^\circ$ $\left(\cos\beta=a_y/|\vec{a}|,\quad \cos 45^\circ=\sqrt{2}/2\right)$?

А. $\vec{a}=\sqrt{2}\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$. Б. $\vec{a}=\vec{i}+\sqrt{2}\vec{j}+\vec{k}$.

В. $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+\sqrt{2}\vec{k}$. Г. $\vec{a}=-\vec{i}+\vec{j}+\sqrt{2}\vec{k}$.

ТЗ 4.22. Який з векторів утворює з віссю *Oz* напрямний кут $\gamma=30^\circ$ $\left(\cos\gamma=a_z/|\vec{a}|,\quad \cos 30^\circ=\sqrt{3}/2\right)$?

А. $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+\sqrt{3}\vec{k}$. Б. $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+\sqrt{3}\vec{k}$.

В. $\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}+\sqrt{3}\vec{k}$. Г. $\vec{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}+\sqrt{2}\vec{k}$.

ТЗ 4.23. Що називається векторним добутком $\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]$ вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$?

А. Векторним добутком $\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]$ називається вектор $\vec{c}$, який задовольняє умовам: 1)

$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \sin(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b})$; 2) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \parallel \vec{b}$; 3) якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ відкласти від однієї точки, то з кінця вектора $\vec{c}$ найкоротший поворот вектора $\vec{a}$ до суміщення з век-тором $\vec{b}$ видно здійснюваним проти ходу годинникової стрілки.

Б. Векторним добутком $\left[\vec{a} \cdot \vec{b}\right]$ називається вектор $\vec{c}$, який задовольняє умовам: 1) $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \cos(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b})$; 2) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$; 3) якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ відкласти від однієї точки, то з кінця вектора $\vec{c}$ найкоротший поворот вектора $\vec{a}$ до суміщення з век-тором $\vec{b}$ видно здійснюваним проти ходу годинникової стрілки.

В. Векторним добутком $\left[\vec{a} \cdot \vec{b}\right]$ називається вектор $\vec{c}$, який задовольняє умовам: 1) $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \sin(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b})$; 2) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$; 3) якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ відкласти від однієї точки, то з кінця вектора $\vec{c}$ найкоротший поворот вектора $\vec{a}$ до суміщення з вектором $\vec{b}$ видно здійснюваним проти ходу годинникової стрілки.

Г. Векторним добутком $\left[\vec{a} \cdot \vec{b}\right]$ називається вектор $\vec{c}$, який задовольняє умовам: 1) $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \sin(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b})$; 2) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$; 3) якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ відкласти від однієї точки, то з кінця вектора $\vec{c}$ найкоротший поворот вектора $\vec{a}$ до суміщення з вектором $\vec{b}$ видно здійснюваним за ходом годинникової стрілки.

ТЗ 4.24. Векторний добуток $\left[\vec{a} \cdot \vec{b}\right]$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює нулю, якщо

А. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні $(\vec{a} \perp \vec{b})$.

Б. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

В. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють між собою кут $\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b} = \pi/4$.

Г. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють між собою кут $\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b} = \pi/6$.

ТЗ 4.25. Чому дорівнює векторний добуток $\left[\vec{a} \cdot \vec{b}\right]$ векторів

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \quad \text{і} \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\ ?$$

А. $\left[\vec{a} \cdot \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$. Б. $\left[\vec{a} \cdot \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$.

В. $\left[\vec{a} \cdot \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & -a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$. Г. $\left[\vec{a} \cdot \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & b_x & a_x \\ \vec{j} & b_y & a_y \\ \vec{k} & b_z & a_z \end{vmatrix}$.

ТЗ 4.26. Модуль (довжина) векторного добутку $\left[\vec{a} \cdot \vec{b}\right]$ дорівнює

А. $\left\|\left[\vec{a} \cdot \vec{b}\right]\right\| = |\vec{a}\,||\,\vec{b}\,| \sin(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b})$. Б. $\left\|\left[\vec{a} \cdot \vec{b}\right]\right\| = \dfrac{|\vec{a}\,|}{|\vec{b}\,|} \sin(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b})$.

В. $\left\|\left[\vec{a} \cdot \vec{b}\right]\right\| = |\vec{a}\,||\,\vec{b}\,| \cos(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b})$. Г. $\left\|\left[\vec{a} \cdot \vec{b}\right]\right\| = \dfrac{|\vec{b}\,|}{|\vec{a}\,|} \sin(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b})$.

ТЗ 4.27. Як розташований векторний добуток $\left[\vec{a} \cdot \vec{b}\right] = \vec{c}$ по відношенню до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$?

А. $\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]=\vec{c}\perp\vec{a}$; $\vec{c}\parallel\vec{b}$.

Б. $\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]=\vec{c}\parallel\vec{a}$; $\vec{c}\parallel\vec{b}$.

В. $\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]=\vec{c}\parallel\vec{a}$; $\vec{c}\perp\vec{b}$.

Г. $\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]=\vec{c}\perp\vec{a}$; $\vec{c}\perp\vec{b}$.

ТЗ 4.28. Для якої пари векторів площа паралелограма, побудованого на них, як на сторонах, дорівнює $S=\sqrt{26}$ кв.од.?

А. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\\ \vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}\end{cases}$.

Б. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\\ \vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}\end{cases}$.

В. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\\ \vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}\end{cases}$.

Г. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\\ \vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}\end{cases}$.

ТЗ 4.29. Для якої пари векторів векторний добуток $\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]$ колінеарний (паралельний) до вектора $\vec{c}=8\vec{i}-2\vec{j}-6\vec{k}$?

А. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\\ \vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}\end{cases}$.

Б. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}\\ \vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}\end{cases}$.

В. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\\ \vec{b}=2\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}\end{cases}$.

Г. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\\ \vec{b}=-2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}\end{cases}$.

ТЗ 4.30. Для якої пари векторів їх векторний добуток $\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]$ дорівнює нулю?

А. $\begin{cases}\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}\\ \vec{b}=4\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}\end{cases}$.

Б. $\begin{cases}\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}\\ \vec{b}=4\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}\end{cases}$.

В. $\begin{cases}\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}\\ \vec{b}=3\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}\end{cases}$.

Г. $\begin{cases}\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\\ \vec{b}=6\vec{i}+3\vec{j}-3\vec{k}\end{cases}$.

ТЗ 4.31. Для якої пари векторів їх векторний добуток $\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]$ ортогональний (перпендикулярний) до вектора $\vec{c}=2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$?

А. $\begin{cases}\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}\\ \vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\end{cases}$.

Б. $\begin{cases}\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\\ \vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}\end{cases}$.

В. $\begin{cases}\vec{a}=3\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\\ \vec{b}=4\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}\end{cases}$.

Г. $\begin{cases}\vec{a}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}\\ \vec{b}=4\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}\end{cases}$.

ТЗ 4.32. Чому дорівнює мішаний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ трьох векторів $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ і $\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$?

А. $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$.

Б. $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ c_x & c_y & c_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$.

В. $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$.

Г. $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$.

ТЗ 4.33. В якому випадку мішаний добуток трьох векторів $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ дорівнює нулю?

А. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ взаємно перпендикулярні.

Б. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лінійно незалежні.

В. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – компланарні (розташовані в одній площині або в паралельних площинах).

Г. Вектор $\vec{a}+\vec{b}$ перпендикулярний до вектора $\vec{c}$.

ТЗ 4.34. Для якої трійки векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ їх мішаний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ дорівнює нулю?

А. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}\\ \vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}\\ \vec{c}=3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}\end{cases}$. Б. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\\ \vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}\\ \vec{c}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}\end{cases}$.

В. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\\ \vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}+3\vec{k}\\ \vec{c}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}\end{cases}$. Г. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\\ \vec{b}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}\\ \vec{c}=2\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}\end{cases}$.

ТЗ 4.35. Яка трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ є правою?

А. $\begin{cases}\vec{a}=3\vec{i}\\ \vec{b}=2\vec{i}-5\vec{j}\\ \vec{c}=\vec{i}+\vec{j}-6\vec{k}\end{cases}$. Б. $\begin{cases}\vec{a}=3\vec{i}\\ \vec{b}=2\vec{i}+5\vec{j}\\ \vec{c}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}\end{cases}$.

В. $\begin{cases}\vec{a}=3\vec{i}\\ \vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}\\ \vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+5\vec{k}\end{cases}$. Г. $\begin{cases}\vec{a}=-2\vec{i}\\ \vec{b}=2\vec{i}-5\vec{j}\\ \vec{c}=\vec{j}+\vec{i}-4\vec{k}\end{cases}$.

ТЗ 4.36. Яка трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ є лівою?

А. $\begin{cases}\vec{a}=3\vec{i}\\ \vec{b}=2\vec{i}-5\vec{j}\\ \vec{c}=\vec{i}+\vec{j}-6\vec{k}\end{cases}$. Б. $\begin{cases}\vec{a}=3\vec{i}\\ \vec{b}=2\vec{i}-5\vec{j}\\ \vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}\end{cases}$.

В. $\begin{cases}\vec{a}=3\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\\ \vec{b}=\vec{j}+2\vec{k}\\ \vec{c}=5\vec{k}\end{cases}$. Г. $\begin{cases}\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\\ \vec{b}=-\vec{j}+\vec{k}\\ \vec{c}=-5\vec{k}\end{cases}$.

ТЗ 4.37. Яка трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ є ребрами паралелепіпеда, об’єм якого дорівнює $V=2$ куб.од.?

А. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}+\vec{k}\\ \vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}\\ \vec{c}=\vec{j}+\vec{k}\end{cases}$. Б. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}-\vec{k}\\ \vec{b}=\vec{j}+\vec{k}\\ \vec{c}=\vec{i}+\vec{k}\end{cases}$.

В. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}+\vec{k}\\ \vec{b}=2\vec{j}-\vec{k}\\ \vec{c}=\vec{i}-2\vec{k}\end{cases}$. Г. $\begin{cases}\vec{a}=3\vec{i}+\vec{k}\\ \vec{b}=\vec{j}-\vec{k}\\ \vec{c}=\vec{i}+\vec{j}\end{cases}$.

ТЗ 4.38. Які три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис у тривимірному просторі?

А. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють у просторі базис, якщо вони лінійно залежні.

Б. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють у просторі базис, якщо їх мішаний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=0$.

В. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють у просторі базис, якщо $\vec{a}\parallel\vec{b}\parallel\vec{c}$.

Г. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють у просторі базис, якщо вони лінійно незалежні.

ТЗ 4.39. Яка трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лінійно незалежна?

А. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}\\ \vec{b}=2\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}\\ \vec{c}=3\vec{i}-3\vec{j}+3\vec{k}\end{cases}$. Б. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\\ \vec{b}=5\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}\\ \vec{c}=4\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}\end{cases}$.

В. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\\ \vec{b}=2\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}\\ \vec{c}=4\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}\end{cases}$. Г. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}\\ \vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}\\ \vec{c}=4\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}\end{cases}$.

ТЗ 4.40. Яка трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лінійно залежна?

А. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}\\ \vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}\\ \vec{c}=2\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}\end{cases}$. Б. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\\ \vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}\\ \vec{c}=3\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}\end{cases}$.

В. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\\ \vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}\\ \vec{c}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}\end{cases}$. Г. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\\ \vec{b}=6\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}\\ \vec{c}=5\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}\end{cases}$.

ТЗ 4.41. Яка трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворює базис у просторі?

А. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}+\vec{k}\\ \vec{b}=\vec{j}+\vec{k}\\ \vec{c}=\vec{i}-\vec{k}\end{cases}$. Б. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}+2\vec{k}\\ \vec{b}=\vec{j}+\vec{k}\\ \vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}\end{cases}$.

В. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{j}+2\vec{k}\\ \vec{b}=\vec{i}-2\vec{k}\\ \vec{c}=\vec{i}+\vec{j}\end{cases}$. Г. $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}+\vec{k}\\ \vec{b}=\vec{j}-\vec{k}\\ \vec{c}=\vec{i}+\vec{j}\end{cases}$.

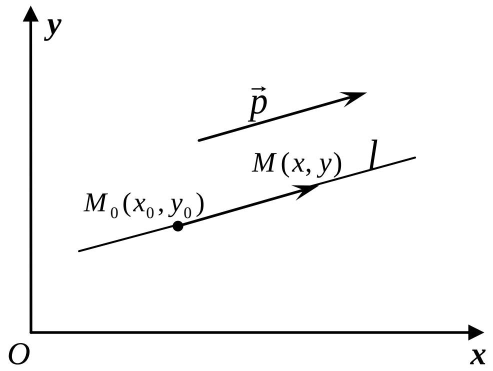
Практичне заняття № 5. Різні способи задання прямої

1. Канонічне рівняння прямої.

<u>*Означення.*</u> *Напрямним вектором прямої* l називається такий ненульовий вектор $\vec{p}$, який паралельний до цієї прямої.

Нехай пряма l задана точкою $M_0(x_0, y_0)$ і напрямним вектором $\vec{p}(l,m)$. Написати рівняння цієї прямої.

Візьмемо довільну точку $M(x,y)\in l$ (мал. 31)



мал. 31

Для будь-якого положення точки M на прямій l: $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p}$, де $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$, $\vec{p}(l, m)$. З умови колінеарності двох векторів (2.8) отримаємо:

$$l: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \tag{3.1}$$

– *канонічне рівняння прямої*.

Приклад. Скласти рівняння прямої l, що проходить через точку $A(5,-3)$ з напрямним вектором $\vec{p}(4,5)$.

Скористаємось рівнянням (3.1)

$$l: \quad \frac{x-5}{4} = \frac{y+3}{5}.$$

2. Параметричні рівняння прямої.

Нехай дано такі ж початкові умови, що й у попередньому пункті. Тоді отримаємо рівняння (3.1). Введемо в це рівняння параметр t:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = t.$$

З останніх рівностей отримаємо систему: $\begin{cases} x - x_0 = lt, \\ y - y_0 = mt, \end{cases}$

яку запишемо у вигляді:

$$l: \begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt \end{cases} \tag{3.2}$$

– *параметричні рівняння прямої*.

Геометричний зміст параметра t

Для будь-якого положення точки M на прямій знайдеться таке дійсне число t, що координати цієї точки виражаються формулами (3.2). І навпаки:

Для довільного дійсного числа t пара чисел, знайдених за формулами (3.2) є координатами точки, яка належить прямій.

Приклад. Скласти параметричні рівняння прямої l, що проходить через точку $A(2,-1)$ з напрямним вектором $\vec{p}(-3,2)$.

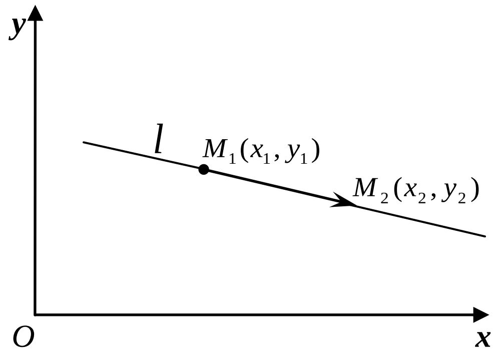
Параметричні рівняння прямої згідно із системою (3.2) матимуть вигляд:

$$\begin{cases} x = -3t + 2, \\ y = 2t - 1. \end{cases}$$

3. Пряма, задана двома точками.

Нехай пряма l задана двома точками: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$. Написати рівняння цієї прямої.

Виберемо за початкову точку M_1, за напрямний вектор візьмемо $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ (мал. 32).



мал. 32

Використавши канонічне рівняння прямої (3.1), отримаємо:

$$l: \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{3.3}$$

– *рівняння прямої через дві точки*.

Приклад. Написати рівняння прямої l, що проходить через точки $A(-3,5)$, $B(2,4)$.

З рівняння (3.3) отримаємо:

$$\frac{x+3}{2+3} = \frac{y-5}{4-5}, \qquad \text{або} \qquad l: \ \frac{x+3}{5} = \frac{y-5}{-1}.$$

4. Загальне рівняння прямої.

Канонічне рівняння (3.1) можна записати у вигляді:

$$mx - ly - mx_0 + ly_0 = 0.$$

Бачимо, що пряма задається лінійним рівнянням відносно змінних x, y. Виникає запитання: що задає будь-яке лінійне рівняння на площині?

Теорема

Рівняння $$Ax + By + C = 0, \tag{3.4}$$

де A і B одночасно не рівні нулю, задає пряму з напрямним вектором $\vec{p}(-B, A)$.

Доведення. Рівняння (3.4) на площині задає деяку лінію. Скориставшись коефіцієнтами цього рівняння, виберемо на площині точку $M_0(-\frac{C}{A},0)$ (при умові, що $A \neq 0$).

Напишемо рівняння прямої l, що проходить через точку M_0 з напрямним вектором $\vec{p}(-B, A)$. Використаємо рівняння (3.1):

$$\frac{x+\frac{C}{A}}{-B}=\frac{y-0}{A},$$

з якого отримаємо:

$$l: Ax+By+C=0.$$

Отже, рівняння (3.4) задає пряму.

Теорему доведено

Рівняння (3.4) називається *загальним рівнянням прямої*.

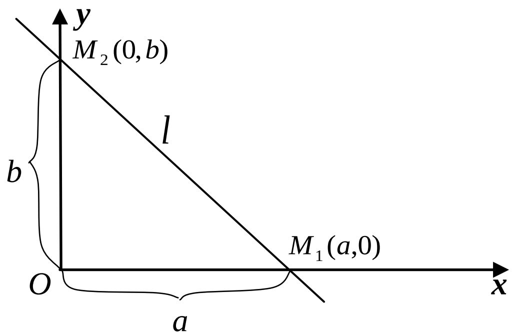
Приклад. Написати загальне рівняння прямої l, що проходить через точки $A(4,-1)$, $B(5,-3)$.

За формулою (3.3) отримаємо:

$$\frac{x-4}{1}=\frac{y+1}{-2}, \qquad \text{або} \qquad l: \quad 2x+y-7=0.$$

5. Пряма у «відрізках» на осях.

Нехай пряма l, яка не проходить через початок координат, відтинає на осі *Ox* відрізок *a*, на осі *Oy* – відрізок *b* (мал. 33). Написати рівняння цієї прямої.



мал. 33

Шукатимемо рівняння прямої l у вигляді (3.4):

$$l: \ Ax+By+C=0$$

$M_1(a,0)\in l \Rightarrow A\cdot a+B\cdot 0+C=0$. Звідси: $A=-\frac{C}{a}$.

$M_2(0,b)\in l \Rightarrow A\cdot 0+B\cdot b+C=0$. Звідси: $B=-\frac{C}{b}$.

Підставимо ці значення *A* і *B* в рівняння (3.4):

$$-\frac{C}{a}x-\frac{C}{b}y+C=0.$$

Оскільки пряма не проходить через початок координат, то $C\neq 0$. Тому останнє рівняння можна поділити на *C*:

$$-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}+1=0.$$

З цього рівняння отримаємо:

$$l:\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (3.5)$$

– *рівняння прямої у «відрізках» на осях*.

<u>Приклад.</u> Побудувати пряму l, що проходить через точку $A(6{,}1)$ з напрямним вектором $\vec{p}(-3{,}5)$.

З канонічного рівняння прямої дістанемо:

$$\frac{x-6}{-3}=\frac{y-1}{5}, \qquad \text{або} \qquad 5x+3y=33.$$

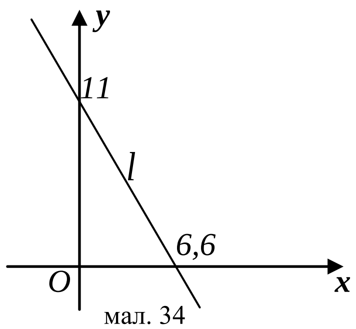
Поділимо обидві частини рівняння на 33:

$$\frac{5x}{33}+\frac{3y}{33}=1.$$

Остаточно одержимо:

$$l:\ \frac{x}{33/5}+\frac{y}{11}=1.$$

Останнє рівняння є рівнянням прямої у «відрізках» на осях. Тому шукана пряма відсікає на осі *Ox* відрізок $\frac{33}{5}=6{,}6$, а на осі *Oy* відрізок 11 (мал. 34).



мал. 34

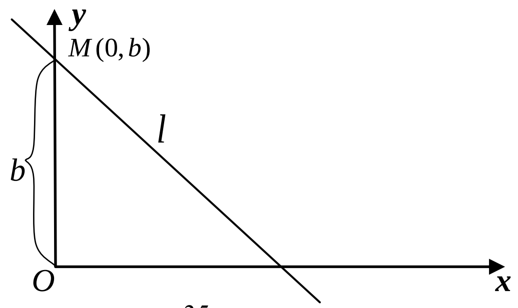
6. Пряма з кутовим коефіцієнтом.

Нехай задано напрямний вектор $\vec{p}(l,m)$ прямої l.

<u>*Означення.*</u> *Кутовим коефіцієнтом прямої* називається відношення ординати до абсциси її напрямного вектора:

$$k=\frac{m}{l}.$$

Написати рівняння прямої l, яка відтинає на осі Oy відрізок b і має кутовий коефіцієнт k (мал. 35).



мал. 35

Запишемо координати напрямного вектора прямої у вигляді:

$$\vec{p} = (l, m) = l(1, \frac{m}{l}) = l(1, k).$$

Оскільки $l(1, k) \parallel (1, k)$, то напрямним до прямої буде також вектор $\vec{p}_1(1, k)$. Використаємо канонічне рівняння прямої (3.1):

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-b}{k}.$$

Звідки отримаємо:

$$l: \ y = kx + b \tag{3.6}$$

– *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*.

7. Пряма, задана точкою і кутовим коефіцієнтом.

Написати рівняння прямої l, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і має кутовий коефіцієнт k.

Шукатимемо рівняння прямої l у вигляді (3.6):

$$y = kx + b,$$

$$M_0(x_0, y_0) \in l \Rightarrow y_0 = kx_0 + b.$$

Віднімемо від рівняння (3.6) попереднє рівняння. Дістанемо:

$$l: \ y - y_0 = k(x - x_0) \tag{3.7}$$

– *рівняння прямої, заданої точкою і кутовим коефіцієнтом*.

Приклад. Скласти рівняння прямої l, яка має кутовий коефіцієнт $k = 3$ і проходить через точку $A(3, -1)$.

З рівняння (3.7) дістанемо:

$$y + 1 = 3(x - 3), \quad \text{або} \quad l: \ y = 3x - 10.$$

8. Пряма, задана точкою і нормованим вектором.

Означення. Нормованим вектором прямої l називається такий ненульовий вектор $\vec{n}$, який перпендикулярний до цієї прямої.

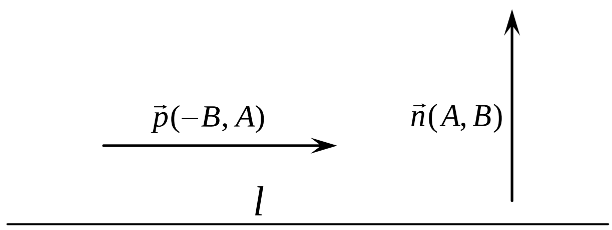
Теорема

Коефіцієнти A і B в загальному рівнянні прямої $l:\ Ax+By+C=0$ *є координатами нормованого вектора цієї прямої, тобто* $\vec{n}=(A,B)$.

Доведення. Напрямний вектор прямої l має координати: $\vec{p}(-B,A)$. Знайдемо скалярний добуток: $\vec{n}\cdot\vec{p}=A\cdot(-B)+B\cdot A=0$. Звідси, за властивостями скалярного добутку $\vec{n}\perp\vec{p}$, а тому $\vec{n}\perp l$. Отже, $\vec{n}=(A,B)$ – нормований вектор прямої l.

Теорему доведено

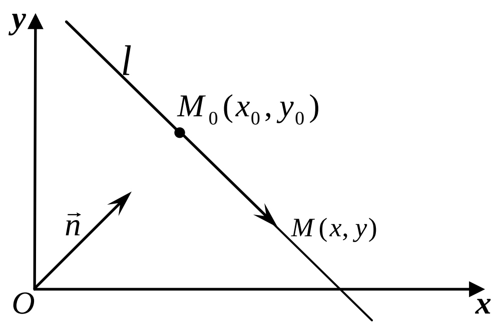
З попередньої теореми отримаємо, що із загального рівняння прямої можна дістати координати її напрямного і нормованого векторів (мал. 36).



мал. 36

Нехай пряма задана точкою $M_0(x_0,y_0)$ і нормованим вектором $\vec{n}(\alpha,\beta)$. Написати рівняння цієї прямої.

Візьмемо довільну точку $M(x,y)\in l$ (мал. 37).



мал. 37

Для будь-якого положення точки M на прямій l: $\overrightarrow{M_0M}\perp\vec{n}$, де $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0)$, $\vec{n}(\alpha,\beta)$. Тоді $\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0$. Звідси:

$$l:\ \alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)=0 \tag{3.8}$$

– рівняння прямої, заданої точкою і нормованим вектором.

Приклад. Скласти рівняння прямої l_1, яка проходить через точку $A(4,1)$ перпендикулярно до прямої $l:\ 2x-5y+6=0$.

Напрямний вектор прямої l має координати: $\vec{p}=(-B,A)=(5,2)$. Але оскільки $l \perp l_1$, то напрямний вектор прямої l є нормальним вектором прямої l_1, тобто: $\vec{p}=\vec{n}_1=(5,2)$.

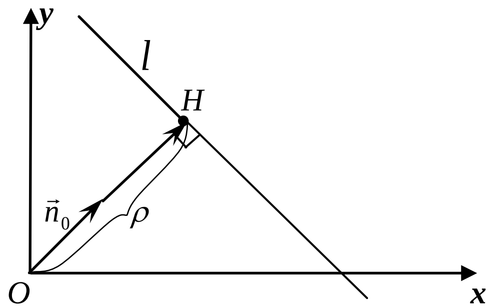
Скориставшись рівнянням (3.8), отримаємо:

$5(x-4)+2(y-1)=0$ або $l:\ 5x+2y-22=0$.

9. Нормальне рівняння прямої.

Написати рівняння прямої l, заданої одиничним нормальним вектором $\vec{n}_0(\cos\varphi,\sin\varphi)$ і віддаллю ρ від початку координат до прямої.

Нехай H – основа перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму(мал. 38).



мал. 38

Оскільки $\vec{n}_0$ – одиничний нормований вектор, то $\overrightarrow{OH}=\rho\vec{n}_0=(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$. $\overrightarrow{OH}$ – радіус-вектор точки H. Тому $H(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$. Підставимо координати вектора $\vec{n}_0$ і точки H в рівняння (3.8):

$\cos\varphi(x-\rho\cos\varphi)+\sin\varphi(y-\rho\sin\varphi)=0$, або $x\cos\varphi+y\sin\varphi-\rho(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=0$.

Оскільки $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$, то отримаємо рівняння:

$$l:\ x\cos\varphi+y\sin\varphi-\rho=0 \qquad (3.9)$$

– нормальне рівняння прямої.

Нехай прямі l_1 і l_2 задані рівняннями:

$l_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0$,

$l_2:\ A_2x+B_2y+C_2=0$.

<u>Теорема</u> (*умова паралельності двох прямих*)

Для того, щоб прямі l_1 і l_2 були паралельними, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}, \qquad (3.10)$$

тобто, щоб були пропорційними коефіцієнти при однакових змінних.

<u>Доведення.</u> Напрямний вектор прямої l_1 має координати $\vec{p}_1(-B_1, A_1)$, прямої l_2 — $\vec{p}_2(-B_2, A_2)$. Оскільки $l_1 \parallel l_2$, то їх напрямні вектори також паралельні. З умови колінеарності двох векторів (2.8) отримаємо рівність:

$$\frac{-B_1}{-B_2} = \frac{A_1}{A_2},$$

з якої дістанемо умову (3.10).

<u>Теорему доведено</u>

<u>Теорема</u> (*умова співпадання двох прямих*)

Для того, щоб прямі l_1 і l_2 співпадали, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \qquad (3.11)$$

тобто, щоб були пропорційними відповідні коефіцієнти цих прямих.

<u>Теорема</u> (*умова перетину двох прямих*)

Якщо прямі не паралельні і не співпадають, то вони перетинаються в одній точці. Для того, щоб прямі l_1 і l_2 перетинались, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}. \qquad (3.12)$$

<u>Приклад.</u> Скласти рівняння прямої l_1, яка проходить через точку $A(-2{,}5)$ паралельно до прямої l: $4x - y + 3 = 0$.

Шукатимемо рівняння прямої l_1 у вигляді:

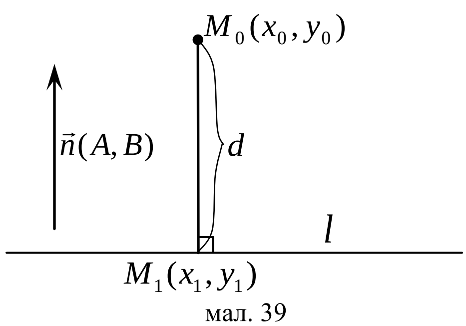
$$4x - y + C = 0.$$

Оскільки $A \in l_1$, то $4 \cdot (-2) - 5 + C = 0$. Звідки: $C = 13$. Отже,

$$l_1:\ 4x - y + 13 = 0.$$

<u>Означення.</u> Під *віддаллю від точки до прямої* розуміють віддаль від цієї точки до її ортогональної проекції на цю пряму.

Нехай задано пряму l: $Ax + By + C = 0$. Знайти віддаль від точки $M_0(x_0, y_0)$ до цієї прямої (мал. 39): $d = \rho(M_0, l) = M_0 M_1$.



мал. 39

Для знаходження числа d використаємо скалярний добуток векторів $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_0M_1}$ за означенням та через координати:

1. *За означенням*:

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M_1}=|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right|\cdot\cos\varphi=\sqrt{A^2+B^2}\cdot d\cdot(\pm 1).$$

2. *Через координати*:

Оскільки $\overrightarrow{M_0M_1}(x_1-x_0,y_1-y_0)$, $\vec{n}(A,B)$, то

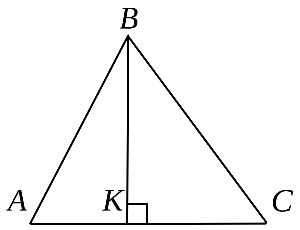
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M_1}=A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)=Ax_1+By_1-Ax_0-By_0=-C-Ax_0-By_0=-(Ax_0+By_0+C).$$

Звідки: $\sqrt{A^2+B^2}\cdot d\cdot(\pm 1)=-(Ax_0+By_0+C)$.

Отримаємо формулу:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (3.13)$$

Приклад. Знайти висоту трикутника ABC, опущеної з вершини B на сторону AC, якщо $A(1,3), B(3,9), C(5,7)$ (мал. 40).



мал. 40

$h=BK=\rho(B,AC)$

Складемо рівняння прямої AC: $\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{4}$. Або AC: $x-y+2=0$

За формулою (3.13) отримаємо: $BK=\frac{|3-9+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ (од.)

Кут між прямими на площині

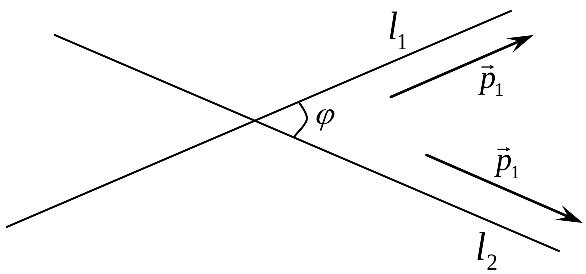
1. Прямі l_1 і l_2 задані загальними рівняннями:

$$l_1:\quad A_1x+B_1y+C_1=0,$$

$$l_2:\quad A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Знайти кут між цими прямими.

Напрямний вектор прямої l_1 має координати $\vec{p}_1(-B_1,A_1)$, прямої l_2 — $\vec{p}_2(-B_2,A_2)$ (мал. 41).



мал. 41

$$\cos\varphi = \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{|\vec{p}_1| \cdot |\vec{p}_2|} = \frac{(-B_1)\cdot(-B_2) + A_1 \cdot A_2}{\sqrt{(-B_1)^2 + A_1^{\,2}} \cdot \sqrt{(-B_2)^2 + A_2^{\,2}}}.$$

Отже, *кут між прямими* можна обчислити за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^{\,2} + B_1^{\,2}} \cdot \sqrt{A_2^{\,2} + B_2^{\,2}}}. \qquad (3.14)$$

Якщо $l_1 \perp l_2$, то $\cos\varphi = 0$. Тому справедлива теорема:

<u>Теорема</u> (*умова перпендикулярності двох прямих*)

Для того, щоб прямі l_1 і l_2 були перпендикулярними, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

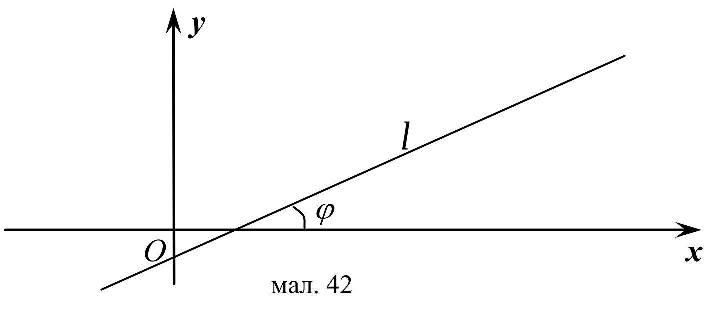
$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0. \qquad (3.15)$$

2. Прямі задані рівнянням з кутовим коефіцієнтом:

$$y = kx + b.$$

В прямокутній декартовій системі координат кутовий коефіцієнт прямої дорівнює тангенсу кута нахилу прямої до додатного напряму осі *Ox* (мал. 42), тобто:

$$k = tg\varphi. \qquad (3.16)$$



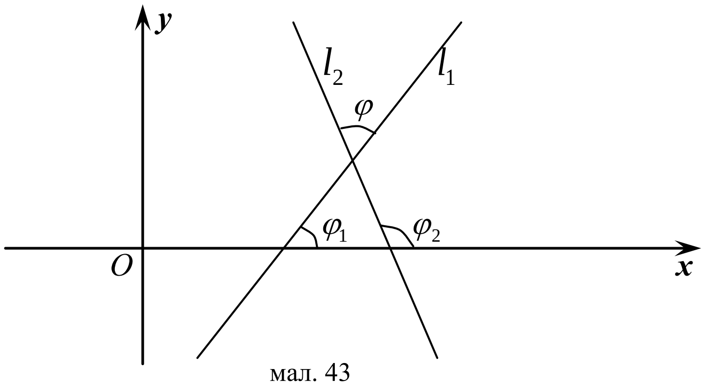
мал. 42

Нехай $l_1:\; y = k_1 x + b_1,$

$l_2:\; y = k_2 x + b_2.$

Знайти кут між прямими.

Для прямих l_1 і l_2 з мал. 43 матимемо: $k_1 = tg\varphi_1,\, k_2 = tg\varphi_2$.



мал. 43

Оскільки $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, то $tg\varphi = tg(\varphi_2 - \varphi_1) = \dfrac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_1 \cdot tg\varphi_2}$.

Отже, *кут між прямими*, обчислюється за формулою:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}. \tag{3.17}$$

Якщо $l_1 \perp l_2$, то $tg\varphi = \infty$. З останньої рівності слідує, $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$. Отже, справедлива теорема:

<u>Теорема</u> (*умова перпендикулярності прямих через їх кутові коефіцієнти*)

Для того, щоб прямі l_1 і l_2 були перпендикулярними, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}, \tag{3.18}$$

тобто, щоб їх коефіцієнти були оберненими за величиною і протилежними за знаком.

З мал. 42 слідує теорема:

<u>Теорема</u> (*умова паралельності прямих через їх кутові коефіцієнти*)

Для того, щоб прямі l_1 і l_2 були паралельними, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$k_1 = k_2, \tag{3.19}$$

тобто, щоб були рівними їх кутові коефіцієнти.

<u>Приклад.</u> Скласти рівняння прямої l_1, яка проходить через точку $A(-2{,}4)$ паралельно до прямої $l: 3x - 5y - 1 = 0$.

Запишемо рівняння прямої l у вигляді: $y = \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$. Звідси матимемо, що $k = \frac{3}{5}$.

Оскільки $l \parallel l_1$, то $k_1 = k = \frac{3}{5}$. Тоді l_1: $y = \frac{3}{5}x + b$. $A \in l_1 \Rightarrow 4 = \frac{3}{5} \cdot (-2) + b$. Тоді $b = \frac{26}{5}$.

Отже, рівняння прямої має вигляд: $y=\frac{3}{5}x+\frac{26}{5}$. Або l_1: $3x-5y+26=0$.

Приклад. Скласти рівняння прямої l_1, яка проходить через точку $B(3,-1)$ перпендикулярно до прямої $l: 4x+y-5=0$.

$l: y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{3} \Rightarrow k=-\frac{4}{3}$. Тоді за формулою (3.18) отримаємо: $k_1=-\frac{1}{k}=\frac{3}{4}$. Звідси

l_1: $y=\frac{3}{4}x+b$. $B\in l_1 \Rightarrow -1=\frac{3}{4}\cdot 3+b$. Звідки: $b=-\frac{13}{4}$.

Отже, рівняння прямої: $y=\frac{3}{4}x-\frac{13}{4}$. Або l_1: $3x-4y-13=0$.

Тестові завдання до практичного заняття:

ТЗ 5.1. Яке з рівнянь є рівнянням прямої у відрізках на осях?

А. $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$; Б. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$;

В. $Ax+By+C=0$; Г. $y=kx+b$.

ТЗ 5.2. Яке з рівнянь є рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом?

А. $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$; Б. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$;

В. $y=kx+b$; Г. $Ax+By+C=0$.

ТЗ 5.3. Яке з рівнянь є рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки?

А. $\frac{y-y_1}{y_2+y_1}=\frac{x-x_1}{x_2+x_1}$; Б. $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$;

В. $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_2}{x_2-x_1}$; Г. $y-y_0=k(x-x_0)$.

ТЗ 5.4. Яке з рівнянь є канонічним рівнянням прямої?

А. $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$; Б. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$;

В. $y=kx+b$; Г. $Ax+By+C=0$.

ТЗ 5.5. Які з рівнянь є загальним рівнянням прямої?

А. $Ax+By+C=0$; Б. $y=kx+b$;

В. $y-y_0=k(x-x_0)$; Г. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

ТЗ 5.6. Яке з рівнянь є рівнянням прямої, що проходить через задану точку і має заданий кутовий коефіцієнт?

А. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$; Б. $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$;

В. $y=kx+b$; Г. $y-y_0=k(x-x_0)$.

ТЗ 5.7. Що називається кутовим коефіцієнтом k прямої l?

А. Кут нахилу прямої l до осі Ox: $k=\alpha$.

Б. Тангенс кута нахилу прямої l до осі Ox: $k=tg\alpha$.

В. Синус кута нахилу прямої l до осі Ox: $k = \sin\alpha$.

Г. Косинус кута нахилу прямої l до осі Oy: $k = \cos\beta$.

ТЗ 5.8. За якою формулою обчислюється кут φ між двома прямими $l_1:\ y = k_1x + b_1$ і $l_2:\ y = k_2x + b_2$?

А. $tg\varphi = \dfrac{k_1 + k_2}{1 - k_1k_2}$; Б. $tg\varphi = \dfrac{k_1 + k_2}{1 + k_1k_2}$;

В. $tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 - k_1k_2}$; Г. $tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$.

ТЗ 5.9. Яка з прямих відсікає на осях координат Ox, Oy відповідно відрізки $a = 2,\ b = 5$?

А. $5x + 3y - 10 = 0$; Б. $5x + 2y - 9 = 0$;

В. $5x + 2y - 10 = 0$; Г. $5x - 2y - 10 = 0$.

ТЗ 5.10. Яка з прямих проходить через точки $M_1(1,\ 3)$, $M_2(6,\ 5)$?

А. $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-3}{2}$; Б. $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+3}{2}$;

В. $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y+3}{2}$; Г. $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-3}{2}$.

ТЗ 5.11. Яка з прямих утворює тупий кут з віссю Ox ?

А. $y = \dfrac{2}{5}x + 4$; Б. $y = \dfrac{1}{3}x - 5$;

В. $y = -\dfrac{1}{2}x + 4$; Г. $y = 2x + 1$.

ТЗ 5.12. Яка з прямих утворює гострий кут з віссю Ox ?

А. $5x - 3y - 4 = 0$; Б. $5x + 3y + 4 = 0$;

В. $3x + y - 4 = 0$; Г. $4x + 3y - 3 = 0$.

ТЗ 5.13. Яка з прямих паралельна осі Ox ?

А. $5x + 8 = 0$; Б. $5x - y + 8 = 0$;

В. $5y - 8 = 0$; Г. $5x + 5y - 8 = 0$.

ТЗ 5.14. Яка з прямих перпендикулярна прямій $y = 3x + 7$?

А. $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-2}{1}$; Б. $\dfrac{x-3}{6} = \dfrac{y-2}{-2}$;

В. $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y-2}{-3}$; Г. $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-2}{3}$.

ТЗ 5.15. Яка з прямих перпендикулярна до осі Ox ?

А. $5x + y + 8 = 0$; Б. $5x + 8 = 0$;

В. $5y - 8 = 0$; Г. $5x - 5y + 8 = 0$.

ТЗ 5.16. Які з двох прямих перпендикулярні між собою?

А. $\begin{cases} y = 2x + 1, \\ y = \dfrac{1}{2}x + 3; \end{cases}$ Б. $\begin{cases} y = 2x + 1, \\ y = \dfrac{1}{3}x - 3; \end{cases}$

В. $\begin{cases} y = 2x - 1, \\ y = -\dfrac{1}{2}x + 1; \end{cases}$ Г. $\begin{cases} y = 2x + 5, \\ y = 3x - 1. \end{cases}$

ТЗ 5.17. Які з двох прямих паралельні між собою?

А. $\begin{cases} 3x - y + 5 = 0, \\ 2x + y + 4 = 0; \end{cases}$ Б. $\begin{cases} 3x - y + 5 = 0, \\ 3x + y + 5 = 0; \end{cases}$

В. $\begin{cases} 3x - y + 7 = 0, \\ 6x + y - 7 = 0. \end{cases}$ Г. $\begin{cases} 3x - y + 5 = 0, \\ -6x + 2y - 2 = 0; \end{cases}$

ТЗ 5.18. Яка з прямих перпендикулярна до прямої $y = \frac{4}{3}x - 6$?

А. $3x + 4y - 8 = 0$; Б. $3x - 4y + 7 = 0$;

В. $4x + 3y - 7 = 0$; Г. $4x - 3y + 8 = 0$.

ТЗ 5.19. Яка з прямих проходить через точку $M_0(1,\,2)$?

А. $2x - 3y - 8 = 0$; Б. $2x + 3y - 8 = 0$;

В. $2x - 8y + 3 = 0$; Г. $2x + 4y - 8 = 0$.

ТЗ 5.20. Яка з прямих перетинає вісь Ox у точці $M_0(4,\,0)$?

А. $3x + y - 8 = 0$; Б. $3x + y - 12 = 0$;

В. $3x + 4y - 8 = 0$; Г. $4x - y - 7 = 0$.

ТЗ 5.21. Відстань від точки $M_0(-2;\,1)$ до прямої $y = -\frac{4}{3}x + 7$ дорівнює

А. 4 ; Б. 10 ; В. 7 ; Г. 2,4 .

ТЗ 5.22. Відстань від точки $M_0(2;-8)$ до прямої $\frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1$ дорівнює

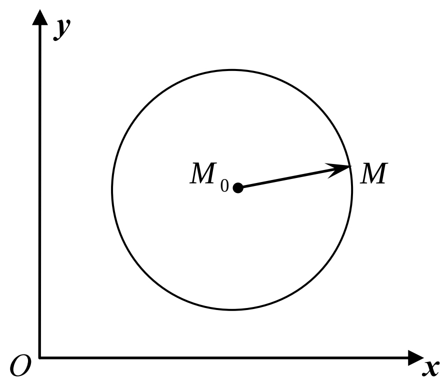
А. 4 ; Б. 10 ; В. 6 ; Г. 7 .

Практичне заняття № 6. Лінії другого порядку на площині

Коло

<u>*Означення.*</u> *Колом* називається геометричне місце точок площини, віддалі від яких до фіксованої точки, яка називається *центром кола*, є величина стала, рівна R. Число R називається *радіусом кола*.

Нехай дано коло з центром в точці $M_0(x_0, y_0)$ радіусом R (мал. 44). Скласти рівняння цього кола.



мал. 44

Візьмемо довільну точку $M(x, y)$, що належить колу. Тоді $\left|\overrightarrow{M_0M}\right| = R$, де $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0)$. Звідки отримаємо:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R,$$

або
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \qquad (4.1)$$

– *рівняння кола*.

Рівняння кола з центром в початку координат має вигляд:

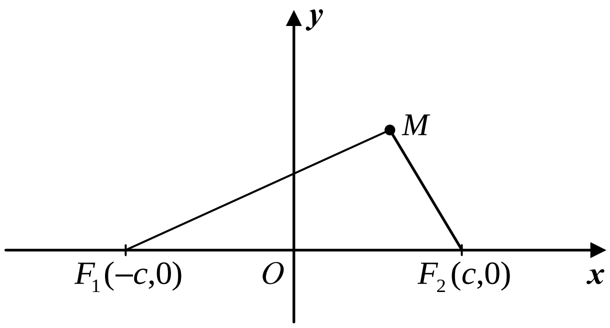
$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (4.2)$$

Еліпс

<u>*Означення.*</u> *Еліпсом* називається геометричне місце точок площини, сума віддалей яких до двох фіксованих точок, які називаються *фокусами*, є величина стала, рівна $2a$, де $2a > 2c$, $2c$ – віддаль між фокусами.

Побудуємо систему координат так: вісь *Ox* проведемо через фокуси F_1 і F_2, а вісь *Oy* проведемо через середину відрізка $F_1F_2 = 2c$ перпендикулярно до осі *Ox*.

Візьмемо довільну точку $M(x, y)$, що належить еліпсу (мал. 45).



мал. 45

За умовою, сума віддалей від точки M до фокусів F_1 і F_2 рівна $2a$, тобто: $F_1M + F_2M = 2a$, де $\overrightarrow{F_1M}(x + c, y)$, $\overrightarrow{F_2M}(x - c, y)$.

Тоді $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$. Звідки: $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.

Піднесемо до квадрату обидві частини рівності та виконаємо необхідні спрощення:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx,$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx\,.$$

Піднесемо до квадрату:

$$a^2((x-c)^2+y^2)=(a^2-cx)^2,$$

$$a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)=a^4-2a^2cx+c^2x^2,$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2,$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)\,.$$

Так як $a>c$ (за умовою), то $a^2-c^2>0$. Тому позначимо:

$$a^2-c^2=b^2\,. \tag{4.3}$$

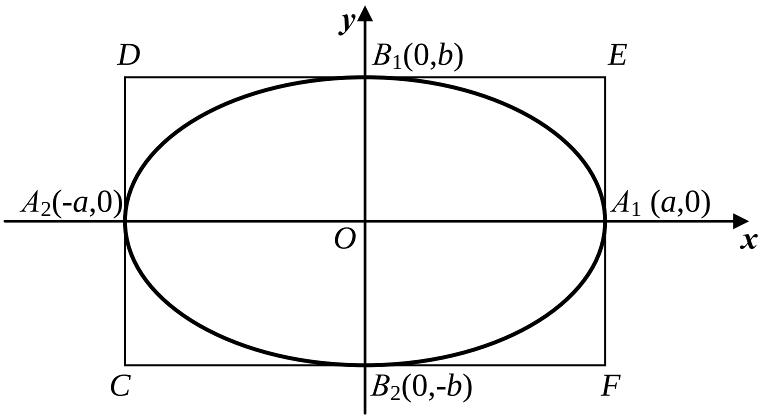
Звідки: $$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\,.$$

Поділимо останню рівність почленно на a^2b^2:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{4.4}$$

– *канонічне рівняння еліпса*.

Графік еліпса зображено на мал. 46.



мал. 46

Властивості еліпса:

1) Оскільки рівняння (4.4) є рівнянням другого степеня, то еліпс – лінія другого порядку.

2) Еліпс симетричний відносно осей *Ox* і *Oy*, а також відносно початку координат.

3) *Означення.* *Вершинами еліпса* називаються його точки перетину з осями координат. Еліпс має чотири вершини: A_1, A_2, B_1, B_2.

4) Еліпс повністю міститься у прямокутнику *CDEF*, тобто для еліпса виконуються нерівності:

$$\begin{cases}-a\le x\le a,\\ -b\le y\le b.\end{cases}$$

<u>Означення.</u> Відрізок $2a$ називається *великою віссю еліпса*, відрізок $2b$ – *малою віссю еліпса*.

<u>Означення.</u> *Ексцентриситетом еліпса* називається відношення міжфокусної віддалі до великої осі:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \tag{4.5}$$

де $0 \le \varepsilon < 1$.

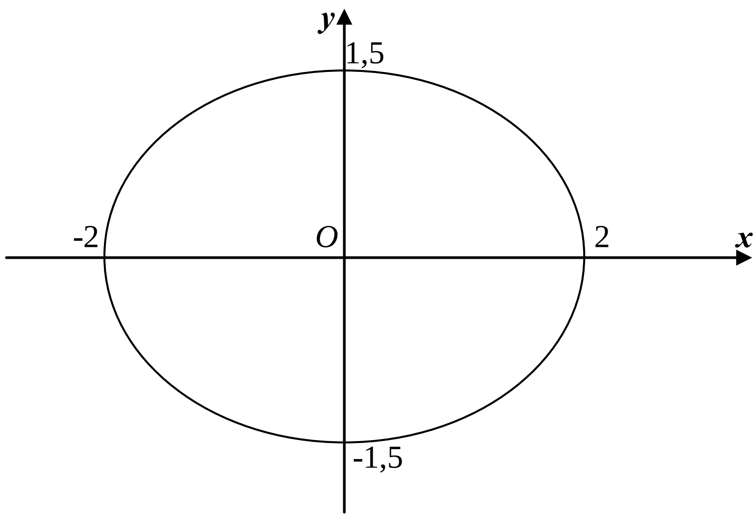
<u>Приклад.</u> Побудувати еліпс: $9x^2 + 16y^2 = 36$ і знайти параметри a, b, c, ε .

Зведемо рівняння еліпса до канонічного вигляду:

$$\frac{9x^2}{36} + \frac{16y^2}{36} = 1,$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9/4} = 1.$$

Звідси отримаємо: $a = \sqrt{4} = 2,\ b = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$. Графік еліпса зображено на мал. 47.



мал. 47

З формули (4.3) знайдемо *c*: $c^2 = a^2 - b^2 = 4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4}$. Тоді $c = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

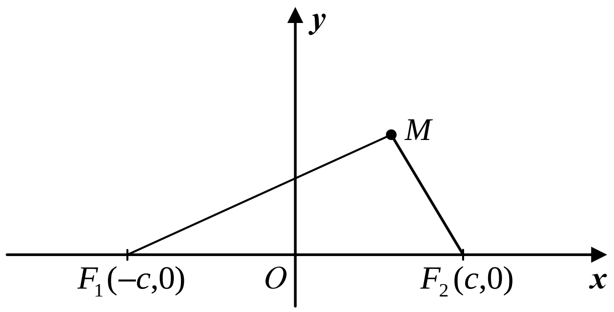
Знайдемо ε за формулою (4.5): $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Гіпербола

<u>Означення.</u> *Гіперболою* називається геометричне місце точок площини, різниця віддалей яких до двох фіксованих точок, які називаються *фокусами*, є величина стала, рівна $2a$, де $2a < 2c$, $2c$ – віддаль між фокусами.

Побудуємо систему координат так: вісь Ox проведемо через фокуси F_1 і F_2, а вісь Oy проведемо через середину відрізка $F_1F_2 = 2c$ перпендикулярно до осі Ox.

Візьмемо довільну точку $M(x, y)$, що належить гіперболі (мал. 48).



мал. 48

За умовою, різниця віддалей від точки M до фокусів F_1 і F_2 рівна $2a$, тобто: $F_1M - F_2M = 2a$, де $\overrightarrow{F_1M}(x+c, y)$, $\overrightarrow{F_2M}(x-c, y)$.

Тоді $\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$. Звідки: $\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$.

Піднесемо до квадрату обидві частини рівності та виконаємо необхідні спрощення:

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2-2cx+c^2+y^2,$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4cx-4a^2, \quad a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = cx-a^2.$$

Піднесемо до квадрату:

$$a^2((x-c)^2+y^2) = (cx-a^2)^2,$$

$$a^2(x^2-2cx+c^2+y^2) = c^2x^2-2a^2cx+a^4,$$

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2 = a^2c^2-a^4,$$

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2 = a^2(c^2-a^2).$$

Так як $a < c$ (за умовою), то $c^2 - a^2 > 0$. Тому позначимо:

$$c^2 - a^2 = b^2. \tag{4.6}$$

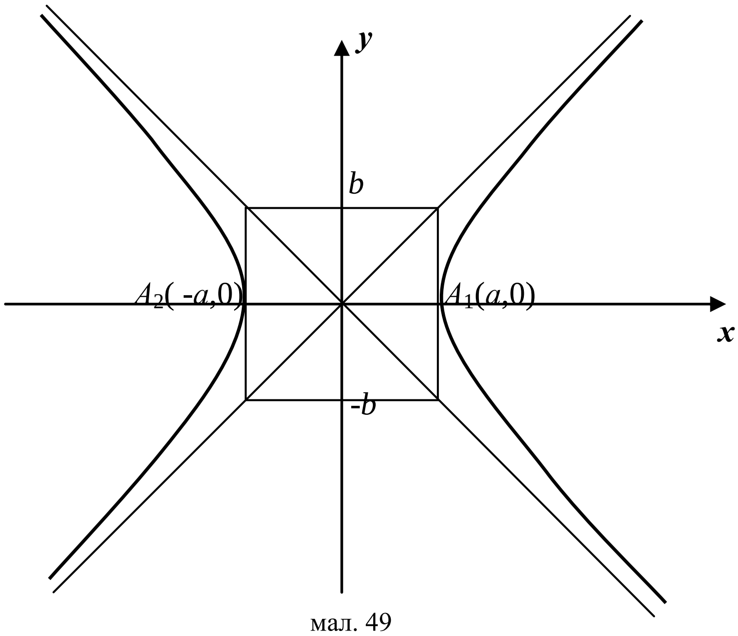
Звідки: $$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Поділимо останню рівність почленно на a^2b^2:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4.7}$$

– *канонічне рівняння гіперболи*.

Графік гіперболи зображено на мал. 49.



мал. 49

Властивості гіперболи:

1) Оскільки рівняння (4.7) є рівнянням другого степеня, то гіпербола – лінія другого порядку.

2) Гіпербола симетрична відносно осей Ox і Oy, а також відносно початку координат.

3) <u>*Означення.*</u> *Вершинами гіперболи* називаються її точки перетину з віссю Ox.

Гіпербола має дві вершини: A_1, A_2.

4) Гіпербола має дві асимптоти, які задаються рівняннями:

$$y_1 = \frac{b}{a}x \quad \text{і} \quad y_2 = -\frac{b}{a}x.$$

<u>*Означення.*</u> Відрізок $2a$ називається *дійсною віссю гіперболи*, відрізок $2b$ – *уявною віссю гіперболи*.

<u>*Означення.*</u> *Ексцентриситетом гіперболи* називається відношення міжфокусної віддалі до дійсної осі:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \tag{4.8}$$

де $\varepsilon > 1$.

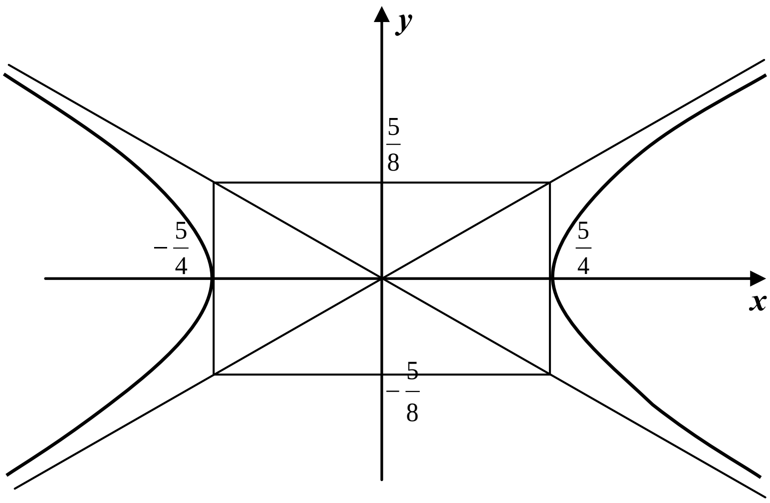
<u>Приклад.</u> Побудувати гіперболу: $16x^2 - 64y^2 = 25$ і знайти параметри a, b, c, ε.

Зведемо рівняння гіперболи до канонічного вигляду:

$$\frac{16x^2}{25} - \frac{64y^2}{25} = 1 \quad \text{або} \quad \frac{x^2}{25/16} - \frac{y^2}{25/64} = 1.$$

Звідси отримаємо: $a = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$, $b = \sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8}$.

Графік гіперболи зображено на мал. 50.



мал. 50

З формули (4.6) знайдемо c:

$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{25}{16} + \frac{25}{64} = 25\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{64}\right) = 25 \cdot \frac{80}{16 \cdot 64} = \frac{25 \cdot 5}{64} = \frac{125}{64}.$$

Тоді $c = \sqrt{\frac{125}{64}} = \frac{5\sqrt{5}}{8}$.

Знайдемо ε за формулою (4.8):

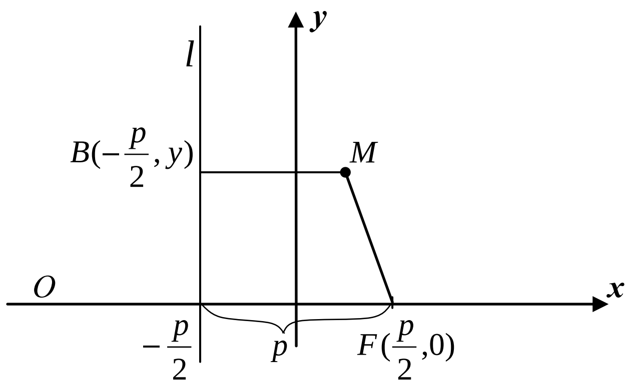
$$\varepsilon = \frac{\frac{5\sqrt{5}}{8}}{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Парабола

<u>*Означення.*</u> *Параболою* називається геометричне місце точок площини, рівновіддалених від даної точки, яка називається *фокусом*, і від даної прямої, яка називається *директрисою*.

Побудуємо систему координат так: вісь *Ox* проведемо через фокус *F* перпендикулярно до директриси; вісь *Oy* проведемо посередині між фокусом і директрисою відрізка перпендикулярно до осі *Ox*.

Візьмемо довільну точку $M(x, y)$, що належить параболі (мал. 51).



мал. 51

За умовою, віддалі від точки M до фокуса F і до директриси рівні, тобто: $FM = BM$, де $\overrightarrow{FM}\left(x-\frac{p}{2}, y\right)$, $\overrightarrow{BM}\left(x+\frac{p}{2}, 0\right)$.

Тоді $\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}$.

Піднесемо до квадрату обидві частини рівності та виконаємо необхідні спрощення:

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2,$$

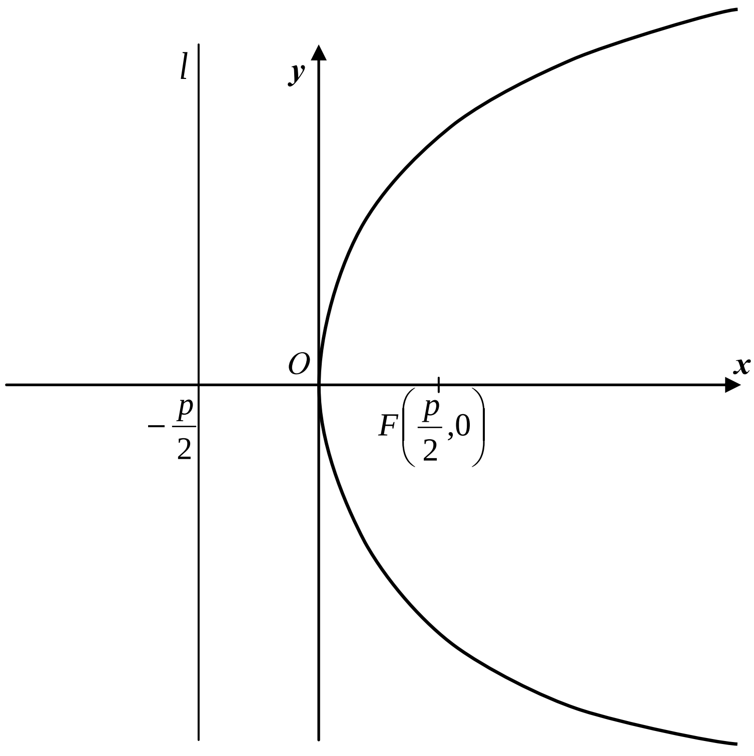
$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}.$$

Звідки:

$$y^2 = 2px \tag{4.9}$$

– *канонічне рівняння параболи*.

Графік параболи зображено на мал. 52.



мал.52

Властивості параболи:

1) Оскільки рівняння (4.10) є рівнянням другого степеня, то парабола – лінія другого порядку.

2) Парабола симетрична відносно осі *Ox*.

3) Парабола має одну вершину в початку координат.

4) Парабола повністю міститься в правій півплощині відносно осі Oy.

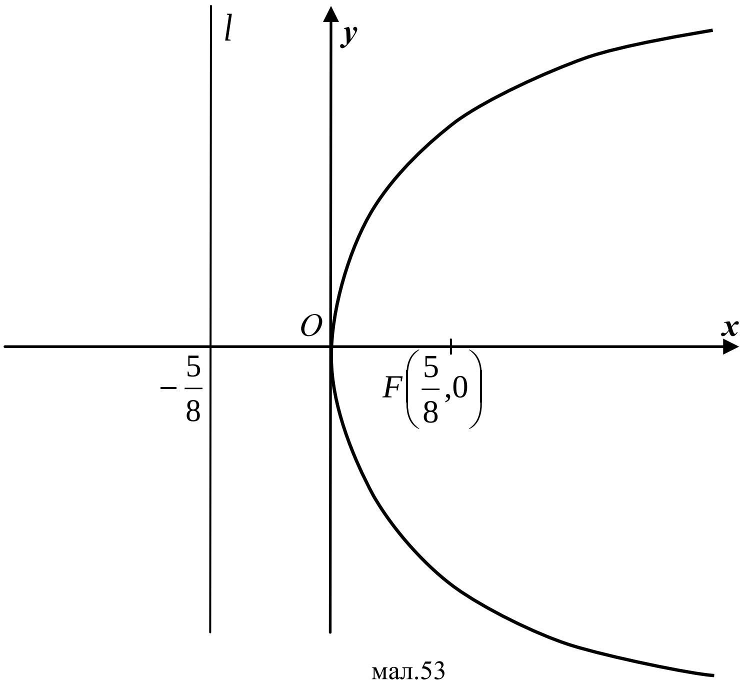
Приклад. Побудувати параболу: $2y^2 = 5x$ і знайти директрису та координати фокуса.

Зведемо рівняння параболи до канонічного вигляду:

$$y^2 = \frac{5}{2}x.$$

Звідси отримаємо: $2p = \frac{5}{2} \Rightarrow p = \frac{5}{4}$. Рівняння директриси: $x = -\frac{5}{8}$. Координати фокуса: $F\left(\frac{5}{8}, 0\right)$.

Графік параболи зображено на мал. 53.



мал.53

Тестові завдання до практичного заняття:

ТЗ 6.1. Яке з рівнянь є рівнянням еліпса?

А. $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$; Б. $4x^2 - 9y^2 + 36 = 0$;

В. $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$; Г. $4x^2 + 9y^2 + 36 = 0$.

ТЗ 6.2. Яке з рівнянь є рівнянням гіперболи?

А. $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$; Б. $9x^2 + 4y^2 + 36 = 0$;

В. $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$; Г. $9x^2 + 4y - 36 = 0$.

ТЗ 6.3. Яке з рівнянь є рівнянням кола?

А. $x^2 - y^2 + 7 = 0$; Б. $5x^2 + 3y^2 - 7 = 0$;

В. $2x^2 - 4x + 3y - 7 = 0$; Г. $x^2 - 2x + y^2 = 0$.

ТЗ 6.4. Яке з рівнянь є рівнянням параболи?

А. $y^2 = 8x + 4$; Б. $y^2 = 8x^2 + 4$;

В. $y^2 + 8x^2 = 4$; Г. $y = 8x + 4$.

ТЗ 6.5. Для якої гіперболи пряма $y = \frac{1}{2}x$ є асимптотою?

А. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$;   Б. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$;

В. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$;   Г. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$.

ТЗ 6.6. Яка з гіпербол має ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$?

А. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$;   Б. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$;

В. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$;   Г. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1$.

ТЗ 6.7. Яка з гіпербол має дійсну $a = 5$ і уявну $b = 2$ півосі?

А. $4x^2 - 16y^2 = 16$;   Б. $4x^2 - 25y^2 = 100$;

В. $16x^2 - 4y^2 = 16$;   Г. $25x^2 - 4y^2 = 100$.

ТЗ 6.8. Яка з гіпербол має фокальну відстань $F_1F_2 = 2c = 8$?

А. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$;   Б. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$;

В. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$;   Г. $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{18} = 1$.

ТЗ 6.9. Який з еліпсів має фокальну відстань $F_1F_2 = 2c = 6$?

А. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$;   Б. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$;

В. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$;   Г. $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{16} = 1$.

ТЗ 6.10. Який з еліпсів має велику і малу півосі відповідно $a = 5,\ b = 2$?

А. $4x^2 + 16y^2 = 16$;   Б. $4x^2 + 25y^2 = 100$;

В. $16x^2 + 4y^2 = 64$;   Г. $25x^2 + 4y^2 = 100$.

ТЗ 6.11. Який з еліпсів має ексцентриситет $\varepsilon = \frac{4}{5}$?

А. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$;   Б. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$;

В. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$;   Г. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{24} = 1$.

ТЗ 6.12. Яка з парабол має фокус в точці $F(2, 0)$?

А. $y^2 = 12x$; Б. $x^2 = 8y$; В. $y^2 = 10x$; Г. $y^2 = 8x$.

ТЗ 6.13. Для якої кривої другого порядку сума відстаней від довільної точки M цієї лінії до двох різних фіксованих точок F_1 і F_2 (фокусів) є величиною сталою: $F_1M + F_2M = 2a$?

А. Для гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Б. Для еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

В. Для кола $x^2 + y^2 = R^2$. Г. Для параболи $y^2 = 2px$.

ТЗ 6.14. Для якої кривої другого порядку модуль різниці відстаней від довільної точки M цієї лінії до двох різних фіксованих точок F_1 і F_2 (фокусів) є величиною сталою:

$$|F_1M - F_2M| = 2a \text{ ?}$$

А. Для кола $x^2 + y^2 = R^2$. Б. Для параболи $y^2 = 2px$.

В. Для еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Г. Для гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

ТЗ 6.15. Для якої кривої другого порядку відстані від довільної точки M цієї лінії до фіксованої прямої d (директриси) і до фіксованої точки F (фокуса) рівні між собою: $MN = MF$, де $MN \perp d$; $N \in d$?

А. Для гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Б. Для еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

В. Для кола $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Г. Для параболи $y^2 = 2px$.

ТЗ 6.16. Для якої кривої другого порядку відстань від довільної точки M цієї лінії до фіксованої точки $C(x_0\,; y_0)$ залишається сталою величиною ?

А. Для еліпса $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$.

Б. Для гіперболи $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$.

В. Для кола $(x - x_0)^2 + \ + (y - y_0)^2 = R^2$.

Г. Для параболи $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$.

ТЗ 6.17. Для якої кривої другого порядку існують асимптоти і які їх рівняння?

А. Для кола $x^2 + y^2 = R^2$. Асимптоти $x = \pm a,\ a > R$.

Б. Для параболи $y^2 = 2px$. Асимптоти $y = \pm \frac{b}{a} x$.

В. Для еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Асимптоти $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$.

Г. Для гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Асимптоти $y = \pm \frac{b}{a} x$.

ТЗ 6.18. Для якої кривої другого порядку ексцентриситет ε задовольняє нерівності: $0 < \varepsilon = \frac{c}{a} < 1$?

А. Для кола $x^2 + y^2 = R^2$. Б. Для еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

В. Для гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Г. Для параболи $y^2 = 2px$.

ТЗ 6.19. Для якої кривої другого порядку ексцентриситет задовольняє умові: $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$?

А. Для еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Б. Для кола $x^2+y^2=R^2$.

В. Для гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Г. Для параболи $y^2=2px$.

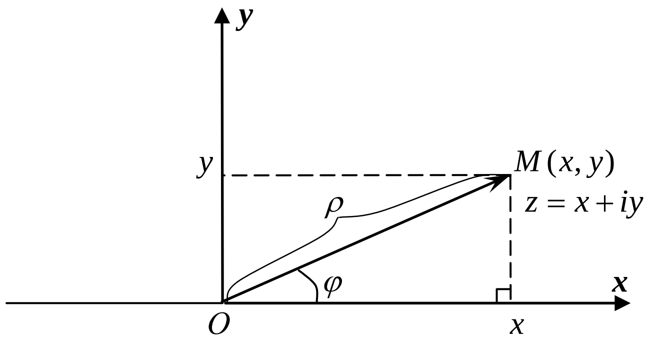
ТЗ 6.20. Яка з кривих другого порядку має лише одну вісь симетрії?

А. Парабола. Б. Коло. В. Еліпс. Г. Гіпербола.

Практичні заняття 7,8. Тригонометрична і показникова форми комплексного числа. Дії над комплексними числами, заданими в тригонометричній формі

Поряд із прямокутними декартовими координатами (x, y) точки *M*, яка на комплексній площині зображає комплексне число $z = x + iy$, розглянемо її полярні координати (ρ, φ), де ρ – довжина радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$ точки *M*, φ – полярний кут точки *M*, тобто кут між додатним напрямком осі *Ox* і вектором $\overrightarrow{OM}$ (мал. 56). При цьому кут φ вважається від'ємним, якщо він вимірюється в напрямку, що відповідає руху годинникової стрілки, і додатним – в протилежному випадку.

Очевидно, що завжди $\rho \geq 0$ і $-\infty < \varphi < +\infty$.



мал. 56

Якщо (ρ, φ) – полярні координати точки $M(x, y)$, що зображає комплексне число $z = x + iy$ на комплексній площині, то

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{5.23}$$

а число φ називається *аргументом комплексного числа* z.

Для комплексного числа $z = x + iy$ з полярними координатами (ρ, φ) справедливі рівності:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \tag{5.24}$$

Звідси отримаємо:

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{5.25}$$

– *тригонометрична форма комплексного числа* z.

Введемо позначення: $$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{5.26}$$

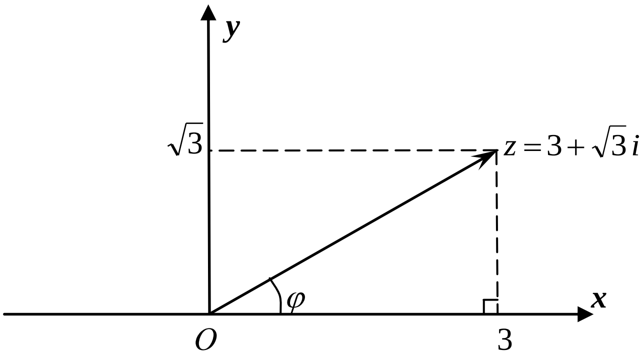
Тоді з формули (5.25) отримаємо:

$$z = \rho e^{i\varphi} \tag{5.27}$$

– показникова форма комплексного числа.

Приклад. Знайти тригонометричну та показникову форми комплексного числа $z = 3 + \sqrt{3}i$.

Комплексне число $z = 3 + \sqrt{3}i$ зображається вектором із початком в точці $O(0,0)$ і кінцем в точці $(3, \sqrt{3})$ (мал. 57).



мал. 57

Знайдемо ρ за формулою (5.23):

$$\rho = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Знайдемо φ за формулою (5.24):

$\cos\varphi = \dfrac{x}{\rho} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Звідси $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$.

Отже, тригонометрична форма комплексного числа $z = 3 + \sqrt{3}i$ за формулою (5.25) має вигляд:

$$z = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Показникову форму знайдемо за формулою (5.27):

$$z = 2\sqrt{3}\,e^{\frac{\pi}{6}i}.$$

Дії над комплексними числами в тригонометричній та показниковій формах

Над комплексними чисел z_1 і z_2, записаними в тригонометричній формі:

$$\begin{aligned} z_1 &= \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \\ z_2 &= \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2), \end{aligned} \tag{5.28}$$

дії множення і ділення виконуються за такими правилами:

I. Множення комплексних чисел

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= \rho_1 \cdot \rho_2(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) =$$
$$= \rho_1 \cdot \rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Отже, отримаємо: $$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \quad (5.29)$$

– модуль добутку комплексних чисел дорівнює добутку їх модулів, аргумент добутку дорівнює сумі їх аргументів.

II. Ділення комплексних чисел

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot (\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \cdot (\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$
$$= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} =$$
$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Звідси матимемо: $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (5.30)$$

– модуль частки комплексних чисел дорівнює частці їх модулів, аргумент частки дорівнює різниці їх аргументів.

III. Піднесення комплексних чисел до цілого степеня (формула Муавра)

Нехай маємо комплексне число z, записане в тригонометричній формі:

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Застосовуючи до цього числа формулу (5.29), можна отримати таку рівність:

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \quad (5.31)$$

– формула Муавра.

IV. Добування кореня з комплексних чисел

<u>*Означення.*</u> *Коренем n-го степеня з комплексного числа* z називається таке комплексне число ω, що $\omega^n = z$.

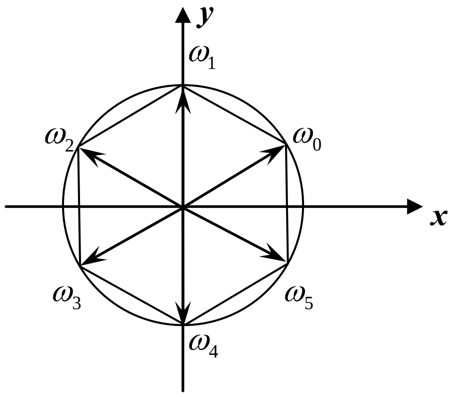
При $z \neq 0$ існує n різних комплексних чисел $\omega_0, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_{n-1}$, що є коренями n-го степеня з комплексного числа z.

Корені ω_k n-го степеня з комплексного числа $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ обчислюються за формулами:

$$\omega_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \tag{5.32}$$

де $k = \overline{0, n-1}$.

Всі корені ω_k n-го степеня з комплексного числа z лежать на колі радіусом $\sqrt[n]{\rho}$ з центром в початку координат. Сполучивши їх послідовно, отримаємо правильний n-кутник, вписаний у це коло (мал. 58 – випадок кореня 6-го степеня).



мал. 58

<u>Приклад.</u> Знайти корені 4-го степеня з числа $z = -1$.

Знайдемо тригонометричну форму числа $z = -1$. Очевидно, що $\rho = 1, \varphi = \pi$. Звідси отримаємо: $z = 1 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi)$.

Тоді за формулою (5.32) матимемо:

$$\omega_0 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi\cdot 0}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi\cdot 0}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$\omega_1 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi\cdot 1}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi\cdot 1}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$\omega_2 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi\cdot 2}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi\cdot 2}{4}\right) = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$\omega_3 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi\cdot 3}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi\cdot 3}{4}\right) = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Якщо комплексні числа z_1 і z_2 записані в показниковій формі:

$$\begin{aligned} z_1 &= \rho_1 e^{i\varphi_1}, \\ z_2 &= \rho_2 e^{i\varphi_2}, \end{aligned} \tag{5.33}$$

то дії множення і ділення згідно із формулами (2.29) і (2.30) виконуються так:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \tag{5.34}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \tag{5.35}$$

Для комплексного числа z, записаного в показниковій формі:

$z=\rho e^{i\varphi}$, піднесення цього числа до *n*-го степеня і добування з нього кореня *n*-го степеня виконуються відповідно до формул (5.31), (5.32) за правилами:

$$z^n=\rho^n\cdot e^{in\varphi}, \qquad (5.36)$$

– *формула Муавра.*

$$\omega_k=\sqrt[n]{\rho}\cdot e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n}}, \qquad (5.37)$$

де $k=\overline{0,n-1}$.

<u>Тестові завдання до практичного заняття:</u>

ТЗ 7.10. Подати комплексне число $z=5\sqrt{3}-5i$ у тригонометричній і показниковій (експоненціальній) формах.

А. $z=10e^{-i\frac{\pi}{6}}=10\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$. Б. $z=10e^{-i\frac{\pi}{3}}=10\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

В. $z=5e^{-i\frac{\pi}{4}}=5\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Г. $z=10e^{-i\frac{\pi}{6}}=10\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

ТЗ 7.11. Подати комплексне число $z=-4+4i$ у тригонометричній і показниковій (експоненціальній) формах.

А. $z=4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$. Б. $z=4e^{-i\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

В. $z=4\sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$. Г. $z=8e^{i\frac{3}{4}\pi}=8\left(\cos\frac{3}{4}\pi-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

ТЗ 7.12. Подати комплексне число $z=-3-3\sqrt{3}i$ у тригонометричній і показниковій (експоненціальній) формах.

А. $z=e^{i\frac{\pi}{3}}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$. Б. $z=6e^{i\frac{4}{3}\pi}=6\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$.

В. $z=6e^{i\frac{\pi}{4}}=6\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Г. $z=12e^{i\frac{2}{3}\pi}=12\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$.

ТЗ 7.13. Якщо $z_1=3e^{i\frac{\pi}{6}}$ та $z_2=4e^{i\frac{\pi}{3}}$, то значення виразу $z=z_1\cdot z_2$ в алгебраїчній формі дорівнює

А. $z=12e^{-i\frac{\pi}{2}}=-12i$. Б. $z=12e^{i\frac{\pi}{4}}=6\sqrt{2}+6\sqrt{2}i$.

В. $z=12e^{i\pi}=-12$. Г. $z=12e^{i\frac{\pi}{2}}=12i$.

ТЗ 7.14. Якщо $z_1=2e^{3i\pi}$ та $z_2=4e^{i\frac{\pi}{4}}$, то значення виразу $z=z_1\cdot z_2$ в алгебраїчній формі дорівнює

А. $z=8e^{-i\frac{3}{4}\pi}=-4\sqrt{2}-4\sqrt{2}i$. Б. $z=8e^{i\frac{\pi}{2}}=8i$.

В. $z=8e^{i\frac{\pi}{3}}=4\sqrt{3}-4i$. Г. $z=8e^{-i\frac{3}{4}\pi}=-4\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$.

ТЗ 7.15. Якщо $z_1 = 5e^{-i\frac{\pi}{3}}$ та $z_2 = 2e^{i\frac{2}{3}\pi}$, то значення виразу $z = z_1 \cdot z_2$ в алгебраїчній формі дорівнює

А. $z = 10e^{i\frac{\pi}{4}} = 5\sqrt{2}(1+i)$. Б. $z = 10e^{i\frac{\pi}{3}} = 5+5\sqrt{3}i$.

В. $z = 5e^{-i\frac{\pi}{6}} = 5\sqrt{3}-5i$. Г. $z = 10e^{-i\frac{\pi}{3}} = 5\sqrt{3}-5\sqrt{3}i$.

ТЗ 7.16. Значення виразу $z = z_1 \cdot z_2$, де $z_1 = 12\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ і $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$, в алгебраїчній формі дорівнює

А. $z = 24\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 12+12\sqrt{3}i$. Б. $z = 24\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 12\sqrt{3}+12i$.

В. $z = 24\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -12+12\sqrt{3}i$. Г. $z = 14\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 7+7\sqrt{3}i$.

ТЗ 7.17. Значення виразу $z = z_1 \cdot z_2$, де $z_1 = 16\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ і $z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$, в алгебраїчній формі дорівнює

А. $z = 14\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 14i$. Б. $z = 32\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 16\sqrt{3}+16i$.

В. $z = 32\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -16+16\sqrt{3}i$. Г. $z = 32\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -16\sqrt{3}-16i$.

ТЗ 7.18. Якщо $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$ та $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$, то значення виразу $z = z_1/z_2$ в алгебраїчній формі дорівнює

А. $z = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}i$. Б. $z = \frac{3}{2}e^{-i\frac{3}{4}\pi} = -\frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{3\sqrt{2}}{4}i$.

В. $z = \frac{3}{2}e^{-i\frac{5}{6}\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}i$. Г. $z = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{4}i$.

ТЗ 7.19. Значення виразу $z = z_1/z_2$, де $z_1 = 12\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ і $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$, в алгебраїчній формі дорівнює

А. $z = 24\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 12+12\sqrt{3}i$. Б. $z = 6\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 3+3\sqrt{3}i$.

В. $z = 6\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3}+3i$. Г. $z = 6\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -3+3\sqrt{3}i$.

ТЗ 7.20. Значення виразу $z = z_1/z_2$, де $z_1 = 8\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ і $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, в алгебраїчній формі дорівнює

А. $z = 4\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -2\sqrt{3}-2i$. Б. $z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -2+2\sqrt{3}i$.

В. $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$. Г. $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 4i$.

ТЗ 7.21. Значення виразу $z = z_1 / z_2$, де $z_1 = 12\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ і $z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$, в алгебраїчній формі дорівнює

А. $z = 9\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{9\sqrt{2}}{2} + \frac{9\sqrt{2}}{2}i$. Б. $z = 4\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i$.

В. $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3} + 2i$. Г. $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i$.

ТЗ 7.22. Якщо $z_1 = 4e^{-i\frac{\pi}{4}}$ та $z_2 = 2e^{i\frac{5}{4}\pi}$, то значення виразу $z = z_1 / z_2$ в алгебраїчній формі дорівнює

А. $z = 2e^{3i\pi} = -2$. Б. $z = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$.

В. $z = 2e^{i\frac{7}{4}\pi} = \sqrt{2}(1-i)$. Г. $z = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2 + 2i$.

ТЗ 7.23. Якщо $z_1 = 5e^{i\frac{5}{6}\pi}$ та $z_2 = 3e^{i\frac{2}{3}\pi}$, то значення виразу $z = z_1 / z_2$ в алгебраїчній формі дорівнює

А. $z = \frac{5}{3}e^{i\pi} = -\frac{5}{3}$. Б. $z = \frac{5}{3}e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{10}{3}\left(1 - i\sqrt{3}\right)$.

В. $z = \frac{5}{3}e^{-i\frac{\pi}{2}} = -\frac{5}{3}i$. Г. $z = \frac{5}{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{5\sqrt{3}}{6} + \frac{5\sqrt{3}}{6}i$.

ТЗ 7.24. Переходячи до показникової форми комплексного числа $z = 2\left(\sqrt{3} - i\right)$, знайти z^8 і подати результат у алгебраїчній формі.

А. $z^8 = 4^8 e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{4^8\sqrt{2}}{2} + \frac{4^8\sqrt{2}}{2}i$. Б. $z^8 = 4^8 e^{-i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{4^8}{2} + \frac{4^8\sqrt{3}}{2}i$.

В. $z^8 = 2^8 e^{i\frac{\pi}{3}} = 2^8 + 2^8\sqrt{3}i$. Г. $z^8 = 4^8 e^{-i\frac{8\pi}{3}} = -\frac{4^8}{2} - \frac{4^8\sqrt{3}}{2}i$.

ТЗ 7.25. Переходячи до показникової форми комплексного числа $z = 2(-1+i)$, знайти z^5 і подати результат у алгебраїчній формі.

А. $z^5 = 2^7\sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi} = -2^7 + 2^7 i$. Б. $z^5 = 2^7\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2^7 - 2^7 i$.

В. $z^5 = 2^7\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{2}} = 2^7\sqrt{2}i$. Г. $z^5 = 2^5 e^{i\frac{\pi}{4}} = 2^4\sqrt{2} + 2^4\sqrt{2}\,i$.

ТЗ 7.26. Переходячи до показникової форми комплексного числа $z = 3\left(1 - i\sqrt{3}\right)$, знайти z^4 і подати результат у алгебраїчній формі.

А. $z^4 = 6^4 e^{i\frac{2}{3}\pi} = -3\cdot 6^3 + 3\cdot 6^3\sqrt{3}i$. Б. $z^4 = 6^4 e^{i\frac{\pi}{6}} = 3\cdot 6^3\sqrt{3} + 3\cdot 6^3 i$.

В. $z^4 = 6^4 e^{i\frac{3}{4}\pi} = \frac{6^4}{\sqrt{2}}(-1+i)$. Г. $z^4 = 6^4 e^{i\frac{4}{3}\pi} = -3\cdot 6^3 - 3\cdot 6^3\sqrt{3}\,i$.

ТЗ 7.27. Переходячи до показникової форми комплексного числа $z = -64$, знайти всі значення кореня шостої степені $\sqrt[6]{z}$ і подати результат у алгебраїчній формі.

А. $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(1+i)$; $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$; $z_3 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\sqrt{2} + 2i$; $z_4 = 2e^{i\pi} = -2$;

$z_5 = 2e^{i\frac{5}{4}\pi} = \sqrt{2}(-1-i)$; $z_6 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(1-i)$

Б. $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1+i\sqrt{3}$; $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$; $z_3 = 2e^{i\frac{2}{3}\pi} = -1+i\sqrt{3}$; $z_4 = 2e^{i\frac{4}{3}\pi} = -1-i\sqrt{3}$;

$z_5 = 2e^{i\frac{3}{2}\pi} = -2i$; $z_6 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}-i$.

В. $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}+i$; $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$; $z_3 = 2e^{i\frac{5}{6}\pi} = -\sqrt{3}+i$; $z_4 = 2e^{i\frac{7}{6}\pi} = -\sqrt{3}-i$;

$z_5 = 2e^{-i\frac{\pi}{2}} = -2i$; $z_6 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}-i$.

Г. $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}+i$; $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1+\sqrt{3}i$; $z_3 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$; $z_4 = 2e^{i\frac{2}{3}\pi} = -1+\sqrt{3}i$;

$z_5 = 2e^{i\frac{5}{6}\pi} = -\sqrt{3}+i$; $z_6 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}-i$.

ТЗ 7.28. Переходячи до показникової форми комплексного числа $z = -125i$, знайти всі значення кореня третьої степені $\sqrt[3]{z}$ і подати результат у алгебраїчній формі.

А. $z_1 = 5e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{5}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}i$; $z_2 = 5e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{5}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}i$; $z_3 = 5e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{5}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}i$.

Б. $z_1 = 10e^{i\frac{\pi}{6}} = 5(\sqrt{3}+i)$; $z_2 = 10e^{i\frac{5}{6}\pi} = 5(-\sqrt{3}+i)$; $z_3 = 10e^{-i\frac{\pi}{2}} = -10i$.

В. $z_1 = 5e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}i$; $z_2 = 5e^{i\frac{\pi}{2}} = 5i$; $z_3 = 5e^{i\frac{7}{6}\pi} = -\frac{5\sqrt{3}}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}i$.

Г. $z_1 = 5e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{2}i$; $z_2 = 5e^{i\frac{\pi}{2}} = 5i$; $z_3 = 5e^{i\frac{3}{4}\pi} = -\frac{5\sqrt{2}}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{2}i$.

ТЗ 7.29. Переходячи до показникової форми комплексного числа $z = -81$, знайти всі значення кореня четвертої степені $\sqrt[4]{z}$ і подати результат у алгебраїчній формі.

А. $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{2}} = 3i$; $z_2 = 3e^{i\pi} = -3$; $z_3 = 3e^{-i\frac{\pi}{2}} = -3i$; $z_4 = 3e^{0i} = 3$.

Б. $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{2}(1+i\sqrt{3})$; $z_2 = 3e^{i\frac{5}{6}\pi} = \frac{3}{2}(-\sqrt{3}+i)$; $z_3 = 3e^{i\frac{4}{3}\pi} = \frac{3}{2}(-1-i\sqrt{3})$; $z_4 = 3e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{2}(1-i\sqrt{3})$.

В. $z_1 = 3e^{i\pi} = -3$; $z_2 = 3e^{0i} = 3$; $z_3 = 3e^{i\frac{\pi}{2}} = 3i$; $z_4 = 3e^{-i\frac{\pi}{2}} = -3i$.

Г. $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i$; $z_2 = 3e^{i\frac{3}{4}\pi} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i$;

$z_3 = 3e^{-i\frac{3}{4}\pi} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}i$; $z_4 = 3e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}i$.

ТЗ 7.30. Переходячи до показникової форми комплексного числа $z = 2+2\sqrt{3}i$, знайти всі значення квадратного кореня $\sqrt{z}$ і подати результат у алгебраїчній формі.

А. $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}+i$; $z_2 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\sqrt{3}-i$. Б. $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1+\sqrt{3}i$; $z_2 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = -1+\sqrt{3}i$.

В. $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}+i$; $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}-i$. Г. $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}+\sqrt{2}i$; $z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\sqrt{2}+\sqrt{2}i$.

ТЗ 7.31. Переходячи до показникової форми комплексного числа $z = -8-8\sqrt{3}i$, знайти всі значення квадратного кореня $\sqrt{z}$ і подати результат у алгебраїчній формі.

А. $z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{3}} = 2 + 2\sqrt{3}i$; $z_2 = 4e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2 - 2\sqrt{3}i$.

Б. $z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$; $z_2 = 4e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$.

В. $z_1 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} = -2 + 2\sqrt{3}i$; $z_2 = 4e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2 - 2\sqrt{3}i$.

Г. $z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{3} + 2i$; $z_2 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} = -2 + 2\sqrt{3}i$.

4. Перелік питань, які виносяться на залік

1. Визначники другого і третього порядку і їх обчислення.
2. Системи лінійних рівнянь і їх обчислення методом Гаусса.
3. Системи лінійних рівнянь і їх обчислення методом Крамера.
4. Матриці і дії над ними.
5. Обернена матриця і її обчислення за допомогою елементарних перетворень.
6. Матрична форма запису системи лінійних рівнянь. Розв’язання систем лінійних рівнянь матричним методом.
7. Вектори на площині та в просторі.
8. Дії над векторами.
9. Векторний базис та система координат.
10. Скалярний добуток векторів і його застосування.
11. Векторний добуток векторів і його застосування.
12. Мішаний добуток векторів і його застосування.
13. Поділ відрізка в заданому відношенні та навпіл.
14. Довжина відрізка. Центр ваги трикутника.
15. Полярна система координат. Циліндрична система координат.
16. Канонічне рівняння прямої. Рівняння прямої, що проходить через дві точки.
17. Загальне рівняння прямої. Пряма, задана точкою і нормованим вектором.
18. Рівняння прямої у «відрізках» на осях. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
19. Нормальне рівняння прямої. Взаємне розміщення двох прямих на площині.
20. Відстань від точки до прямої. Кут між прямими.
21. Поняття про лінії другого порядку на площині. Коло.
22. Еліпс, властивості еліпса.
23. Гіпербола, властивості гіперболи.
24. Парабола, властивості параболи.
25. Поняття комплексного числа. Алгебраїчна форма комплексного числа. Дії над комплексними числами, заданими в алгебраїчній формі.
26. Геометричне задання комплексних чисел.
27. Тригонометрична форма комплексного числа. Перехід від алгебраїчної форми комплексного числа до тригонометричної.
28. Дії над комплексними числами, заданими в тригонометричній формі: множення, ділення, піднесення до степеня, добування кореня.
29. Показникова форма комплексного числа. Перехід від алгебраїчної форми комплексного числа до показникової.

Рекомендована література

1. Басманов О.Є., Кириченко І.К., Мігунова Л.В., Сознік О.П. Вища математика: Навч. посібник. – Харків: АПБ, 2009
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – Київ, "А.С.К.", 2005. – 648 с.
3. Домбровський В.К., Крижанівський І.М. Вища математика:Підручник .- Тернопіль: 2003.
4. Кагадій Л.П., Павленко А.В., Чуднов К.У. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Ч. 1,2: Конспект лекцій. – Дніпропетровськ, НМетАУ. – 2004.
5. Клепко В.Ю.,Голець В.Л.Вища математика у прикладах і задачах: Навч.посібник.- Центр учбової літератури, 2021.- 594 с.
6. Кулик В.С.,Т.П.Кузьмич, М.В. Баховська . Конспект лекцій з вищої математики – Любешів, 2023.
7. Рудавський Ю.К., Костробій П.П. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. – Львів, 1999.
8. Соколенко О.І., Новик Г.А. Вища математика в прикладах і задачах. – К.: "Либідь", 2001 р.
9. Литвин І.І., Конопчук О.М., Желізняк Г.О. Вища математика: Навч. Посібник.- Київ «Центр учбової літератури»., 2009

Зміст

Вища математика [Текст]: методичні вказівки до виконання практичних занять для здобувачів освітньо-професійного ступеня фаховий молодший бакалавр галузь знань 27 Транспорт спеціальності 274 Автомобільний транспорт денної форми навчання / уклад. В.С.Кулик. Т.П. Кузьмич, М.В. Баховська М.В. – Любешів: ВСП «Любешівський ТФК Луцького НТУ», 2023 – 73 с.

Комп’ютерний набір і верстка: Т.П. Кузьмич

Редактор: Т.П. Кузьмич

Підп. до друку ___________2023 р. Формат А4.
Папір офіс. Гарн. Таймс. Умов. друк. арк. ______
Обл. вид. арк.______ Тираж 15 прим.